ANALISIS PEMAHAMAN MAHASISWA TERHADAP PEMBUKTIAN PERNYATAAN MATEMATIIKA PADA TOPIK GRUP DENGAN MODUL BERBASIS LOGIKA PEMBUKTIAN

Defri Ahmad[#1], Fridgo Tasman[#]
[#]*Mathematics Department, Universitas Negeri Padang*
Jl. Prof. Dr. Hamka, Padang, Indonesia
[1]defri_math@fmipa.unp.ac.id

Abstract- *Proving mathematics statement is one of important ability for undergraduate student to learn mathematics, especially in learning abstract algebra, real analysis, linear algebra, etc. More than a half of topic in group need proving ability to be mastered. In this article, students' understanding on proving some statement related to group (abstract algebra) that has been help by using proof reasoning module is examined. Data of student responses are collected using three item test and interview. Based on the result student ability in starting answer and create proving structure has been improved. But students' overall score still satisfied because they fail on choose some basic concept like theorem or definition to help them in proof.*

Keyword- *Proof Reasoning, Group, Proof Technique, Statement Type*

PENDAHULUAN

Grup merupakan salah satu konsep dasar pada matakuliah Struktur Aljabar. Grup dapat didefinisikan sebagai suatu struktur matematika yang terdiri atas suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner yang bersifat asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya mempunyai invers [1]. Berdasarkan definisi ini sebagai suatu struktur grup memuat pernyataan-pernyataan yang abstrak sehingga sulit dipahami mahasiswa. Beberapa peniliti telah melakukan upaya untuk meningkatkan pemahaman mahasiswa dalam memahami konsep seperti dengan menggunakan APOS [2], dengan mengurangi level keabstrakan pernyataan tersebut [3], [4], dan bahkan dengan menggunakan visualisasi computer [5]. Berbeda dengan yang telah dilakukan tersebut pada artikel ini dibahas masalah pengurangan abstraksi level tersebut dengan meningkat pemahaman mahasiswa terhadap hubungan statement matematika dan pembuktiannya.

Masalah pembuktian merupakan salah satu permasalahan umum yang dihadapi oleh mahasiswa dalam mempelajari konsep dasar matematika tingkat lanjut [6]–[10]. Salah satu konsep/ topik matematika yang dalam mempelajarinya harus melibatkan pembuktian yaitu grup. Masalah pembuktian pada grup sudah dimulai semenjak memperkenalkan konsepnya. Semua konsep pada grup memperkenalkan istilah baru sehingga tahap awal mengenali konsepnya adalah melalui definisi, kemudian contoh-contoh harus dicek melalui pembuktian bahwasanya kondisi definisi dipenuhi. Selanjutnya diperkenalkan sifat dan aturan yang penting untuk dipahami, proses pengenalan dan pemberian sifat-sifat juga melalui proses pembuktian. Sebagai akibat mempelajari struktur grup menjadi salah satu momok bagi mahasiswa yang mempelajarinya [2], [6], [9], [11].

Pembuktian merupakan suatu esensi atau keharusan dalam matematika [12]–[14], namun banyak peneliti mengungkap bahwa matakuliah yang sarat pembuktian kurang disukai mahasiswa matematika [15]–[19]. Kondisi ini tentunya sangat memprihatikan karena seorang matematikawan yang harusnya memiliki pemikiran logis dan terstruktur menakuti logika pembuktian/ Bahasa pembuktian. Pemahaman dasar seorang matematikawan harus logika yang berlandaskan aturan-aturan logika yang benar. Untuk itu, proses pendudukan pemikiran ini tidak dapat diserahkan pada suatu matakuliah saja. Untuk itu, masalah Bahasa matematis pada setiap pernyataan matematis (aksioma, definisi, lemma, teorema, dan akibat) harus didudukan dan dikaji dalam menjelaskan proses pembuktian [6], [9]–[11]. Pada dasarnya mahasiswa hanya akan melakukan proses peniruan langkah pada tahap awal memahami konsep-konsep pembuktian [20].

