UNPjoMath Vol. 3 No. 1 Maret 2020
ISSN: 977 235516589 Page 64-69

# Determinan Matriks Persegi Panjang

Ryan Eka Putra[#1], Yusmet Rizal[*2]

[#]*Student of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia*
[#]*Lecturer of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia*
[1]ryanekaputra26@gmail.com
[3]yusmet_abdurrahman@yahoo.co.id

***Abstract* —**One study in matrix theory is determinant. Matrix determinants are usually used to find the inverse of a matrix, to solve a system of linear equations, and determine the characteristic equations of a problem in determining eigenvalues. The concept that developed so far is to determine the determinant of the matrix only focused on a square matrix. The next problem is what if the matrix is not a square matrix. However ,there is a method developed by Radic to find the determinant value of a rectangular matrix. This research is a theoretical research with literature study. The purpose of this research is to determine the concept of determinant rectangular matrix. The concept that will be discussed in this research is how to calculate the determinants of a rectangular matrix and how the properties of a rectangular matrix determinant. The results of determinant rectangular matrix is an extension of the definition of the determinant which shows the series of determinants of sub matrix for a square matrix.

***Keywords*** — Determinant, Matrix, Radic Method.

***Abstrak* —** Salah satu kajian dalam teori matriks adalah determinan. Determinan matriks biasanya digunakan mencari invers dari suatu matriks,untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, dan menentukan persamaan karakteristik dalam menentukan nilai eigen. Konsep yang berkembang selama ini adalah menentukan determinan matriks hanya terfokus terhadap matriks persegi. Permasalahan selanjutnya bagaimana jika matriks tersebut bukan matriks persegi. Ternyata terdapat sebuah metode yang dikembangkan oleh Radic untuk mencari nilai determinan matriks persegi panjang. Penelitian ini merupakan penelitian teoritis melaui studi kepustakaan. Tujuan dari penelitian untuk mengehatui bagaimana konsep dari determinan matriks persegi panjang. Konsep yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu cara menghitung determinan matriks persegi panjang dan bagaimana sifat-sifat dari determinan matriks persegi panjang. Hasil dari perhitungan matriks persegi panjang yang didapat merupakan perluasan dari definisi rekrusif determinan yang memperlihatkan deret determinan sub matriks yang berbentuk matriks persegi beserta sifat-sifatnya.

***Kata kunci*** —Determinan, Matriks**,** Metode Radic.

## PENDAHULUAN

Salah satu kajian dasar dalam mempelajari ilmu matematika mengenai aljabar adalah matriks. Matriks merupakan jajaran persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks [1]. Matriks sangat berperan penting dan sering digunakan dalam aplikasi matematika. Diantaranya penggunaan matriks dalam berbagai bidang antara lain persamaan sistem linear, statistik, metode numerik, persamaan differensial dan lain-lain.

Salah satu perhitungan matriks yang sering digunakan sebagai permasalahannya yaitu yang harus dicari nilainya adalah determinan. Determinan dapat digunakan untuk mencari invers matriks, menyelesaikan persamaan sistem linear, dan mencari persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen.

Konsep yang berkembang selama ini adalah menentukan determinan matriks hanya terfokus terhadap matriks persegi. Permasalahan selanjutnya adalah bagaimana menghitung determinan dari matriks persegi panjang. Nilai determinan dari matriks persegi panjang juga dapat ditentukan. Hal tersebut dapat dilihat pada penelitian Mirco Radic pada tahun 2005 dengan judul "*About a Determinant of Rectangular $2Xn$ Matrix and its Geometric Interpretation*", yang membahas tentang determinan Radic untuk matriks tidak bujur sangkar khusus untuk matriks ordo $2Xn$ [2].

