

## Model Matematika Efek Perpindahan Polutan Pada Kolam Pertama Ke Kolam Kedua Dipengaruhi Adveksi Dan Dispersi

Alya Anzira<sup>#1</sup>, Defri Ahmad<sup>\*2</sup>

<sup>#</sup>*Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*

<sup>\*</sup>*Lecturer of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*

<sup>1</sup>alyaanzira@gmail.com

<sup>2</sup>defriahmad88@gmail.com

**Abstract** —Pollution in the aquaculture environment can come from inedible food and not eaten by fish. In a variety of fish culture business basin become the choice for entrepreneurs, fish entrepreneurs have many basins for fish farming. Concentration of pollutants in the basin will decrease when the first basin is entering clean water, so pollutants will come out of the basin. Based on the results of research into the mathematical model of water pollution in the form of a partial differential equation system.

**Keywords** — Mathematical Model, Water Pollution, n Basin.

**Abstrak**—Pencemaran pada lingkungan budidaya dapat berasal dari pakan termakan dan tidak termakan oleh ikan. Dalam berbagai usaha budidaya ikan bak menjadi pilihan bagi para pengusaha, para pengusaha ikan memiliki banyak bak untuk budidaya ikan. Konsentrasi polutan dalam bak akan menurun saat bak pertama dimasukkan air bersih, sehingga polutan akan keluar dari bak. Berdasarkan hasil penelitian model matematika pencemaran air pada n bak ini berbentuk sistem persamaan diferensial parsial.

**Kata kunci**—Model Matematika, Pencemaran Air, n Bak.

### PENDAHULUAN

Pencemaran air adalah suatu proses masuk atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi dan atau komponen lain ke dalam air yang disebabkan oleh kegiatan manusia sehingga kualitas menurun hingga ke tingkat tertentu hingga air tidak berfungsi lagi sesuai dengan kegunaannya [1]. Akibat terjadi pencemaran, air tidak bisa digunakan agar kebutuhan makhluk hidup bisa terpenuhi. Pencemaran air atau polusi air adalah terjadinya perubahan keadaan di tempat penampungan air, contohnya, danau, sungai, lautan serta air tanah yang disebabkan oleh kegiatan manusia [2].

Air menjadi aspek paling penting yang dapat menunjang berjalannya usaha. Contohnya usaha para petani yang membudidayakan ikan. Di zaman sekarang sudah banyak para petani yang membudidayakan ikan bukan pada kolam tanah lagi, tapi banyak dari mereka sudah membudidayakan ikan dengan menggunakan bak-bak semen ataupun bak-bak plastik fiberglass. Biasanya bak-bak ini berbentuk persegi dan persegi panjang.

Bahan fiber glass adalah bahan yang digunakan untuk bak yang digunakan di laboratorium penelitian dan para pengusaha usaha besar atau kecil. Alasan penggunaan bak dari bahan fiber glass yaitu karena sangat bagus untuk pembudidayaan ikan hias, selain kuat, awet, juga suhu air dalam bak pada umumnya relatif stabil. Dengan demikian kelebihan ini dapat mendukung

kelangsungan hidup ikan yang dipeliharanya. Cara pembuatan bak fiber glass ialah dengan cara dipesan dari pabriknya. Kelebihan lainnya, bak ini tahan lama dan tidak mudah pecah serta cukup ringan. [3].

Sisa pakan yang tidak termakan merupakan bahan organik yang dapat mengakibatkan bau busuk dalam bak. [4]. Kondisi air yang tinggi kadar amonia membuat air menjadi berbau dan mengganggu pertumbuhan ikan. Pencemaran lingkungan budidaya dapat disebabkan oleh pakan yang termakan dan tidak termakan oleh ikan. Pemberian pakan yang tidak tepat mengakibatkan menumpuknya sisa pakan di dalam air. Keadaan ini akan mempengaruhi kualitas air, organisme akuatik dan lingkungan sekitarnya. Akibatnya kadar polutan di dalam bak akan meningkat dan dapat menyebabkan keracunan atau kekurangan oksigen serta mempercepat berkembangnya bibit penyakit.