Dalam upaya untuk mengatasi permasalahan mahasiswa dalam memahami konsep grup struktur aljabar, modul berbasis logika pembuktian telah disusun. Ide dasar dari penyusunan modul ini yaitu mengurangi abstraksi level, dan mendudukan struktur Bahasa pernyataan yang ada dalam konsep serta peniruan proses pembuktian. Pengurangan abstraksi level dilakukan dengan kualitas hubungan antara mahasiswa dengan konsep, dualitas hubungan proses dan objek, dan tingkat kedalaman konsep [4]. Sementara dalam proses peniruan didudukan terlebih dahulu kelompok Bahasa logika konsep, dan teknik pembuktian yang cocok, kemudian dibuatkan langkah-langkah Bahasa yang harus ditulis dalam pembuktian.

Berdasarkan pelaksanaan proses pembelajaran menggunakan modul tersebut diukur tingkat penguasaan mahasiswa terhadap Bahasa matematika (logika matematika) pada konsep dan permasalahan pada perkuliahan Grup. Bagaimana mahasiswa mencoba mendudukan Bahasa/ memilih teknik pembuktian akan menjadi fokus dalam artikel ini.

METODE

Artikel ini disusun berdasarkan penelitian deskriptif yang telah dilakukan. Modul yang telah disusun diberikan dan diajarkan kepada 36 mahasiswa pendidikan matematika kelas internasional di Universitas Negeri Padang. Setelah itu diberikan test mandiri dan *closed book* dan wawancara untuk mengumpulkan data. Item test yang diberikan terdiri atas tiga item yaitu pembuktian subgroup dan subgroup siklis, pembuktian kekomutatifan dengan sifat elementer grup, dan pembuktian homomorfisma grup. Ketiga topik ini mewakili bagian awal, pertengah, dan akhir dari topik perkuliah grup pada matakuliah struktur aljabar. Fokus utama dalam pembahasan respon mahasiswa yaitu bagaimana mahasiswa memahami struktur Bahasa dan memilih teknik pembuktian yang tepat, dan selanjutnya baru dibahaskan tingkat kebenaran respon mahasiswa. Setelah diberikan test dan dicek jawabannya beberapa mahasiswa diwawancarai dan data hasil wawancara digunakan untuk mendukung data yang didapat pada jawaban mahasiswa.

HASIL DAN PEMBAHASAN

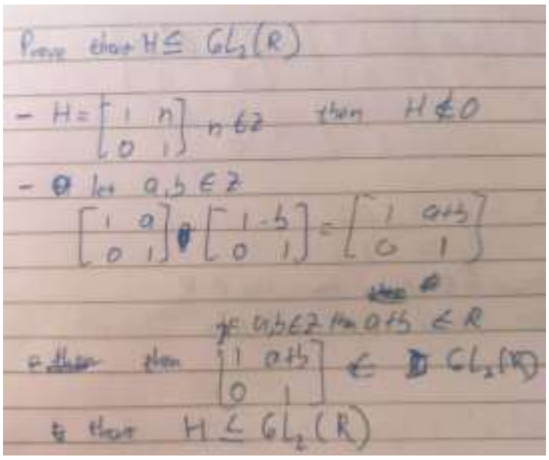
Respon mahasiswa terhadap item test yang diberikan akan dibahas item per item. Pertama dibahas respon rerata mahasiswa terhadap item soal, kemudian dibahas beberapa respon individual yang terpilih meliputi respon yang bagus dan yang biasa. Kemudian dibahas hasil wawancara terhadap respon tersebut. Berdasarkan data yang dibahas pada ketiga item soal kemudian ditarik seimpulan dan interpretasi.