Micro radic mendefinisikan perhitungan determinan persegi panjang sebagai penjumlahan partisi dari sub matriks persegi yang didefinisikan sebagai berikut .Jika $A$

adalah matriks $m \times n$ dengan kolom $[A_{j1}, A_{j2}, \cdots, A_{j3}]$ dan $m \leq n$ , maka determinan dari matriks $A$

$$|A| = \sum_{1<j_1<j_2<\cdots j_m \leq n} (-1)^{r+s} \left| A_{j1}\, A_{j2}\, \cdots\, A_{jm} \right| \quad (1)$$

$r = 1 + 2 + 3 + \cdots + m$
$s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$. [2]

Pada prinsipnya rumusan ini merupakan perluasan dari definisi rekrusif determinan yang memperlihatkan deret determinan sub matriks yang berbentuk matriks persegi. Berdasarkan permasalahn di atas, penelitian ini bertujuan untuk memaparkan tentang konsep determinan dari suatu matriks persegi panjang.

## METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar. Adapun metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang mendukung dengan permasalahan tentang konsep matriks tak persegi dengan berlandaskan pada kajian kepustakaan. Langkah kerja yang dilakukan adalah meninjau pemasalahan yang dihadapi, kemudian.

Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan adalah:

1. Mengekspansi matriks persegi panjang menjadi sub-sub matriks persegi berdasarkan urutannya;
2. Menentukan indeks dari setiap sub matriks persegi;
3. Menghitung nilai determinan setiap sub matriks persegi
4. Menjumlahkan semua nilai determinan dari sub matriks persegi;
5. Menentukan sifat-sifat dari determinan matriks persegi panjang dan teorema-teorema yang berlaku;

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### A. *Menghitung Determinan Matriks Tak Persegi*

Pandang sebuah matriks persegi panjang $A$ berukuran $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sesuai dengan ekpansi kofaktor, menentukan determinan dari matriks $A$ adalah menjumlahkan hasil perkalian entri-entri sembarang baris dengan kofaktornya yaitu

$$(-1)^{i+j}\, a_{ij} M_{ij} \quad (2)$$

Kofaktor pada (1) merupakan matriks persegi panjang. Maka, untuk mencari nilai determinannya akan di bentuk partisi-partisi matriks persegi berukuran $m \times m$, sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ij_1} & \cdots & a_{ij_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai deterimannya diperlukan aturan partisi antar kolom dan tanda dari setiap sub matriks persegi, dimana nilai pada tanda + atau 0 dari setiap determinan sub matriksnya ditentukan oleh penjumlahan darikolom yang di ikut sertakan dalam partisinya

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+(j_1+\cdots+j_m)} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ij_1} & \cdots & a_{ij_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Dari definisi Radic iniakan ditunjukan bahwa definisi determinan matriks persegi panjang merupakan perluasan dari ekspansi kofaktor, misalkan

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+(j_1+\cdots+j_m)} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ij_1} & \cdots & a_{ij_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix}$$

merupakan anggota dari penjumlahan dari (1), maka

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+(j_1+\cdots+j_m)}(-1)^{i+1} a_{1j_1} \begin{vmatrix} a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix}$$

merupakan anggota dalam ekspansi kofaktor dari (2).

$$(-1)^{i+j_1} a_{ij_1} M_{ij_1}$$

dimana $M_{ij_1}$ merupakan minor dari elemen $a_{ij_1}$ yang merupakan determinan dari matriks berukuran $(m-1) \times (n-1)$ yang mana diperoleh dari menghapusan baris $i$ dan kolom $j_1$. Diantara anggota $M_{ij_1}$terdapat

$$(-1)^{(1+\cdots+(m-1))+(j_2+\cdots+j_m-(m-1))} \begin{vmatrix} a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix}$$

Dari persamaan tersebut kita notasikan $r = 1 + \cdots + (m-1)$ , $s = j_2 + \cdots + j_m - (m-1)$ yang merupakan urutan kolom setiap elemen $a_{ij_2}, \dots, a_{ij_m}$ pada $M_{ij_1}$ . perhatikan bahwa

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+(j_1+\cdots+j_m)}(-1)^{i+1}$$
$$= (-1)^{(1+\cdots+(m-1))+(j_2+\cdots+j_m)-(m-1)}(-1)^{i+j_1}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama, anggota

