Model Eko-epidemiologi dengan Waktu Tunda, Mangsa Panen dan Penambahan Secara Konstan Mangsa Rentan

Meiky Riani[#1], Muhammad Subhan[*2]

[#]*Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*
[*]*Lecturers of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*

[1]rianimeiky@gmail.com
[2]13subhan@gmail.com

Abstract – In this article discussed eco-epidemiological with time delay, harvesting prey and addition constally suspectible prey. Eco-epidemiological is study the spread of infectious diseases in population in the interaction in an environment. Eco-epidemiological will be analyzed by finding the stability of fixed point. The model consist of tree differential equations. In this model the population is diveded into three parts suspectible prey, infectious prey and predator. The model have four fixed points. Those are extinction (E_0), axial (E_1), infected prey extinction or disease free (E_2) and the coexistence between prey and predator (E_3).

Keywords – *Eco-epidemiological , Predator-prey,Time Delay,Fixed Point*

Abstrak – Pada artikel ini dibahas model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahan secara konstan maangsa rentan. Eko-epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari tentang penyebaran suatu penyakit menular pada sebuah populasi dalam interaksi di suatu lingkungan. Model eko-epidemiologi yang diperoleh akan dianalisis dengan mencari kestabilan titik tetapnya. Model yang diperoleh terdiri dari tiga persamaan differensial yaitu mangsa rentan, mangsa terinfeksi dan pemangsa .Pada model ini populasi dibagi menjadi tiga yaitu populsi mangsa rentan, populasi mangsa terinfeksi dan populasi pemangsa. Model memiliki empat titik tetap. Titik tetap kepunahan (E_0), titik tetap aksial (E_1), titik tetap bebas penyaki (E_2), dan titik tetap koeksistensi mangsa dan pemangsa (E_3).

Kata Kunci – *Eko-epidemiologi, Mangsa-Pemangsa, Waktu Tunda, Titik Tetap*

PENDAHULUAN

Salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model mangsa-pemangsa, dengan prey sebagai spesies yang dimangsa dan predator sebagai spesies yang memangsa. Model mangsa-pemangsa pertamakali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Voltera pada tahun 1926, sehingga mode lini juga disebut model Lotka-Volterra[1].Namun dalam model mangsa-pemangsa yang mereka perkenalkan masih sederhana, asumsi dasar dari model mangsa-pemangsa ini adalah bahwa setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan secara eksponensial dimana fakto-faktor lain ditiadakan.

Dalam beberapa tahun terakhir, masalah eko-epidemiologi telah menjadi perhatian banyak peneliti. Pada bidang ekologi, eko-epidemiologi sangat penting dalam pemahaman muculnya penyakit. Bidang tersebut mempelajari mengenai dinamika populasi, epidemi, dan penyakit yang terinfeksi pada komunitas yang ada di lingkungan masyarakat. Oleh karena itu dalam pemodelan matematika dikaji berbagai macam model matematika untuk mengetahui terjadi atau tidaknya suatu epidemi dalam populasi pada ekologi yang nyata. Hal ini didasarkan pada beberapa sifat spesifik dari aturan penyebaran penyakit menular dan faktor-faktor sosial yang terkait untuk membangun model matematika. Faktor penyakit pada sistem predator-prey pertama kali diperkenalkan oleh Anderson dan Mei. Anderson dan Mei meneliti faktor utama pengacauan yang terjadi pada interaksi predator-prey serta menemukan studi faktor pengendalian penyakit tersebut[2].