Item test pertama yaitu tentang pembuktian subgroup, permasalahannya yaitu;

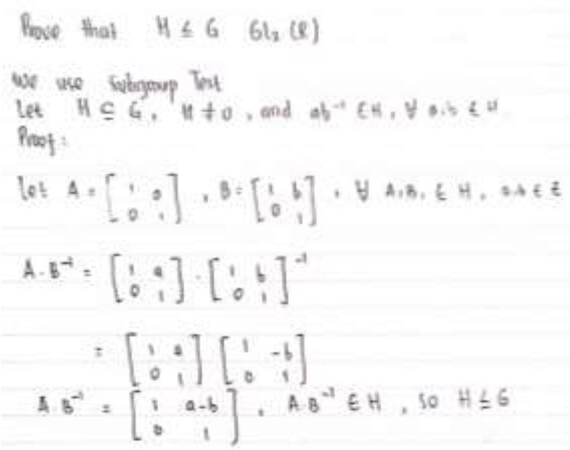
> Let $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| n \in Z \right\}$,
>
> Prove that $H \leq GL_2(R)$.

Pada permasalahan siswa diberikan suatu himpunan bagian dari $GL_2(\mathbb{R})$ dan kemudian diminta untuk membuktikan bahwa subhimpunan tersebut adalah suatu subgroup. Selanjutnya pada bagian b, mahasiswa diminta membuktikan bahwa subgrupnya adalah siklis.

Berdasarkan respon mahasiswa diperoleh bahwa 70,56% mahasiswa telah merespon jawaban soal pada item pertama ini dengan pilihan teknik dan Bahasa awal yang benar. Namun, untuk nilai akhir rata-rata skor mahasiswa untuk permasalahan ini yaitu 55. Dalam hal ini terlihat bahwasanya proses imitasi yang diharapkan telah berhasil dicapai dengan sangat baik untuk item pertama [20]. Untuk mengkaji secara lebih mendalam perhatikan individual respon dari beberapa mahasiswa berikut;



(a) Jawaban Mahasiswa Sampel 1



(b) Jawaban Mahasiswa Sampel 2

Gambar 1. Respon Mahasiswa terhadap Item Test 1

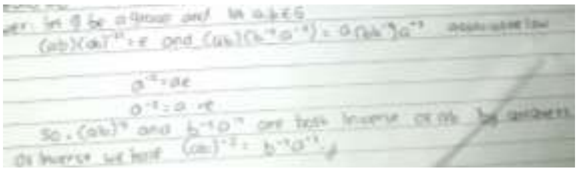
Pada respon pertama terlihat bahwa jawaban mahasiswa sudah mengarah ke pembuktian subgrup berhingga dalam pembuktian subrup. Artinya proses peniruan langkah telah terjadi, namun pemilihan teknik pembuktian kurang tepat karena subhimpunan yang diberikan merupakan himpunan tak berhingga. Selain itu, penulisan kalimat matematika yang digunakan mahasiswa sampel 1 memiliki banyak kekurangan seperti; penyajian himpunan, penulisan tanda sama dengan, dan struktur kalimat pembuktian. Dengan demikian proses penyusunan pembuktian dengan memperhatikan Bahasa soal dan Bahasa konsep yang digunakan telah terjadi proses peniruan oleh siswa ini. Sementara jawaban mahasiswa 2 pada gambar b, terlihat langkah peniruan Bahasa yang dibuatkan pada modul telah terjadi, namun mahasiswa ini gagal dalam menuliskan "let $A, B \in H$" kemudian diikuti dengan "$\forall A, B \in H$" hal ioni terjadi karena kapada modul dijelaskan bahwa jika kalimat pernyataan dimulai dengan "$\forall a$", maka pembuktiannya dimulai dengan "let a".

Item test kedua yaitu tentang penggunaan sifat elementer grup untuk membuktikan kekomutatifan suatu grup, permasalahannya yaitu

Prove that in a group G, G is abelian if and only if $(ab)^{-2} = b^{-2}a^{-2}, \forall a, b \in G$

Pada permasalahan mahasiswa diminta membuktikan bahwa suatu grup komutatif jika dan hanya jika suatu syarat tertentu diberikan, yaitu $(ab)^{-2} = b^{-2}a^{-2}, \forall a, b \in G$. Selain menuntut pemahaman konsep, permasalahan ini juga menuntut kemampuan pemecahan masalah, karena itu titik hal yang dikaji dalam permasalahan ini yaitu Bahasa mahasiswa dalam merespon permasalahan.