Kualitas air yang terdapat pada bak-bak ikan perlu diperhatikan agar budidaya ikan tersebut berhasil. Pergantian air adalah cara umum untuk menjaga kualitas air, terutama pada wadah pemeliharaan yang tidak mendapat pasokan air secara terus menerus, kolam beton, drum dan toren adalah wadah budidaya yang sering dikelola tanpa pasokan air secara terus menerus [5]. Karena itu, untuk menjaga kualitas air maka dilakukan pergantian air. Pergantian air dilakukan jika kualitas air didalam wadah pemeliharaan sangat buruk. Untuk mengatasi pencemaran pada bak terdapat kran air yang

berfungsi untuk mengalirkan air bersih ke dalam bak. Pada salah satu sisi bak terdapat semacam lubang atau pipa sebagai tempat keluarnya air dari bak. Jika air yang ada di bak telah tercemar karena banyak polutan maka perlu untuk membersihkan air yang telah mengandung polutan itu dengan cara mengalirkan air bersih ke dalam bak.

Pergerakan angkutan materi di dalam air terjadi saat bak dialiri air. Ada banyak tipe gerak angkutan materi air didalam air alami. Energi angin dan gaya berat memberi gerakan pada air yang berujung pada proses transport masa, yaitu adveksi dan dispersi. Adveksi dihasilkan oleh aliran yang bersifat *unidirectional* dan tak mengubah identitas dari substansi yang sedang mengalir atau dipindahkan. Dispersi merupakan salah satu mekanisme yang dapat menyebabkan polutan atau suatu materi tertentu menyebar didalam air. Dispersi merupakan produk dari terbentuknya perbedaan kecepatan dalam dimensi ruang.

Konsentrasi polutan yang terdapat di air pada saat waktu tertentu, dapat kita modelkan ke dalam model matematika. Disini perhatikan bahwa kita memiliki banyak bak atau  $n$ -bak yang saling terhubung, maksud terhubung disini adalah pipa pembuangan dari bak ke-1 menjadi sumber air yang masuk pada bak ke-2, begitu seterusnya hingga bak ke- $n$  mengeluarkan air yg mengandung polutan ke luar dari bak. Sehingga saat kita mengalirkan air bersih selama waktu  $t$  kita dapat menentukan konsentrasi polutan yang terdapat pada masing-masing bak hingga bak yang terakhir. Sistem Pengairan dikolam adalah: jika ada tiga kolam, maka pintu pengeluaran air kolam I menjadi pintu pemasukan air ke kolam II, dan pintu pengeluaran air kolom II menjadi pintu pemasukan air ke kolam III dan seterusnya [6].

Model matematika ini diharapkan dapat membantu dalam proses pergantian air di dalam bak yang sudah tercemar dengan waktu yang lebih efisien. Jika bak pertama dialiri air bersih maka akan keluar polutan dari bak 1 ke bak selanjutnya. Sehingga pada saat waktu tertentu dapat ditentukan berapa konsentrasi polutan pada masing-masing bak yang terhubung.

#### METODE

Berdasarkan teori yang relevan sesuai studi kepustakaan, proses pembentukan model dapat dilakukan dengan mempelajari fenomena dari permasalahan pencemaran air. Pada saat dimasukkan air bersih ke dalam bak akan terjadi pergerakan polutan di dalam air. Kemudian dapat ditentukan faktor untuk menentukan asumsi-asumsi, variabel, dan parameter yang akan digunakan dalam model matematika pencemaran air pada  $n$ -bak. Dari asumsi, variabel dan parameter dapat dibentuk model matematika pencemaran air pada  $n$  bak. Setelah model dibentuk interpretasikan model matematika pencemaran air pada  $n$  bak. Berdasarkan interpretasi dari model, maka diperoleh kesimpulan dari model pencemaran air pada  $n$  bak.

#### HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah-langkah dalam pembentukan model matematika pencemaran air pada  $n$  bak yaitu asumsi yang digunakan dalam model, yang kedua pembentukan model berdasarkan asumsi, variabel dan parameter yang di tetapkan, kemudian pada tahap terakhir adalah pembahasan tentang interpretasi dari model matematika pencemaran air pada  $n$  bak.

##### A. Asumsi

Asumsi yang dipakai adalah sebagai berikut:

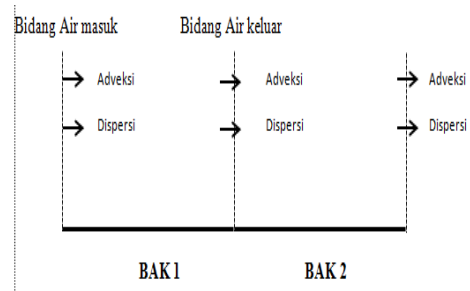
1. Konsentrasi polutan keluar dipengaruhi oleh adveksi dan dispersi
2. Polutan tersebar secara merata di dalam bak
3. Polutan di dalam bak merupakan padatan terlarut
4. Pada bak 1 masuk air bersih tanpa polutan
5. Debit air yang masuk sama besarnya dengan debit air yang keluar
6. Volume setiap bak sama
7. Konsentrasi air yang tercemar setiap bak sama
8. Tidak terdapat sumber air lain serta tidak terjadi penguapan dan pengendapan
9. Aliran di dalam bak merupakan aliran tak termampatkan

##### B. Pembentukan Model Matematika Pencemaran Air Pada $n$ Bak

Berdasarkan tahap-tahap dalam membangun sebuah model matematika, tahap pertama yang dilakukan adalah mengidentifikasi masalah yang diperoleh dari berbagai pertanyaan yang berhubungan dengan masalah tersebut. Tahapan ini dilakukan dengan menentukan faktor-faktor yang dianggap penting atau sesuai dengan permasalahan yang meliputi identifikasi variabel, parameter, dan membentuk hubungan antara variabel dan parameter tersebut

Variabel yang digunakan untuk membentuk model matematika pencemaran air pada  $n$  bak adalah  $U$  yaitu konsentrasi polutan yang terdapat di dalam bak. dan parameter yang digunakan adalah  $v$  yaitu kecepatan aliran air, serta terdapat koefisien  $D$  yaitu koefisien dispersi.

Berdasarkan asumsi yang diberikan, maka dapat disusun diagram pencemaran air pada  $n$  bak sebagai berikut:



Gambar. 1 Model pencemaran air pada bak

Berdasarkan diagram di atas, maka proses pembentukan model matematika pencemaran air pada bak adalah sebagai berikut :

1. Konsentrasi polutan pada bak 1
  - a. Perubahan massa polutan selama waktu  $\Delta t$

Konsentrasi polutan  $U = U(x, y, z; t)$ , merupakan fungsi ruang dan waktu dari konsentrasi polutan. Dimana  $U_t$  adalah konsentrasi polutan rata-rata pada saat  $t$ , sehingga massa polutan pada waktu  $t$  adalah:

$$U = \frac{m}{V}, \quad m = U \cdot V$$

Sehingga :

$$m_t = U_1|_t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Saat waktunya  $(t + \Delta t)$ , maka konsentrasinya pada saat  $(t + \Delta t)$  adalah  $U_{t+\Delta t}$ . Sehingga massa pada saat  $(t + \Delta t)$  adalah :

$$m_{t+\Delta t} = U_1|_{t+\Delta t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Jadi selama waktu  $\Delta t$ , perubahan massa polutan dalam volume adalah:

$$m_{t+\Delta t} - m_t = U_1|_{t+\Delta t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - U_1|_t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$m_{t+\Delta t} - m_t = (U_1|_{t+\Delta t} - U_1|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

- b. Perubahan massa polutan dipengaruhi Adveksi

Adveksi/konveksi merupakan mekanisme transportasi polutan dari satu tempat ke tempat lainnya oleh aliran fluida. Transportasi adveksi tergantung pada kecepatan air pada titik di  $(x, y, z)$ , sehingga  $v = v(x, y, z; t)$ , kecepatan ini merupakan vektor karena mengikuti arah ke sumbu  $x, y$  dan  $z$ .