Secara umum model mangsa-pemangsa dapat dibagi menjadi tiga kasus oleh infeksi penyakit pada populasi. Pertama hanya terdapat mangsa yang terinfksi pada model. Johri, *et al* [3] mempelajari tipe Lotka-Volterra dimana model mangsa-pemangsa dengan mangsa sakit tanpa panen dan diasumsikan bahwa tingkat konversi mangsa yang rentan adalah sama dengan mangsa yang terinfeksi. Sharma dan Samantha [4] mempelajari model eko-epidemiologi dengan dua populasi mangsa dimana spesies mangsa terinfeksi oleh penyakit menular. Kedua hanya ada pemangsa yang terinfeksi dalam model . Zhang dan Sun [5] mengusulkan model mangsa-pemangsa dengan penyakit pada pemangsa dan respons fungsional umum. Ketiga adalah penyakit di kedua populasi untuk model mangsa-pemangsa. Kant dan Kumar [6] mempertimbangkan sistem mangsa-pemangsa dengan migrasi mangsa dan infeksi penyakit pada kedua populasi.

Secara umum waktu tunda telah banyak dimasukkan oleh peneliti dan model matematika dinamika populasi. Dengan adanya waktu perlambatan inilah meyebabkan titik ekuilibrium model tidak stabil. Contoh yang umum adalah waktu tunda karena masa inkubasi penyakit. Hu dan Li[7] telah menyelidiki model mangsa-pemangsa yang tertunda. Xu dan Zhang [8] model mangsa-pemangsa yang tertunda dengan penyakit pada pemangsa. Zhou, *et al* [9] mengusulkan tiga dimensi model eko-epidemiologi dengan waktu tunda.

Pada model ini, pemangsa tidak hanya menangkap mangsa yang infeksi tetapi juga menangkap mangsa yang rentan. Dikarenakan masa inkubasi infeksi maka akan dipertimabangkan waktu tunda dalam model ini. Selain itu pemanen dari sumber ekologi dan populasi adalah hal yang umum seperti panen hewan liar dan ikan. Dari perspektif realitis memanen tidak bisa diabaikan begitu saja dari ekosistem. Berdasarkan analisis di atas dan karya Johri, *et al* [10] penulis akan menganalisis model eko-epidemiologi dengan waktu tunda , memanen populasi mangsa dan menambahkan secara konstan populasi mangsa yang rentan

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis) dengan menggunakan teori yang relevan berdasarkan studi kepustakaan. Langkah kerja yang dilakukan adalah dengan menentukan asumsi-asumi pembentukan model. Mengaitkan hubungan antara variabel pada model dengan asumsi yang telah dibuat. Membangun dan menentukan model. Menganalisa model. Menginterpretasikan hasill dari analisis yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahkan secara konstan*

Dalam membentuk model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahkan secara konstan mangsa rentan asumsi yang digunakan sebagai berikut:

1. Populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu:
    a. Subpopulasi prey suspectible atau rentan terhadap penyakit yang dinyatakan dengan S.
    b. Subpopulasi prey infectious atau terinfeksi dan dapat menularkan penyakit yang dinyatakan dengan I.
    c. Subpopulasi predator atau pemangsa yang dapat dinyatakan dengan P.
2. Penyebaran penyakit di populasi mangsa hanya terjadi secara kontak. Mangsa yang terinfeksi tidak bisa dipulihkan.
3. Penangkapan diakukan kepadadua populasi yaitu populasi mangsa yang terifeksi dan populasi mamgsa rentan. Secara umum mangsa yang rentan lebih kuat dari mangsa yang terinfeksi .Peluang penangkapan mangsa yang terinfeksi lebih besar dari mangsa yang rentan.
4. Tingkat kematian diperhitungkan sebagai berikut, dimana tingkat kematian yang terjadi pada mangsa yang terinfeksi secara alami karena infeksi yang terjadi pada mangsa yang terinfeksi.
5. Spesies mangsa dipanen secara linier.

Ada tiga variabel yang digunakan dalam membentuk model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahkan secara konsta mangsa rentan:

1. Subpopulasi prey suspectible atau rentan terhadap penyakit yang dinyatakan dengan S.
2. Subpopulasi prey infectious atau terinfeksi dan dapat menularkan penyakit yang dinyatakan dengan I.
3. Subpopulasi predator atau pemangsa yang dapat dinyatakan dengan P.