Berdasarkan respon mahasiswa diperoleh bahwa 63,88% mahasiswa berhasil merespon soal dengan Bahasa/ kalimat pernyataan yang tepat. Dan rata-rata skor mahasiswa untuk permasalahan ini yaitu 51 dengan menghitung nilai parsial. Pada soal ini, hanya 63,8% mahasiswa yang mampu mengimitasi langkah dasar/ kerangka Bahasa untuk menjawab soal ini, artinya pengimitasian langkah pembuktian untuk pernyataan majemuk biimplikasi masih dalam kategori baik. Untuk melihat detail berikut disajikan jawaban mahasiswa yang menggambarkan sebagian besar mahasiswa kelas sampel perhatikan dua respon mahasiswa berikut;



(a) Jawaban Mahasiswa Sampel 1

(b) Jawaban Mahasiswa Sampel 2

Gambar 2. Respon Mahasiswa terhadap Item Test 2

Berdasarkan kedua respon mahasiswa di atas terlihat bahwa mahasiswa sampel 3 berhasil memulai merespon soal dengan respon atau permulaan langkah yang tetap, namun mahasiswa tersebut gagal menggunakan teknik pembuktian untuk pernyataan biimplikasi dan memulai menggunakan fakta yang diberikan secara tidak tepat. Respon mahasiswa terhadap konsep sifat elementer grup yang diberikan belum menunjukan adanya pemahaman mahasiswa terhadap konsep tersebut. Mahasiswa ini berhasil meniru langkah awal saja dan sisanya tidak. Berbeda dengan mahasiswa sampel 3 mahasiswa siswa sampel 4 memberikan respon yang lebih baik yaitu berhasil menirukan semua langkah yang harus ditempuh untuk membuktikan pernyataan biimplikasi dan termasuk langkah awalnya. Akan tetapi respon mahasiswa dalam menggunakan unsur diketahui dan mengaitkannya dengan konsep-konsep sifat elementer grup sepenuhnya belum berhasil meskipun start awalnya sudah tepat. Ini menunjukan siswa belum berhasil memahami dualitas hubungan antara proses dan objek yang telah diatur untuk mengurangi abstraksi level [4].

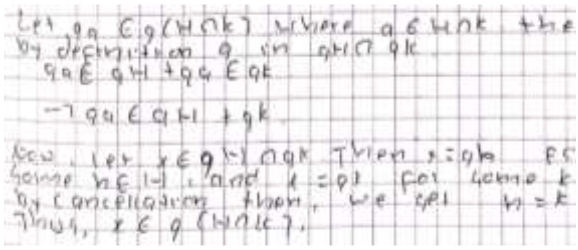
Terakhir item test ketiga yaitu tentang pembuktian koset irisan dua subgrup sama dengan koset masing-masing subgrup tersebut diiriskan, permasalahannya yaitu sebagai berikut;

If H and K are subgroup of G and $g \in G$, then prove that

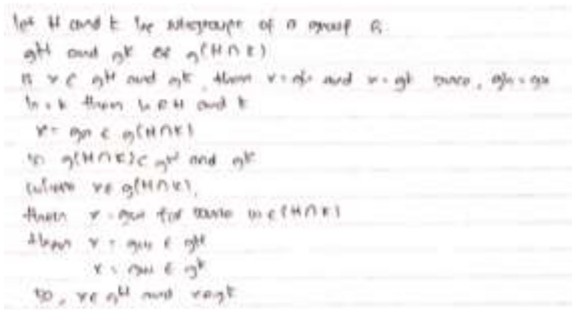
$$g(H \cap K) = gH \cap gK$$

where $g(H \cap K), gH, gK$ are cosets in G.