Dalam bidang 2-D, polutan diangkut oleh air yang bergerak dengan kecepatan  $V$  melalui bidang  $\Delta y \Delta z$ . Jika  $U$  adalah konsentrasi polutan, maka massa polutan yang melintasi area sepanjang  $\Delta t$  dapat ditulis:

$$v = \frac{s}{t}, \quad s = v \cdot t$$

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t$$

$$m_x = U_1|_x \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = U_1|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_x \cdot \Delta t$$

Sekarang pada volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , diasumsikan volume dua dimensi pada bidang  $x - y$ , dengan arah gerakan searah sumbu  $x$ , yang memiliki  $V_x$  (kecepatan). Dikarenakan terjadi proses adveksi sepanjang waktu  $\Delta t$ , maka massa polutan yang masuk ke dalam kontrol volume melalui bidang  $\Delta y \Delta z$  di titik  $x$  adalah:

$$m_x = U_1|_x \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = U_1|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_x \cdot \Delta t$$

Dan besarnya massa yang keluar melalui bidang  $\Delta y \Delta z$  di titik  $x + \Delta x$  adalah:

$$m_{x+\Delta x} = U_1|_{x+\Delta x} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = U_1|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_{x+\Delta x} \cdot \Delta t$$

Sehingga perubahan massa dalam interval waktu  $\Delta t$  karena adanya adveksi adalah:

$$m_{x+\Delta x} - m_x = U_1|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_{x+\Delta x} \cdot \Delta t - U_1|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_x \cdot \Delta t$$

$$m_{x+\Delta x} - m_x = \Delta y \cdot \Delta z (U_1|_{x+\Delta x} \cdot v_{x+\Delta x} - U_1|_x \cdot v_x) \Delta t$$

Jika nilainya positif, maka massa polutan yang keluar lebih besar dari aliran massa polutan yang masuk. Sehingga selama interval  $\Delta t$ , massa polutan dalam volume kontrol berkurang, dan keseimbangan massanya adalah:

$$m_{x+\Delta x} - m_x = -(m_{t+\Delta t} - m_t)$$

$$\Delta y \cdot \Delta z (U_1|_{x+\Delta x} \cdot v_{x+\Delta x} - U_1|_x \cdot v_x) \Delta t = -[(U_1|_{t+\Delta t} - U_1|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z]$$

Bagi dengan  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$  maka:

$$\frac{(U_1|_{x+\Delta x} \cdot v_{x+\Delta x} - U_1|_x \cdot v_x)}{\Delta x} = - \frac{(U_1|_{t+\Delta t} - U_1|_t)}{\Delta t}$$

Saat  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , maka :

$$\frac{\partial(U_1|_x \cdot v_x)}{\partial x} = - \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{adv}$$

$$\left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{adv} = - \frac{\partial(U_1|_x \cdot v_x)}{\partial x}$$

- c. Perubahan massa polutan dipengaruhi Dispersi

Dispersi atau difusi adalah penyebaran polutan di dalam air yang disebabkan oleh perbedaan atau perubahan konsentrasi di dalam air. Untuk menjelaskan proses dispersi diperkenalkan dua istilah:

- 1) Fluks polutan: massa yang melintasi area dalam satuan waktu

$$J = J(x, y, z; t) \text{ dengan satuan } kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$$