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+(j_1+\cdots+j_m)}(-1)^{i+2} a_{1j_2} \begin{vmatrix} a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix}$$

pada persamaan (2) berkorespondensi dengan

$$(-1)^{i+j_2}\, a_{ij_2} M_{ij_2}$$

$$(-1)^{(1+\cdots+(m-1))+(j_1+\cdots+j_m-(m-2)}(-1)^{i+j_2}a_{1j_2}\begin{vmatrix} a_{1j_2} & a_{1j_3} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj_2} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m}\end{vmatrix}$$

dan seterusnya sehingga

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+(j_1+\cdots+j_m)}(-1)^{i+k}$$
$$= (-1)^{(1+\cdots+(m-1))+(j_1+\cdots+j_{k-1}+j_{k+1}+\cdots+j_m-(m-k)}(-1)^{i+j_k}$$

memiliki indeks yang sama antara defînsi radic dengan ekspansi kofaktor.

Selanjunya , dalam perhitungan determinan tersebut terdapat sebanyak $\binom{n}{m}$ matriks persegi dan dengan mengembangkan ini didapatkan $\binom{n}{m}m!$ anggota dari bentuk $a_{ij_1}\ldots a_{mj_m}$ dan jumlah yang di bentuk dari ekspansi kofaktor adalah $n\binom{n-1}{m-1}(m-1)!$ anggota dari bentuk $a_{ij_1}\ldots a_{mj_m}$. Yang berarti jumlah sub matriks yang diperoleh dari definisi radic sama dengan jumlah sub matriks menggunakan ekspansi kofaktor

Untuk lebih memahami definisi radic, berikut diberikan contoh menghitung determinan tak persegi:

Hitunglah determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan definisi (1) diperoleh

$$|A| = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -14 - 22 + (-20) - (-37)$$
$$= -19$$

Definisi determinan radic selain menghitung determinan matriks tak persegi, definisi ini juag bisa digunakan pada matriks persegi, misalkan matriks $A$ berkurukan $m \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

menurut definisi radic

$$|A| = (-1)^{(1+2+3\ldots+m)+(1+2+3+\cdots+m)}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$
$$= \det A$$

Maka terbukti definisi dari determian radic juga dapat menghitung nilai dari determinan matriks persegi, dimana hasil dari sub matriksnya merupakan matriks persegi itu sendiri.

B. *Sifat Determinan Matriks Persegi Panjang*

Pada bagian ini akan ditentukan beberapa sifat-sifat determinan matriks persegi panjang yang berlaku maupun yang tidak berlaku pada matriks persegi panjang dan sifat-sifat khusus yang dimilik determinan matriks persegi panjang.

Beberapa sifat yang berlaku pada determinan matriks persegi panjang, tidak semuanya berlaku pada matriks persegi panjang. Misalkan $A$ matriks berukuran $m \times n$ dengan $m < n$, sehingga $A^T$ berukuran $n \times m$. Akibatnya $\det A^T$ tidak terdefinisi, dikarenakan pada definisi radic hanya terdefinisi pada banyak baris kecil atau sama dengan banyak kolomnya, jadi sifat $\det A^T = \det A$ tidak berlaku pada matriks persegi panjang.

Selanjutnya pada perkalian matriks persegi, matriks $AB$ terdefinisi dalam satu kasus yaitu jika matriks $A$ dan $B$ berukuran sama, maka sifat $det(AB) = det(A)det(B)$. Berbeda dengan determinan matriks persegi panjang, secara umum jika AB terdefinisi, tidak berlaku $det(AB) = det(A)det(B)$.