Parameter yang digunakan sebagai berikut:

Λ : Tingkat perekrutan konstan mangsa rentan

β : Koefisien penularan penyakit

α_1: Tingkat penangkapan mangsa rentan

α_2: Tingkat penangkapan mangsa terinfeksi

d_1: Kematian rata-rata dari mangsa rentan

d_2: Kematian rata-rata dari mangsa terinfeksi

d_3: Kematian rata-rata dari pemangsa

E : Upaya pemanenan

q_1: Koefisien penangkapan mangsa rentan

q_2: Koefisien penangkapan mangsa terinfeksi

Formulasi Model

Model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, memanen populasi mangsa dan menambahkan secara konstan populasi mangsa yang rentan sebagaiberikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \alpha_1 SP - d_1 S - q_1 ES$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha_2 IP - d_2 I - q_2 EI$$
$$\frac{dP}{dt} = e\alpha_1 SP + e\alpha_2 SP - d_3 P \qquad (1)$$

Karena adanya waktu tunda sehingga model matematika akan menjadi:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \alpha_1 SP - d_1 S - q_1 ES$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t-\tau)I(t-\tau) - \alpha_2 IP - d_2 I - q_2 EI$$
$$\frac{dP}{dt} = e\alpha_1 SP + e\alpha_2 SP - d_3 P \qquad (2)$$

B. *Analisis model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahkan secara konstan*

Dengan menganalisis model diatas diperoleh empat titik tetap model yaitu:

Titik tetap kepunahan, yakni kondisi ketika populasi mangsa yang rentan, mangsa yang terinfeksi, dan pemangsa dalam kepunahan. Kondisi ini terjadi ketika

$S = 0, I = 0,$ dan $P = 0$. Sehingga didapatkan titik tetap $E_0 = (S_0, I_0, P_0) = (0,0,0)$.

1. Titik tetap aksial, yakni kondisi ketika populasi mangsa yang rentan tidak mengalami kepunahan, sedangkan mangsa yang terinfeksi dan pemangsa dalam kepunahan. Kondisi ini terjadi ketika $S \neq 0, I = 0,$ dan $P = 0$.Sehingga didapatkan titik tetap $E_1 = (S_1, I_1, P_1) = (\frac{\Lambda}{d_1+q_1E}, 0,0)$.
2. Titik tetap bebas penyakit, yakni kondisiketika tidak adanya mangsa yang terinfeksi. Kondisi ini terjadi ketika $S \neq 0, I = 0,$ dan $P \neq 0$. Sehingga diperoleh titik tetap bebas penyakit$E_2 = (S_2, I_2, P_2) = (\frac{d_3}{e\alpha_1}, 0, \frac{\Lambda e\alpha_1 - d_1d_3 - d_3q_1E}{\alpha_1 d_3})$.
3. Titik tetap koeksistensi, yakni kondisi ketika populasi mangsa yang rentan, mangsa yang terinfeksi, dan pemangsa hidup berdampingan. Kondisi ini terjadi ketika $S \neq 0, I \neq 0,$ dan $P \neq 0$. Sehingga diperoleh titik tetap koeksistensi $E_3 = (S_3, I_3, P_3) = (\frac{\alpha_2 P - d_2 - q_2E}{B}, \frac{d_3 - e\alpha_1 S}{e\alpha_2 I}, \frac{\Lambda + BSI - Sd_1 - Sq_1E}{S\alpha_1})$
.