- 2) Konsentrasi gradien: perbedaan konsentrasi dalam arah yang diberikan antara dua titik yang terletak pada jarak yang sangat jauh terpisah

$$\frac{dU}{dx} = grad U \text{ dengan satuan } kg \cdot m^{-4}$$

Mekanisme dispersi ditafsirkan dengan hukum Fick 1

$$\vec{J} = -D grad U$$

$D$  adalah koefisien dispersi yang merupakan karakteristik media cair ( $m^2/s$ ). Tanda negatif berarti bahwa fluks masa polutan bergerak dari daerah konsentrasi yang tinggi ke konsentrasi rendah pada banyak kasus,  $D$  diasumsikan konstan untuk semua volume cairan. Dengan menerapkan hukum 1 Fick di area  $\Delta y \Delta z$ , massa yang melewati area dalam interval waktu  $\Delta t$  adalah:

$$J_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t = - \left( E \frac{\partial U}{\partial x} \right)_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Pada interval  $\Delta t$  yang sama, volume kontrol mengalami dispersi massa yang masuk melalui bidang  $\Delta y \Delta z$  di  $x$  adalah:

$$massa \text{ fluks}_x = - \left( E \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Dan besarnya massa yang keluar dibidang  $\Delta y \Delta z$  di  $x + \Delta x$  karena dispersi adalah:

$$\text{massa flukus}_{x+\Delta x} = - \left( E \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Keseimbangan massa polutan dalam volume control adalah perubahan antara pers (2) dan (1), yaitu:

$$- E \left[ \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_x \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Jika nilai dalam [ ] positif, massa yang keluar dari kontrol volume lebih besar dari massa yang masuk dan total massa dalam volume kontrol berkurang. Dengan memperhatikan seperti proses adveksi, massa polutan seimbang adalah:

Perubahan massa karena dispersi =  $-(m_{t+\Delta t} - m_t)$

$$- E \left[ \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_x \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t = - \left[ (U_1|_{t+\Delta t} - U_1|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right]$$

Bagi kedua ruas dengan  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$

$$\frac{- E \left[ \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_x \right]}{\Delta x} = - \frac{(U_1|_{t+\Delta t} - U_1|_t)}{\Delta t}$$

Jika  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , maka :

$$- E \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = - \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{disp}$$

Jadi setelah memperhatikan konsentrasi polutan dalam kontrol volume yang dipengaruhi adveksi, dispersi. Maka dengan menjumlahkan semua kombinasi dari konsentrasi polutan, diperoleh:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{adv} + \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \right)_{disp}$$

Kesimbangan massa dalam volume dasar dengan arah  $-x$  adalah :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = - \frac{\partial (U_1|_x \cdot v_x)}{\partial x} + E \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right)$$

Perubahan konsentrasi polutan di bak 1 adalah :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = - \frac{\partial (U_1|_x \cdot v_x)}{\partial x} + E \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right)$$

## 2. Konsentrasi polutan pada bak ke-2

### a. Perubahan massa polutan selama waktu $\Delta t$

Perubahan massa polutan di bak 2 dipengaruhi oleh perubahan massa akhir dikurangi dengan massa di awal ditambah dengan massa polutan yang pindah dari bak 1. Dimana  $U_t$  adalah konsentrasi polutan rata-rata pada saat  $t$ , sehingga massa polutan pada waktu  $t$  adalah:

$$U = \frac{m}{V}, \quad m = U \cdot V$$

Sehingga :

$$m_t = U_2|_t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Saat waktunya  $(t + \Delta t)$ , maka konsentrasinya pada saat  $(t + \Delta t)$  adalah  $U_{t+\Delta t}$ . Sehingga massa pada saat  $(t + \Delta t)$  adalah:

$$m_{t+\Delta t} = U_2|_{t+\Delta t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Perubahan massa polutan dalam volume adalah:

$$m_{t+\Delta t} - m_t + \Delta U_1 \cdot q \cdot \Delta t = U_2|_{t+\Delta t} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - U_2|_t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$m_{t+\Delta t} - m_t + \Delta U_1 \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \Delta t = (U_2|_{t+\Delta t} - U_2|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$m_{t+\Delta t} - m_t + \Delta U_1 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = (U_2|_{t+\Delta t} - U_2|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$m_{t+\Delta t} - m_t = (U_2|_{t+\Delta t} - U_2|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - \Delta U_1 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

### b. Perubahan massa dipengaruhi Adveksi

Dikarenakan terjadi proses adveksi sepanjang waktu  $\Delta t$ , maka massa polutan yang masuk ke dalam kontrol volume melalui bidang  $\Delta y \Delta z$  di titik  $x$  adalah:

$$m_x = U_2|_x \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = U_2|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_x \cdot \Delta t$$