Berdasarkan respon mahasiswa diperoleh bahawa 86,11% mahasiswa berhasil merespon langkah awal dan pemilihan langkah pembuktian dengan benar. Hal ini dikarenakan pernyataan soal hanya berupa implikasi dan unsur yang diketahui jelas diberikan. Artinya untuk pernyataan matematika dengan struktur implikasi dan melibatkan kuantor telah berhasil diimitasi oleh mahasiswa, Namun rerata skor keseluruhan mahasiswa masih belum memuaskan yaitu 62. Hal ini tentunya masih dalam posisi cukup, dan sangat perlu ditingkatkan. Untuk mengkaji akar permasalahan mahasiswa berikut diberikan dua respon yang menggambarkan respon mahasiswa secara umum, yaitu;



(a) Jawaban Mahasiswa Sampel 1



(b) Jawaban Mahasiswa Sampel 2

Gambar 3. Respon Mahasiswa terhadap Item Test 3

Kedua respon mahasiswa menunjukan langkah dan struktur respon yang sudah tepat, namun kedua respon tersebut tidak sempurna jika kita tinjau dari aspek kedalaman konsep. Perhatikan jawaban kedua mahasiswa unsur jawaban "jika $a \in H \cap K$, maka $a \in H$ dan $a \in K$" kedua siswa tidak menulisnya. Namun demikian berbeda dengan respon mahasiswa pertama yang hanya salah disitu, pada respon mahasiswa pertama hanya strukturnya (pola menulis jawaban) saja yang benar. Berdasarkan hasil ini kemampuan mahasiswa dalam melakukan pembuktian setelah belajar melalui proses logika pembuktian pernyataan matematika, baru pada tahap meniru langkah-langkah pembuktian untuk struktur kalimat tertentu.

Berdasarkan respon mahasiswa terhadap tiga item permasalahan diperoleh data bahwasanya 73,52% mahasiswa berhasil memulai langkah Bahasa pembuktian dengan baik, namun rerata skor keseluruhan jawaban mahasiswa hanya 56. Untuk menggali penyebab/ rasional penilaian ini dilakukan wawancara terhadap mahasiswa sampel.

Berdasarkan hasil wawancara mahasiswa terungkap bahwa (1) mahasiswa telah mampu memulai informasi pernyataan mana yang dituliskan pada langkah pembuktian berdasarkan unsur diketahui, (2) mahasiswa telah mampu memahami memulai pembuktian untuk pernyataan berkuantor universal, dan impilikasi, (3) mahasiswa masih kesulitan untuk membedakan bukti tak langsung kontradiksi, kontraposisi, dan menemukan contoh penyangkal. Selain itu, (4) mahasiswa kesulitan dalam memilih konsep yang dibutuhkan dalam membantu proses pembuktian sehingga pemilihan informasi sering salah dan menyebabkan skor yang rendah.

Rendahnya kemampuan mahasiswa dalam pembuktian matematis disebabkan oleh rendahnya sikap positif mahasiswa terhadap permasalahan dan rendahnya pemahaman mahasiswa terhadap struktur kalimat pernyataan matematika serta cara meresponnya [18], [21], [22], [23]. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa permasalahan ini dapat diatasi dengan mengurangi level abstraksi soal, menyusun model yang valid, dan praktis serta peningkatan pemahaman mahasiswa terhadap struktur pernyataan matematika [3], [4], [16], [22], [23]. Berdasarkan modul yang disusun untuk penelitian ini dititik beratkan pada struktur pernyataan dan cara meresponnya. Hasil yang diperoleh menunjukan peningkatan dalam kemampuan mahasiswa dalam memulai respon, namun belum begitu baik dalam penyelesaian keseluruhan.

Dengan demikian, proses peniruan langkah kerja berdasarkan modul berbasis logika pembuktian telah berhasil dilakukan dan salah satu permasalahan mahasiswa dalam memulai langkah pembuktian [24] berhasil teratasi. Namun, masih perlu dilakukan peningkatan dalam level abstraksi, dan pemilihan konsep yang tepat untuk membantu langkah pembuktian.

KESIMPULAN

Berdasarka pembahasan yang di atas, penggunaan modul berbasis logika pembuktian telah mampu meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam memulai respon dan membuat struktur pembuktian dari suatu pernyataan yang berhubungan dengan grup. Namun, tingkat penyelesaian pembuktian pernyataan tersebut masih dalam kondisi cukup karena kemampuan mahasiswa dalam menghubungkan proses dan objek serta memilih konsep pembantu langkah pembuktian masih belum terbiasa.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan Terima kasih kami sampaikan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas Negeri Padang yang telah mendanai penelitian untuk menulis artikel ini melalui dana PNBP UNP 2018.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baylis J and Gallian J A, 1991 Contemporary Abstract Algebra *Math. Gaz.* **75**, 473 p. 374.