Analisis Kestabilan titik tetap ditentukan dengan cara menentuan nlai matriks Jacobi dari sistem (1) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$A_{11} = -BI - \alpha_1 P - d_1 - q_1E$

$A_{12} = -BS$

$A_{13} = -\alpha_1 S$

$A_{21} = BI$

$A_{22} = BS - \alpha_2 P - d_2 - q_2E$

$A_{23} = -\alpha_2 I$

$A_{31} = e\alpha_1 P$

$A_{32} = e\alpha_2 P$

$A_{33} = e\alpha_1 S + e\alpha_2 I - d_3$

Berikut analisis kestabilan dari keempat titik tetap model;

1. Analisis Kestabilan Ttik Tetap Kepunahan E_0 diperoleh nilai-nilai eigen dari $J(E_0)$ sebagai berikut:
   $\lambda_1 = -d_1 - q_1E,\ \ \lambda_2 = -d_2 - q_2E$ dan $\lambda_3 = -d_3$
   Dari matriks Jacobian $J(E_0)$ diperoleh semua nilai eigen bernilai negatif. Oleh karena itu titik setimbang E_0 stabil.
2. Analisis Kestabilan Titik Tetap Kepunahan E_1 . Dengan demikian diperoleh nilai-nilai eigen dari $J(E_1)$ sebagai berikut:
   $\lambda_1 = -d_1 - q_1E,\ \ \lambda_2 = \left(\frac{B\Lambda}{d_1+q_1E}\right) - d_2 - q_2E$ dan $\lambda_3 = \frac{e\alpha_1\Lambda}{d_1+q_1E} - d_3$.
   Dari matriks Jacobian $J(E_1)$ diperoleh satu nilai eigen negatif yaitu $\lambda_1 = -d_1 - q_1E$ dan dua nilai eigen $\lambda_2 = \left(\frac{B\Lambda}{d_1+q_1E}\right) - d_2 - q_2E$ dan$\lambda_3 = \frac{e\alpha_1\Lambda}{d_1+q_1E} - d_3$.
   Titik setimbang E_1 stabil asimtotis jika :
   i.$\frac{B\Lambda}{d_1+q_1E} - d_2 < q_2E$ atau $R_0{}^i < 1$ dan
   ii.$\frac{e\alpha_1\Lambda}{d_1+q_1E} < d_3$ atau $R_0{}^p < 1$
3. Analisis Kestabilan Ttik Tetap Kepunahan E_2 diperoleh nilai-nilai eigen dari $J(E_2)$ adalah sebagai berikut:
   $$\lambda_1 = \frac{Bd_3}{e\alpha_1} - \frac{\Lambda\alpha_1\alpha_2 e - \alpha_2 d_1 d_3 + \alpha_2 d_3 E q_1}{\alpha_1\alpha_3} d_2 - q_2E$$
   Karena semua parameter bernilai positif dan syarat eksistensi titik stimbang bebas penyakit, E_2 adalah $\frac{Bd_3}{e\alpha_1} < \frac{\Lambda\alpha_1\alpha_2 e - \alpha_2 d_1 d_3 + \alpha_2 d_3 E q_1}{\alpha_1\alpha_3} d_2 + q_2E$, maka cukup jelas bahwa $\lambda_1 < 0$. Sedangkan nilai eigen yang diperoleh dari akar-akar persamaan karakteristik berikut:
   $\lambda^2 + q_1\lambda + q_2 = 0$
   Menurut kriteria Routh-Hurwitz, persamaan $\lambda^2 + q_1\lambda + q_2 = 0$ akan memiliki akar-akar bilangan real negatif jika dan hanya jika $q_1 > 0$ dan $q_2 > 0$. Akan ditentukan syarat sebagai berikut:

   Pandang
   $$q_1 = \frac{\Lambda\alpha_1 e - d_1 d_3 - d_3 E q_1}{d_3} > 0$$

   Pandang
   $$q_2 = -\frac{e\alpha_1\Lambda}{d_1 + q_1E} + d_3 > 0$$

   Dari sini dapat disimpulkan bahwa titik setimbang bebas penyakit (E_2) stabil asimtotis jika$\frac{\Lambda\alpha_1 e - d_1 d_3 - d_3 E q_1}{d_3} > 0$ dan $-\frac{e\alpha_1\Lambda}{d_1+q_1E} + d_3 > 0$
4. Analisis Kestabilan Ttik Tetap Kepunahan E_3
   $$J = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$
   Dengan
   $A_{11} = -\alpha_2 P_3 + d_2 + q_2E$
   $A_{12} = -\alpha_2 P_3 + d_2 + q_2E$
   $A_{13} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 P_3 - \alpha_1 d_1 - \alpha_1 q_2 E}{B}$
   $A_{21} = \frac{Bd_2 - Be\alpha_1 S_3}{e\alpha_1 I_3}$

