Penerapan Metode Dekomposisi Sumudu untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Tiga Non Linear

Rizky Hamdanih[#1], Riry Sriningsih[*2]
[#]Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia
[*]Lecturer of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia
[1]rizkyhamdanihok@gmail.com
[2]srirysriningsih@yahoo.com

Abstract– This research discusses about the third order non linear ordinary differential equations. To solve the third order non linear ordinary differential equation we can using the Sumudu decomposition method. The Sumudu decomposition method is a combination of the Sumudu transform and the decomposition method which involving Adomian polynomial. This study aims to determine the completion steps and solutions has obtained from the application of the Sumudu decomposition method in to the third order non linear ordinary differential equations. The final solution obtained from the Sumudu decomposition method is a series solution.

Keywords– Ordinary Differential Equations (ODE), Third Order Non Linear ODE, Sumudu.

Abstrak– Penelitian ini membahas tentang persamaan diferensial biasa orde tiga non linear. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde tiga non linear kita dapat menggunakan metode dekomposisi Sumudu. Metode dekomposisi Sumudu merupakan gabungan antara tranformasi Sumudu dan metode dekomposisi yang melibatkan polinomial Adomian. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui langkah-langkah penyelesaian dan solusi yang didapatkan dari pengaplikasian metode dekomposisi Sumudu pada persamaan diferensial biasa orde tiga non linear. Solusi akhir yang didapatkan dari persamaan diferensial biasa orde tiga non linear dengan metode dekomposisi Sumudu yaitu solusi yang berbentuk deret.

Kata Kunci– Persamaan Diferensial Biasa (PDB), PDB Orde Tiga Non Linear, Sumudu.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas [1]. Persamaan diferensial banyak digunakan dalam ilmu matematika terapan dan ilmu lainnya. Persamaan diferensial berdasarkan jumlah variabel bebasnya terbagi atas dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari suatu variabel terikat terhadap satu variabel bebas [1]. Persamaan diferensial biasa sering digunakan dalam bidang *engineering* contohnya hukum Newton II tentang gerak, dalam bidang elektronika contohnya pada rangkaian RLC, dan dalam bidang Arkeologi contohnya pada peluruhan zat radioaktif. Banyak matematikawan ternama yang telah memberikan sumbangan ilmu terhadap bidang studi ini, antara lain Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Brook Taylor, Daniel Bernoulli, Riccati, Clairaut, d'Alembret, dan Euler.

Berdasarkan ordenya, persamaan diferensial biasa terbagi atas persamaan diferensial biasa orde satu, orde dua, orde tiga sampai orde n. Orde (tingkat) dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial [1]. Berdasarkan kelinearannya, persamaan diferensial biasa terbagi atas dua yaitu linear dan non linear. Persamaan diferensial biasa non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear [1]. Penelitian ini berfokus pada persamaan diferensial orde tiga non linear.

Pada kehidupan nyata persoalan yang muncul melibatkan persoalan yang rumit berupa permasaan non linear sehingga penyelesaian analitik tidak lagi dapat diterapkan sehingga solusinya digunakan penyelesaian secara numerik. Untuk menyelesaikannya, kita dapat menggunakan suatu metode yang bisa mendapatkan solusi dari persamaan diferensial biasa orde tiga non linear. Adapun cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut yaitu dengan menggunakan metode dekomposisi Sumudu.

Metode Dekomposisi Sumudu atau yang dapat disingkat dengan MDS diperkenalkan pertama kali oleh

G. K. Watugala yang diterapkan pada persamaan diferensial non linear baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial tanpa harus melakukan linearisasi [2]. Dekomposisi Sumudu merupakan gabungan dari metode transformasi Sumudu dan metode dekomposisi yang melibatkan polinomial Adomian.

Metode tersebut terlebih dahulu menggunakan transformasi Sumudu sebagai langkah penyelesaian untuk bagian linear dari suatu persamaan diferensial non linear, serta menerapkan polinomial Adomian sebagai langkah penyelesaian untuk bagian non linearnya [3].

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mengetahui langkah atau tahapan penyelesaian metode dekomposisi Sumudu pada persamaan diferensial biasa orde tiga non linear dan mendapatkan solusi yang berupa solusi deret.

METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis) yang membahas secara teori dari persamaan diferensial biasa orde tiga non linear dengan metode dekomposisi Sumudu. Penelitian dilakukan dengan mengumpulkan referensi yang sesuai topik penelitian bisa dari jurnal, buku, ataupun sumber-sumber dari internet.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode dekomposisi Sumudu. Adapun langkah-langkah yang diterapkan sebagai berikut:

1. Membahas teori mengenai metode dekomposisi Sumudu yang melibatkan transformasi Sumudu dan Polinomial Adomian.
2. Mengaplikasikan metode dekomposisi Sumudu pada persamaan diferensial biasa orde tiga non linear.

PEMBAHASAN

A. *Metode Dekomposisi Sumudu*

1. Transformasi Sumudu

Transformasi Sumudu pertama kali dicetuskan oleh Gamake K. Watugala pada tahun 1993. Beberapa kegunaan Transformasi Sumudu antara lain untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial biasa, untuk menyelesaikan masalah rekayasa katrol, untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan koefisien variabel, dan menyelesaikan persamaan gelombang panas

Transformasi Sumudu di definiskan pada himpunan dari fungsi, sebagai berikut [5]:

$$A = \left\{ f(t) \middle| \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, j = 1,2\,, t \in (-1)^j \times [0,\infty] \right\}$$

dengan rumus sebagai berikut:

$$F(u) = \mathcal{S}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt, u \in (\tau_1, \tau_2), t \geq 0$$

Transformasi Sumudu ada jika $\int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(ut)e^{-t}dt$ konvergen ke nilai batasnya.

Transformasi Sumudu untuk turunan fungsi $f(t)$ adalah

$$\mathcal{S}\{f^{(n)}(t)\} = \frac{1}{u^n}\left[F(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k f^{(k)}(0)\right], n \geq 1$$

2. Sifat-sifat Transformasi Sumudu

Transformasi Sumudu mempunyai beberapa sifat penting yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa non linear, sifat-sifat transformasi Sumudu antara lain:

a) Sifat perkalian dengan suatu konstanta

Jika diberikan k adalah konstanta dan $F(u)$ adalah transformasi Sumudu dari $f(t)$, ditulis sebagai $\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u)$ maka

$$\mathcal{S}\{kf(t)\} = kF(u)$$

b) Sifat Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $F_1(u)$ dan $F_2(u)$ adalah transformasi Sumudu dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ dan a, b adalah konstanta maka

$$\mathcal{S}\{af_1(t) \pm bf_2(t)\} = a\mathcal{S}\{f_1(t)\} \pm b\mathcal{S}\{f_2(t)\}$$
$$= aF_1(u) \pm bF_2(u)$$

c) Sifat Diferensiasi

1) Jika $\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u)$ maka transformasi Sumudu dari turunan pertama $f(t)$ terhadap t adalah

$$\mathcal{S}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = \frac{F(u)-f(0)}{u} = \frac{F(u)}{u} - \frac{f(0)}{u}$$

2) Jika $\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u)$ maka transformasi Sumudu dari turunan kedua $f(t)$ terhadap t adalah

$$\mathcal{S}\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\} = \frac{F(u)-f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u}$$

3) Jika $\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u)$ maka transformasi Sumudu dari turunan pertama $f(t)$ terhadap x adalah

$$\mathcal{S}\{\frac{d}{dx}f(t)\} = \frac{d}{dx}F(u)$$

4) Jika $\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u)$ maka transformasi Sumudu dari turunan kedua $f(t)$ terhadap x adalah

$$\mathcal{S}\{\frac{d^2}{dx^2}f(t)\} = \frac{d^2}{dx^2}F(u)$$

3. Invers Transformasi Sumudu

Transformasi Sumudu merupakan salah satu transformasi integral yang di dalam penerapannya akan mengubah fungsi dalam parameter t menjadi bentuk fungsi dalam parameter u. Apabila fungsi dalam parameter u tersebut perlu diubah kembali menjadi fungsi dalam parameter t maka dapat dilakukan invers transformasi Sumudu.

Jika transformasi Sumudu dari fungsi $f(t)$ adalah $F(u)$ atau $\mathcal{S}\{f(t)\}$ maka fungsi $f(t)$ adalah invers transformasi Sumudu dari $F(u)$ dan disimbolkan dengan $f(t) = \mathcal{S}^{-1}\{F(u)\}$.