Sifat-sifar determinan persegi panjang yang berlaku:

*1) Misalkan $A'$ matriks yang dihasilkan dari satu baris tunggal $A$ dikalikan oleh skalar $k$, maka $det(A') = k\, det(A)$.*

Bukti:
Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dikalikan sebaris A dengan k diperoleh matriks baru

$$A' = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan menggunkan definisi radic, maka

$$|A'| = (-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots m)} \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} \begin{vmatrix} ka_{1(n-m+1)} & ka_{1(n-m+2)} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{2(n-m+1)} & a_{2(n-m+2)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

sub-sub matriks yang diperoleh adalah matriks persegi, maka sifat $det(A') = k\ det(A)$ dapat digunakan

$$= (-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots m)} k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} k \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+2)} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{2(n-m+1)} & a_{2(n-m+2)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= k((-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+2)} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{2(n-m+1)} & a_{2(n-m+2)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= k\ (\det A)$$

2) $det(kA) = k^m det(A)$

Bukti

$A$ matriks berukuran $m \times n$ dengan $m \leq n$

$$|kA| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mm} \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan definisi 1

$$= (-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots m)} \begin{vmatrix} ka_{1j_1} & \dots & ka_{1j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{mj_1} & \dots & ka_{mjm} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots m)} \begin{vmatrix} ka_{1j_{(n-m+1)}} & \dots & ka_{1j_{(n-m+1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{mj_{(n-m+1)}} & \dots & ka_{mj_{(n-m+1)}} \end{vmatrix}$$

ekspansi menghasilkan sub matriks yang berbentuk persegi dengan ordo $m \times m$, diamna pada sifat determina matriks persegi $det(kA) = k^n det(A)$ sudah terbukti, maka

$$= (-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots m)} k^m \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \dots & a_{1j_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & \dots & a_{mjm} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots m)} k^m \begin{vmatrix} a_{1j_{(n-m+1)}} & \dots & a_{1j_{(n-m+1)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_{(n-m+1)}} & \dots & a_{mj_{(n-m+1)}} \end{vmatrix}$$

$$= k^m \det A$$

*3) Misalkan $A'$ matriks yang dihasilkan bila dua baris $A$ dipertukarkan, maka $det(A') = -det(A)$.*

Bukti

Misalkan matriks $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$ dan

$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$,

dengan menggunakan definisi radic

$$|A'| = (-1)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots m)} \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1} & a_{1(n-m+2)} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j(n-m+1)} & a_{j(n-m+2)} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

sub-sub matriks yang diperoleh adalah matriks persegi, maka sifat $det(A') = -det(A)$. dapat digunakan. Jadi terbukti $det(A') = -det(A)$ juga berlaku pada matriks persegi panjang.

*4) Misalkan suatu baris matriks $A$ identik pada baris yang lain atau merupakan kombinasi linear baris lain maka $|A| = 0$.*

Bukti

Misalkan matriks

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Jika baris ke $i$ dan baris ke $j$ identik, maka $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} = a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$, sehingga untuk matriks tak persegi dengan $m \leq n$ menjadi

$$|A| = (-1)^{(1+2+\dots+m)+(1+2+\dots m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{(1+\dots+m)+((n-m+1)+\dots m)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1(n-m+1} & a_{1(n-m+2)} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

sub matrik yang diperoleh merupakan matriks persegi, selanjutnya dilakukan reduksi baris pada matris tersebut

$$|A| = (-1)^{(1+2+\dots+m)+(1+2+\dots m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{(1+\dots+m)+((n-m+1)+\dots m)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1(n-m+1} & a_{1(n-m+2)} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

pada matriks persegi tersebut dilakukan kofaktor sepanjang baris 0, maka akan menghasilkan determinan bernilai 0.