$$A_{22} = -\frac{\propto_2 \Lambda + \propto_2 BS_3I_3 + \propto_2 S_3d_2 - \propto_2 q_1E}{S_3\alpha_1}$$
$$A_{23} = \frac{-\propto_2 d_2 + e\alpha_1 \propto_2 S_3}{e\alpha_1 I_3}$$
$$A_{31} = \frac{e\Lambda + eBS_3I_3 - eS_3d_1 + eq_1E}{S_3}$$
$$A_{32} = \frac{e \propto_2 \Lambda + e \propto_2 BS_3I_3 - e \propto_2 S_3d_1 + e \propto_2 q_1E}{S_3\alpha_1}$$
$$A_{33} = 0$$

Dari sini diperoleh persamaan karakteristik untuk matriks $J(E_3)$ adalah sebagai berikut:

$$(\lambda^3 + \Omega_1\lambda^2 + \Omega_2\lambda + \Omega_3) = 0$$

Dengan

$$\Omega_1 = -(A_{11} + A_{22})$$
$$\Omega_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{13}A_{31} - A_{23}A_{32}$$
$$\Omega_3 = A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{23}A_{31} - A_{13}A_{21}A_{32} + A_{13}A_{22A_{31}}$$

Titik setimbang koeksistensi E_3 stabil jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristik bernilai negatif. Berdasarkan criteria Routh-Hurwitz[11], persamaan karakteristik tersebu takan memiliki akar-akar negatif jika dan hanya jika memenuhi:

a) Ω_1, Ω_2 dan $\Omega_3 > 0$

b) $\Omega_1\Omega_2 - \Omega_3 > 0$

Persamaan Ω_1. $\Omega_2$danΩ_3 mengandung banyak parameter yang sulit untuk disederhanakan. Oleh karena itu ,untuk menentukan syarat agar $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1, 2$ dan 3 rumit ditentukansecara manual. Dari sini dilakukan simulasi numerik untuk mnentukansifat kestabilan dari titik setimbang koeksistensi E_3 menggunakan bidang fase software MATLAB.

Simulasi ini dilalukan dengan memberi nilai parameter dari tiga nilai awal yang berbeda untuk masing-masing subpopulasi S,I dan P yang dinotasikan dengan X_0, X_1 dan X_2.Hal ini bertujuan untuk mengetahui kekonvergenan solusi dari masing-masing nilai awal dari parameter yang digunakan. Berikut ini adalah table untuk nilai awal pada model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahan secara konstan mangsa rentan.Nilai parameter yang digunakan merujuk dari jurnal yang ditulis oleh Sahoo (2015) pada Tabel 4.4. Simulasi ini dilakukan untuk t = 0sampai t = 150 hari.

TABEL 1

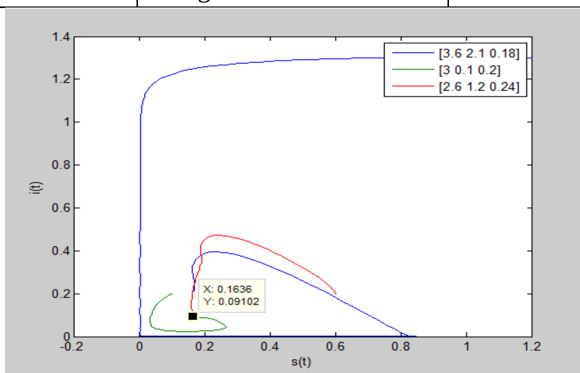
NILAI AWAL SIMULASI KESTABILAN PADA TITIK SETIMBANG E_3

Nilai awal	S	I	P	Warna
X_0	3.6	2.1	0.8	Biru
X_1	3	0.1	0.2	Hijau
X_2	2.6	1.2	0.24	Merah