TABEL 1
FUNGSI DAN INVERS TRANSFROMASI SUMUDU

No	$f(t) = \mathcal{S}^{-1}\{F(u)\}$	$F(u) = \mathcal{S}\{f(t)\}$
1	1	1
2	t	u
3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1,2,\ldots$	u^{n-1}
4	e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
5	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n = 1,2,\ldots$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
6	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
7	$\cos at$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
8	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\frac{u}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
9	$e^{bt}\cos at$	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
10	$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{u}{1-a^2u^2}$
11	$\cosh at$	$\frac{1}{1-a^2u^2}$
12	$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$	$\frac{u}{(1-bu)^2-a^2u^2}$
13	$e^{bt}\cosh at$	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2-a^2u^2}$
14	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$	$\frac{u}{(1-bu)(1-au)}$
15	$\frac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$	$\frac{1}{(1-bu)(1-au)}$
16	$\frac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$	$\frac{u^3}{(1+a^2u^2)^2}$
17	$\frac{t\sin at}{2a}$	$\frac{u^2}{(1+a^2u^2)^2}$
18	$\frac{\sin at + at\cos at}{2a}$	$\frac{u}{(1+a^2u^2)^2}$
19	$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$	$\frac{1}{(1+a^2u^2)^2}$
20	$t\cos at$	$\frac{u(1-a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^2}$
21	$\frac{\text{at}\cosh at - sinh\ at}{2a^3}$	$\frac{u^3}{(1-a^2u^2)^2}$
22	$\frac{t\sinh at}{2a}$	$\frac{u^2}{(1-a^2u^2)^2}$
23	$\frac{\sinh at + at\ cosh\ at}{2a}$	$\frac{u}{(1-a^2u^2)^2}$
24	$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$	$\frac{1}{(1-a^2u^2)^2}$
25	$t\cosh at$	$\frac{u(1+a^2u^2)}{(1-a^2u^2)^2}$
26	$\frac{(3-\mathrm{a}^2\mathrm{t}^2)\sin at - 3at\ cos\ at}{8a^5}$	$\frac{u^5}{(1+a^2u^2)^3}$
27	$\frac{\mathrm{t}\sin at - at^2\ cos\ at}{8a^3}$	$\frac{u^4}{(1+a^2u^2)^3}$
28	$\frac{(1+\mathrm{a}^2\mathrm{t}^2)\sin at - at\ cos\ at}{8a^3}$	$\frac{u^3}{(1+a^2u^2)^3}$
29	$\frac{t^2\sin at}{2a}$	$\frac{u^3(3-a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^3}$
30	$\frac{1}{2}t^2\cos at$	$\frac{u^2(3-a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^3}$

4. Polinomial Adomian

Metode dekomposisi diperkenalkan pertama kali oleh George Adomian pada tahun 1994. Dalam metode dekomposisi digunakan polinomial Adomian yang bermanfaat untuk menyelesaikan suku non linear PDB orde tiga non linear yang di definisikan sebagai berikut:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

dengan $n = 0,1,2,3,\ldots$ dan λ merupakan suatu parameter.
A_n dapat diuraikan menjadi seperti berikut:

$A_0 = N(u_0) = u_0$

$A_1 = u_1\frac{d}{du_0}N(u_0)$

$A_2 = u_2\frac{d}{du_0}N(u_0) + \frac{{u_1}^2}{2!}\frac{d^2}{d{u_0}^2}N(u_0)$

$A_3 = u_3\frac{d}{du_0}N(u_0) + u_1u_2\frac{d^2}{d{u_0}^2}N(u_0) + \frac{{u_1}^2}{3!}\frac{d^3}{d{u_0}^3}N(u_0)$

$\vdots \quad = \quad \vdots$

Bentuk $u_0(t), u_1(t), u_2(t), \ldots$ dijabarkan sebagai berikut:

$$u_0(t) = Y(t)$$
$$u_1(t) = \mathcal{S}^{-1}\{u\mathcal{S}(A_0)\}$$
$$u_2(t) = \mathcal{S}^{-1}\{u\mathcal{S}(A_1)\}$$
$$\vdots \quad = \quad \vdots$$
$$u_n(t) = \mathcal{S}^{-1}\{u\mathcal{S}(A_n)\},\ n \geq 0$$

B. *Aplikasi Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Tiga Non Linear Menggunakan Dekomposisi Sumudu*

Berikut ini akan diberikan contoh cara menentukan solusi dari persamaan diferensial biasa orde tiga non linear yang akan dicari solusinya dengan menggunakan metode dekomposisi Sumudu. Persamaan Diferensial adalah:

$\frac{d^3y}{dt^3} = 3y^2, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$

Penyelesaian:

Ide awal yang akan kita lakukan adalah mencari transformasi dari turunan fungsi dengan menggunakan transformasi Sumudu ke dalam PDB orde tiga non linear yang diketahui pada setiap ruas.