Dan besarnya massa yang keluar melalui bidang  $\Delta y \Delta z$  di titik  $x + \Delta x$  adalah:

$$m_{x+\Delta x} = U_2|_{x+\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z = U_2|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_{x+\Delta x} \cdot \Delta t$$

Sehingga perubahan massa dalam interval waktu  $\Delta t$  karena adanya adveksi adalah:

$$m_{x+\Delta x} - m_x = U_2|_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_{x+\Delta x} \cdot \Delta t - U_2|_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot v_x \cdot \Delta t$$

$$m_{x+\Delta x} - m_x = \Delta y \cdot \Delta z (U_2|_{x+\Delta x} \cdot v_{x+\Delta x} - U_2|_x \cdot v_x) \Delta t$$

Jika nilainya positif, maka massa polutan yang keluar lebih besar dari aliran massa polutan yang masuk. Sehingga selama interval  $\Delta t$ , massa polutan dalam volume kontrol berkurang, dan keseimbangan massanya adalah:

$$m_{x+\Delta x} - m_x = -(m_{t+\Delta t} - m_t)$$

$$\Delta y \cdot \Delta z (U_2|_{x+\Delta x} \cdot v_{x+\Delta x} - U_2|_x \cdot v_x) \Delta t = - \left[ (U_2|_{t+\Delta t} - U_2|_t) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - \Delta U_1 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \right]$$

$$\frac{(U_2|_{x+\Delta x} \cdot v_{x+\Delta x} - U_2|_x \cdot v_x)}{\Delta x} = - \frac{(U_2|_{t+\Delta t} - U_2|_t)}{\Delta t} + \frac{\Delta U_1}{\Delta t}$$

Saat  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , maka:

$$\frac{\partial (U_2|_x \cdot v_x)}{\partial x} = - \left( \frac{\partial U_2}{\partial t} \right)_{adv} + \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

$$\left( \frac{\partial U_2}{\partial t} \right)_{adv} = - \frac{\partial (U_2|_x \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

### c. Perubahan massa polutan dipengaruhi Dispersi

Mekanisme dispersi ditafsirkan dengan hukum Fick 1

$$\vec{J} = -D \text{ grad } U$$

$D$  adalah koefisien dispersi yang merupakan karakteristik media cair ( $m^2/s$ ). Dengan menerapkan hukum 1 Fick di area  $\Delta y \Delta z$ , massa yang melewati area dalam interval waktu  $\Delta t$  adalah:

$$J_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t = - \left( E \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Pada interval  $\Delta t$  yang sama, volume kontrol mengalami dispersi massa yang masuk melalui bidang  $\Delta y \Delta z$  di  $x$  adalah :

$$\text{massa fluks}_x = - \left( E \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Dan besarnya massa yang keluar dibidang  $\Delta y \Delta z$  di  $x + \Delta x$  karena dispersi adalah:

$$\text{massa fluks}_{x+\Delta x} = - \left( E \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Keseimbangan massa polutan dalam volume kontrol adalah perubahan antara pers (2) dan (1), yaitu:

$$- E \left[ \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_x \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t$$

Jika nilai dalam [ ] positif, massa yang keluar dari kontrol volume lebih besar dari massa yang masuk dan total massa dalam volume kontrol berkurang.

Dengan memperhatikan seperti proses adveksi, massa polutan seimbang adalah :

Perubahan massa karena dispersi =  $-(m_{t+\Delta t} - m_t)$

$$- E \left[ \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_x \right] \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t = - [ (U_2)_{t+\Delta t} - (U_2)_t ] \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z - \Delta U_1 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$\frac{- E \left[ \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_x \right]}{\Delta x} = - \frac{(U_2)_{t+\Delta t} - (U_2)_t}{\Delta t} + \frac{\Delta U_1}{\Delta t}$$

Jika  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , maka :

$$- E \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = - \left( \frac{\partial U_2}{\partial t} \right)_{disp} + \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