[2] Arnawa I M Yerizon Y and Nita S, 2019 Improvement Students' Level of Proof Ability in Abstract Algebra Trough APOS Theory Approach *Int. J. Sci. Technol. Res.* **8**, 7.

[3] Hazzan O, 2001 Reducing abstraction the case of constructing an operation table for a group *J. Math. Behav.* **20**, 2.

[4] Hazzan O, 1999 Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts *Educ. Stud. Math.* **40**, 1.

[5] Varankina V I Lubyagina E N Markov R V. Petrov A A and Shirokov D V., 2019 Computer visualization in the course "Abstract algebra" *Sci. Vis.* **11**, 5.

[6] Agustyaningrum N Hanggara Y Husna A Abadi A M and Mahmudii A, 2019 An analysis of students' mathematical reasoning ability on abstract algebra course *Int. J. Sci. Technol. Res.* **8**, 12.

[7] Hodiyanto H, 2017 Analisis Kesalahan Mahasiswa Semester V dalam Mengerjakan Soal Pengantar Analisis Real *Edu Sains J. Pendidik. Sains Mat.* **5**, 1.

[8] Weber K, 2001 Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge *Educ. Stud. Math.*

[9] Powers R A Craviotto C and Grassl R M, 2010 Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*

[10] Kanellos I Nardi E and Biza I, 2018 Proof schemes combined: mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof *Math. Think. Learn.*

[11] 1996 An accompaniment to higher mathematics *Choice Rev. Online* **34**, 01.

[12] Faizah S Nusantara T Sudirman S and Rahardi R, 2020 Exploring students' thinking process in mathematical proof of abstract algebra based on Mason's framework *J. Educ. Gift. Young Sci.* **8**, 2.

[13] Stylianides G J and Stylianides A J, 2008 Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning *Math. Think. Learn.*

[14] Solomon Y, 2006 Deficit or difference? the role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof *Educ. Stud. Math.*

[15] Sugilar H, 2017 DAYA MATEMATIS MAHASISWA PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA *JNPM (Jurnal Nas. Pendidik. Mat.*

[16] Syamsuri S Purwanto P Subanji S and Irawati S, 2017 Using APOS Theory Framework: Why Did Students Unable To Construct a Formal Proof? *Int. J. Emerg. Math. Educ.*

[17] Syafri F S, 2017 Kemampuan Representasi Matematis dan Kemampuan Pembuktian Matematika *J. Pendidik. Mat.*

[18] Lestari K E, 2015 Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif Pada Mata Kuliah Analisis Real *MENDIDIK J. Kaji. Pendidik. dan Pengajaran*.

[19] Hodiyanto H and Susiaty U D, 2018 PENINGKATAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MELALUI MODEL PEMBELAJARAN PROBLEM POSING *MaPan*.

[20] Dubinsky E Dautermann J Leron U and Zazkis R, 1994 On learning fundamental concepts of group theory *Educ. Stud. Math.*

[21] Irwansyah B, 2014 MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN TEOREMA DAN SIKAP POSITIF MAHASISWA MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA REALISTIK PADA MATA KULIAH ANALISIS REAL *Tarbawi*.

[22] Angraini L M Sundawan M D and Noto M S, 2019 Analisis Proses Berpikir Menyusun Bukti Matematis Mahasiswa Calon Guru Pada Mata Kuliah Struktur Aljabar *Euclid*.

[23] Fadillah S and Jamilah J, 2016 PENGEMBANGAN BAHAN AJAR STRUKTUR ALJABAR UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIS MAHASISWA *J. Cakrawala Pendidik.*

[24] Agustyaningrum N Abadi A M Sari R N and Mahmudi A, 2018 An Analysis of Students' Error in Solving Abstract Algebra Tasks *J. Phys. Conf. Ser.* **1097**, 1.