Berikut bebrapa sifat khusus yang terdapat pada matriks persegi panjang, yang merupakan representasi dari penjumlahan determinan matriks persegi

1) Misalkan $[A_1 \dots A_n]$ matriks $2 \times n$ dengan $n \geq 2$Maka
$$|A_1\ A_2 \dots A_n| = |A_1\ \ A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| + |A_2\ \ A_3 - A_4 + A_5 + \cdots + (-1)^{n-1} A_n| + \dots + |A_{n-1}, A_n|$$

Bukti

Misalkan

$$|A_1\ A_2\ A_3 \dots\ A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan defisini 1, diperoleh

$$\begin{aligned} |A_1, A_2, A_3 \dots, A_n| &= (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{(1+2)+(1+n)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} + \\ &\quad (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{(1+2)+(2+n)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1n} \\ a_{22} & a_{2n} \end{vmatrix} + \dots + \\ &\quad (-1)^{(1+2)+((n-1)+n)} \begin{vmatrix} a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{2(n-1)} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ &= |A_1, A_2| - |A_1, A_3| + |A_1, A_4| + \cdots + (-1)^n |A_1, A_n| + |A_2, A_3| - |A_2, A_4| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_2, A_n| + \cdots + |A_{n-1}, A_n| \end{aligned}$$

sehingga terbukti

$$|A_1\ A_2 \dots A_n| = |A_1\ \ A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + \cdots + (-1)^n A_n| + |A_2\ \ A_3 - A_4 + A_5 + \cdots + (-1)^{n-1} A_n| + \cdots + |A_{n-1}, A_n|$$

2) Misalkan $[A_1\ A_2 \dots\ A_n]$ matriks $m \times n$ dimana $m \leq n$, maka
$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{m-1} < n} (-1)^{r+j_1+j_2+\dots+j_{m-1}} \times \left| A_{j_1}\ \ A_{j_2}\ \dots\ A_{j_{m-1}} \sum_{k=j_{m-1}+1}^{n} (-1)^k A_k \right|$$

Bukti

dengan menggunakan definisi 1

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{1<j_1<j_2<\dots j_m \leq n} (-1)^{r+s} |A_{j1}\ \ A_{j2}\ \ \cdots\ \ A_{jm}| \\ &= \sum_{1<j_1<j_2<\dots j_{m-1} \leq n} \sum_{k=j_{m-1}+1}^{n} (-1)^{r+j_1+j_2+\dots+j_{m-1}+k} \times |A_{j_1}\ A_{j_2}\ \dots, A_{j_{m-1}}\ A_k| \\ &= \sum_{1<j_1<j_2<\dots j_m \leq n} (-1)^{r+j_1+j_2+\dots+j_{m-1}} \times \left| A_{j_1}\ \ A_{j_2}\ \dots\ A_{j_{m-1}}, \sum_{k=j_{m-1}+1}^{n} (-1)^k A_k \right| \end{aligned}$$

dengan dimana $r = 1 + 2 + 3 + \dots + m$.

Untuk memaham teorema-teorema diatas diberikan contoh sebagai berikut

$M = [M_1\ \ M_2\ \ M_3\ \ M_4]$ matriks persegi panang berukura $3 \times 4$, maka

$$|M| = |M_1\ \ M_2\ \ M_3 - M_4| + |M_1\ \ M_3\ \ M_4| - |M_2\ \ M_3\ \ M_4|$$

3) Misalkan $[A_1, A_2 \dots, A_n]$ matriks $m \times n$ dimana $m \le n$, maka

$$|A| = \sum_{1<j_2<\cdots<j_{m-1}<n} (-1)^{r+j_2+j_2+\cdots+j_m} \times \left| \sum_{k=1}^{j2-1} (-1)^k A_k\ \ A_{j_1}\ \ A_{j_2}\ \dots\ A_{j_m} \right|$$

Bukti

Misalkan $[A_1, A_2 \dots, A_n]$ matriks $m \times n$ dimana $m \le n$, maka

dengan menggunakan definisi 1

$$|A| = \sum_{1<j_1<j_2<\cdots j_m \le n} (-1)^{r+s} |A_{j1}\ \ A_{j2}\ \ \cdots\ \ A_{jm}|$$

$$= \sum_{1<j_2<\cdots j_m \le n} \sum_{k=1}^{j_2-1} (-1)^{r+k+j_2+\cdots+j_m} \times |A_k\ \ A_{j_2}\ \ \dots A_{j_m}|$$