$$\mathcal{S}\{\frac{d^3y}{dt^3}\} = \mathcal{S}\{3y^2\}$$

Selanjutnya, kita cari hasilnya dengan menggunakan teorema transformasi Sumudu sehingga persamaan tersebut dapat diubah menjadi

$$\frac{\mathcal{S}\{y(t)\}}{u^3} - \frac{y(0)}{u^3} - \frac{y'(0)}{u^2} - \frac{y''(0)}{u} = 3\mathcal{S}\{y^2\}$$

kita tahu bahwa $\mathcal{S}\{y(t)\} = Y(u)$ sehingga

$$\frac{Y(u)}{u^3} - \frac{y(0)}{u^3} - \frac{y'(0)}{u^2} - \frac{y''(0)}{u} = 3\mathcal{S}\{y^2\}$$

Kemudian, kita subsitusikan nilai awal yang telah diketahui ke dalam persamaan di atas, sehingga

$$\frac{Y(u)}{u^3} - \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} = 3\mathcal{S}\{y^2\}$$

Untuk mendapatkan hasil $Y(u)$, kita dapat menyederhanakan persamaan tersebut dengan cara mengalikan u^3 pada setiap ruas, sehingga didapatkan

$$Y(u) = 1 + u + u^2 + 3u^3\mathcal{S}\{y^2\}$$

Langkah selanjutnya yaitu kita terapkan invers transformasi pada persamaan (2), sehingga diperoleh

$$\mathcal{S}^{-1}\{Y(u)\} = \mathcal{S}^{-1}\{1\} + \mathcal{S}^{-1}\{u\} + \mathcal{S}^{-1}\{u^2\} + \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{y^2\}\}$$

Untuk mencari hasil invers pada tiap-tiap ruas kita dapat gunakan prinsip tabel 1, sehingga didapatkanlah

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{y^2\}\} \qquad (1)$$

Pada persamaan (1) terdapat suku non linear yaitu y^2 yang mana tidak dapat kita selesaikan dengan transformasi Sumudu sehingga harus dicari dengan menggunakan polinomial Adomian dengan pendekatan deret tak hingga dan misalkan y^2 sebagai $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}t^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\}\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\}\} \qquad (2)$$

Langkah selanjutnya yaitu kita mencari A_n dimana

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}[N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0}$$

Dengan $n = 0,1,2,3,\ldots$ dan λ merupakan suatu parameter.

untuk $n = 0$, maka polinomial Adomian

$$A_0 = N(u_0) = {y_0}^2$$

untuk $n = 1$, maka polinomial Adomian

$$A_1 = y_1(\frac{d}{dy_0}{y_0}^2)$$
$$= 2y_0 y_1$$

untuk $n = 2$, maka polinomial Adomian

$$A_2 = y_2(\frac{d}{dy_0}{y_0}^2) + \frac{{y_1}^2}{2!}(\frac{d^2}{d{y_0}^2}{y_0}^2)$$
$$= {y_1}^2 + 2y_0 y_2$$

untuk $n = 3$, maka polinomial Adomian

$$A_3 = y_3(\frac{d}{dy_0}{y_0}^2) + y_1 y_2(\frac{d^2}{d{y_0}^2}{y_0}^2) + \frac{{y_1}^3}{3!}(\frac{d^3}{d{y_0}^3}{y_0}^2)$$
$$= 2y_0 y_3 + 2y_1 y_2$$

$$\vdots = \vdots$$

Selanjutnya, kita tahu bahwa $y_0(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$ dengan $y_0(t)$ merupakan bagian linear dari persamaan (2) dan $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ dan seterusnya merupakan bagian non linear yang dapat diuraikan menjadi

$$y_0(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$
$$y_1(t) = \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{A_0\}\}$$
$$y_2(t) = \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{A_1\}\}$$
$$y_3(t) = \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{A_2\}\}$$
$$\vdots = \vdots$$

Untuk bentuk di atas, didapatkan bentuk umum relasi rekursif yaitu

$$y_{n+1}(t) = \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{A_n\}\}, \text{ untuk } n = 0,1,2,3,\ldots$$

Selanjutnya, akan dicari solusi $y(t)$ dengan menjabarkan bentuk relasi rekursif tersebut.