Maka dengan menjumlahkan semua kombinasi dari konsentrasi polutan, diperoleh:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \left( \frac{\partial U_2}{\partial t} \right)_{adv} + \left( \frac{\partial U_2}{\partial t} \right)_{disp}$$

Keseimbangan massa dalam volume dasar dengan arah  $-x$  adalah :

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = - \frac{\partial (U_2 |_{x \cdot v_x})}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial t} + E \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \right)$$

Perubahan konsentrasi polutan di bak 2 adalah :

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = - \frac{\partial (U_2 |_{x \cdot v_x})}{\partial x} + E \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

#### SIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan yang telah dikerjakan diperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Model matematika pencemaran air pada bak sebagai berikut :

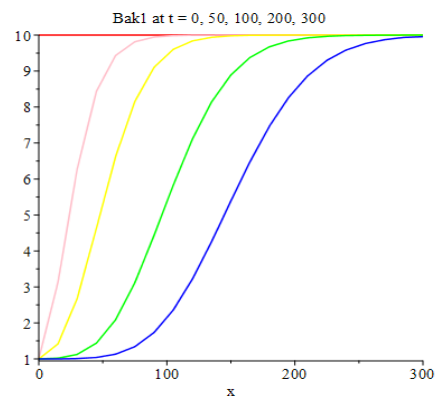
- a. Pada bak ke-1:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = - \frac{\partial (U_1 |_{x \cdot v_x})}{\partial x} + E \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right)$$

- b. Pada bak ke-2:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = - \frac{\partial (U_2 |_{x \cdot v_x})}{\partial x} + E \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial U_1}{\partial t}$$

2. Grafik hubungan antara konsentrasi polutan sepanjang sumbu x dengan waktu tertentu :



**Gambar 1.** Grafik hubungan antara x dan konsentrasi  $u(x,t)$

Berdasarkan plot diatas dapat dilihat bahwa konsentrasi awal polutan adalah sebesar  $10 \text{ kg/m}^3$ . Pada saat  $t = 0$  polutan menyebar sepanjang sumbu x (grafik merah). Dari grafik berwarna pink, kuning, hijau dan biru terlihat bahwa polutan bergerak sepanjang sumbu x. Semakin jauh interval sumbu x yang di lewati polutan maka semakin tinggi konsentrasi polutan pada titik x tersebut.

Perpindahan polutan dari bak ke-1 ke dalam bak ke-2 dipengaruhi kecepatan aliran sehingga polutan berpindah dan karena efek dispersi polutan akan berpindah sepanjang bak. Maka pada bak ke-2 akan terjadi peningkatan jumlah polutan karena masuknya polutan dengan kecepatan v. Polutan pada bak ke-2 akan berpindah dan bergeser hingga lama kelamaan keluar dari bak ke-2.

#### REFERENSI

- [1] Keputusan Menteri Negara Kependudukan dan Lingkungan Hidup NO.02/MENKLH/I/1988
- [2] Fardiaz, Srikandi. 1992. *Polusi Air Dan Udara*. Bogor: Kanisus.
- [3] Satyani, Darti & Priono, Bambang. 2012. *Penggunaan Berbagai Wadah Untuk Pembudidayaan Ikan Hias Air Tawar*. Jurnal media akuakultur. Vol.7 No.1 Hal 16-18.

- [4] N, M. Ervany Eshmat & Manan, Abdul.2013. Analisis Kondisi Kualitas Air Budidaya Ikan Kerapu Tikus (*Cromileptes Altivelis*) Di Situbondo. *Jurnal Ilmiah Perikanan dan Kelautan* Vol. 5 No. 1.
- [5] Kordi, M. G. 2012. *Kiat Sukses Pembesaran Lele Unggul*. Lily Publisher. Yogyakarta.
- [6] Koten, Elias, dkk. 2015. *Evaluasi Usaha Membudidayaan Ikan di Desa Matungkas Kabupaten Minahasa Utara*. *Jurnal Budidaya Perairan*. Vol. 3 No. 1: 203-210.