$$\sum_{1<j_2<\cdots j_m \le n} (-1)^{r+j_2+\cdots+j_m} \times \left| \sum_{k=1}^{j2-1} (-1)^k A_k\ \ \ A_{j_2}\ \ \dots\ \ A_{j_m} \right|$$

dimana $r = 1 + 2 + \cdots + m$

Contoh

$N = [N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4]$ matriks persegi panang berukura $3 \times 4$, maka

$$|N| = |N_1\ \ N_2\ \ N_3| - |N_1\ \ N_2\ \ N_4| + |N_1 - N_2\ \ N_3\ \ N_4|$$

4) Misalkan $[A_1, A_2 \dots, A_n]$ matriks $m \times n$ dimana $m \le n$. Kemudian untuk setiap $p \in \{2, 3, \dots, m-1\}$, maka

$$|A| = \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_{p-1} \\ j_{p+1} < \cdots < j_m \le n \\ j_{p+1} - j_{p-1} > 1}} (-1)^{r+j_1+j_2+\cdots+j_{p-1}+j_{p+1}+\cdots+j_m} \left| A_{j_1} \dots, A_{j_{p-1}}, \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_{p+1}-1} (-1)^k A_k\ \ A_{j_{p+1}}\ \dots\ A_{j_m} \right|$$

Bukti

dengan menggunakan definisi 2

$$|A| = \sum_{1<j_1<j_2<\cdots j_m \le n} (-1)^{r+s} |A_{j1}\ A_{j2}\ \cdots\ A_{jm}|$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_{p-1} \\ j_{p+1} < \cdots < j_m \le n \\ j_{p+1} - j_{p-1} > 1}} \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_{p+1}-1} (-1)^{r+j_1+j_2+\cdots+j_{p-1}+k+j_{p+1}+\cdots+j_m} \times |A_{j_1} \dots A_{j_{p-1}}\ A_k\ A_{j_{p+1}}\ \dots\ A_{j_m}|$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_{p-1} \\ j_{p+1} < \cdots < j_m \le n \\ j_{p+1} - j_{p-1} > 1}} (-1)^{r+j_1+j_2+\cdots+j_{p-1}+j_{p+1}+\cdots+j_m} \times \left| A_{j_1} \dots A_{j_{p-1}} \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_{p+1}-1} (-1)^k A_k\ \ \ A_{j_{p+1}}\ \dots\ A_{j_m} \right|$$

Contoh

$P = [P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ P_4]$ matriks persegi panang berukura $3 \times 4$, maka

$$|P| = |M_1\ \ M_2\ \ M_3| - |M_1\ \ M_2 - M_3\ \ M_4| - |M_2\ \ M_3\ \ M_4|$$

## SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, dipeoleh:

1) Determinan matriks persegi panjang dapat dihitung menggunkan definisi radic yang merupakan perluasan definisi rekrusif determian yang memperlihatkan deret sub matriks persegi;
2) Sifat-sifatkhusus yang berlaku pada matriks persegi panjang merupakan representasi dari penjumlahan determinan matriks persegi.

## REFERENSI

[1] Anton, H., dan Rorres, C,. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*. Edisi kedelapan, Erlangga, Jakarta, 2004.

[2] Radic, M., About a Determinant of Rectangular $2 \times n$ Matrix and its Geometric Interpretation, *Beitrage zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Gometry*. Vol. 46. No. 1. 2005.

[3] Makarewicz, A., and Dominic, S., Properties of the Determinant of a Recatangular m Matrix, Mathematics Subject Classification, Vol. LXVIII, No.1. 2014.

[4] Amiri, A., Mahmood, F., and Morteza, B., Generalization of Some Determinan Identities for Non-Square Matricies Based on Radic's Definition, *Journal Pure Application Mathematics*, 1(2), 2010.

[5] Stanimirovic, Predrag & Stankovic, Miomir. *Determinant of Rectangularmatricies and moore-pensore inverse. Novi sad J. Math*. Vol.27 No.1 .1997.