$$y_0(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{A_0\}\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}({y_0}^2(t))\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2)^2\}\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{1 + 2t + 2t^2 + t^3 + \tfrac{1}{4}t^4\}\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3(1 + 2u + 4u^2 + 6u^3 + 6u^4)\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3 + 6u^4 + 12u^5 + 18u^6 + 18u^7)\} \\
&= \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{40}t^6 + \frac{1}{280}t^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{A_1\}\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{2y_0(t)y_1(t)\}\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{2 \times (1 + t + \tfrac{1}{2}t^2) \times (\tfrac{1}{2}t^3 + \tfrac{1}{4}t^4 \\
&\quad \tfrac{1}{10}t^5 + \tfrac{1}{40}t^6 + \tfrac{1}{280}t^7)\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3\mathcal{S}\{t^3 + \tfrac{3}{2}t^4 + \tfrac{6}{5}t^5 + \tfrac{1}{2}t^6 + \tfrac{11}{70}t^7 + \\
&\quad \tfrac{9}{280}t^8 + \tfrac{1}{280}t^8\}\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{3u^3(6u^3 + 36u^4 + 144u^5 + 360u^6 + \\
&\quad 792u^7 + 11664u^8 + 1296u^9)\} \\
&= \mathcal{S}^{-1}\{18u^6 + 108u^7 + 432u^8 + 1080u^9 + \\
&\quad 2376u^{10} + 34992u^{11} + 3888u^{12}\} \\
&= \frac{1}{40}t^6 + \frac{3}{140}t^7 + \frac{3}{280}t^8 + \frac{1}{336}t^9 + \frac{11}{16800}t^{10} + \\
&\quad \frac{27}{30800}t^{11} + \frac{1}{123200}t^{12}
\end{aligned}$$

sehingga didapatkanlah solusi dari $y(t)$ yaitu

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \\
&= y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \cdots \\
&= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{40}t^6 + \\
&\quad \frac{1}{280}t^7 + \frac{1}{40}t^6 + \frac{3}{140}t^7 + \frac{3}{280}t^8 + \frac{1}{336}t^9 + \\
&\quad \frac{11}{16800}t^{10} + \frac{27}{30800}t^{11} + \frac{1}{123200}t^{12}
\end{aligned}$$

$$= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{20}t^6 + \frac{1}{40}t^7 + \ \dots$$

Jadi, persamaan diferensial biasa

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 3y^2, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1$$

memiliki solusi yaitu

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{20}t^6 + \frac{1}{40}t^7 + \cdots$$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1) Metode Dekomposisi Sumudu merupakan gabungan dari transformasi Sumudu dengan Polinomial Adomian. Metode tersebut dapat mendapatkan solusi dari persamaan diferensial biasa orde tiga non linear.
2) Adapun tahapan atau langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde tiga non linear yaitu mengaplikasikan transformasi Sumudu ke PDB orde tiga non linear, mensubsitusikan nilai awal yang diketahui ke dalam persamaan yang terbentuk, melakukan invers transfromasi Sumudu pada setiap ruas sehingga diperoleh hasil untuk bagian non linear, menentukan nilai awal iterasi yang diperoleh dari solusi bagian linear dan menggunakan polinomial Adomian untuk menyelesaikan bagian non linear, dan membentuk solusi yang dihasilkan menjadi sebuah deret.
2) Solusi akhir yang didapatkan dari penerapan metode dekomposisi Sumudu berupa solusi yang berbentuk deret.

REFERENSI

[1] Ross, Sheply L. 1989. *Introduction To Ordinary Differential Equations - 4th Edition*. John Wiley and Sons, Canada.

[2] Watugala, George K. 1993. “Sumudu Transform: A New Integral Transform To Solve Diferential Equations and Control Engineering Problems”. Https://doi.org/10.1080/0020739930240105 diakses pada tanggal 10 Februari 2019.

[3] Mahanani, N. A., Mariatul K., dan Evy S. 2016. “Analisis Metode Dekomposisi Sumudu dan Modifikasinya Dalam Menentukan Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear”.. Http://jurnal.untan.ac.id/index.php/jbmstr/article/view/155651369_8 diakses pada tanggal 10 Februari 2019.

[4] Belgacem, F. B. M., and Karabali, A. A. 2006. “Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations and Applications”.https://www.researchgate.net/publication/41448911_Sumudu_transform_fundamental_properties_investigations_and_applications/download diakses pada tanggal 10 Februari 2019.

[5] Bildik, Necdet and Deniz, Sinan. 2016. “The Use of Sumudu Decomposition Method for Solving Predator-Prey Systems”. Http://dx.doi.org/10.18576/msl/050310 diakses pada tanggal 10 Februari 2019.