TABEL 2

NILAI PARAMETER SIMULASI KESTABILAN PADA TITIK SETIMBANG E_3

Parameter	Keterangan	Parameter
Λ	Tingkat perekrutan konstan mangsa rentan	0.4
β	Koefisien penularan penyakit	1.25
α_1	Tingkat penangkapan mangsa rentan	0.25
α_2	Tingkat penangkapan mangsa terinfeksi	0.2
d_1	Kematian rata-rata dari mangsa rentan	3
d_2	Kematian rata-rata dari mangsa terinfeksi	3
d_3	Kematian rata-rata dari pemangsa	0.2
E	Upaya pemanenan	0
e	Konversi koefisiendari mangsa ke predator	0.5
q_1	Koefisien penankapan mangsa rentan	0.08
q_2	Koefisien penangkapan mangsa terinfksi	0.04



Gambar 1: Titik Tetap Koeksistensi (E_3)

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang didapat dari model eko-epidemiologi dengan waktu tunda, mangsa panen dan penambahkan secara konstan mangsa rentan diperoleh sistem persamaan diferensial non-linier yang terdiri dari tiga persamaan. Persamaan pertama merupakan laju pertumbuhan mangsa rentan , persamaan kedua merupakan laju pertumbuhan persamaan mangsa terinfeksi dan persamaan ketiga merupakan laju pertumbuhan pemangsa.

Model memiliki empat titik tetap yaitu

$$E_0 = (S_0, I_0, P_0) = (0,0,0).$$
$$E_1 = (S_1, I_1, P_1) = \left(\frac{\Lambda}{d_1 + q_1E}, 0,0\right)$$
$$E_2 = (S_2, I_2, P_2) = \left(\frac{d_3}{e\propto_1}, 0, \frac{\Lambda e\alpha_1 - d_1d_3 - d_3q_1E}{\alpha_1 d_3}\right)$$
$$E_3 = (S_3, I_3, P_3) = \left(\frac{\alpha_2P - d_2 - q_2E}{B}, \frac{d_3 - e\propto_1 S}{e\propto_2 I}, \frac{\Lambda + BSI - Sd_1 - Sq_1E}{S\alpha_1}\right)$$

REFERENSI

[1] Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. (1999). ODE Architec Companion. New York :John Willey&Sons, Inc.

[2] Sahoo, B. (2015). *Role of Additional Food in Eco-epidemiological Systemwith Diseasein the Prey*, Applieed Mathematicsand Computation, Vol 259 page 61- 79.

[3] Johri, A., Trivedi, N., Sisodiya, A., Sing, B., & Jain, S. (2012). Study of a prey-predator model with diseased prey. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, *7*(10), 489-498.

[4] Sharma, S., & Samanta, G.P. (2015). Analytic of a two prey one predator system with disease in the first prey population, Int. J. Dyn. *Control 3(3)*, 210-224

[5] Zhang, J.S.,& Sun, S.L. (2005). Analysis of eco-epidemiological model with epidemic in the predator, J. *Biomath*. 20(2),157-164.

[6] Kant, S., & Kumar, V. (2017). Stability analysis of predator–prey system with migrating prey and disease infection in both species. *Applied Mathematical Modelling*, *42*, 509-539.

[7] Hu, G.P.,& Li, X.L. (2012). Stability and Hopf bifurcation for a delayed predator-prey model with disease in theprey.*Chaos Soiton Fractals* 45(3), 229-237.

[8] Xu, R., & Zhang, S. (2013). Modelling and analysis of a delayed predator–prey model with disease in the predator. *Applied Mathematics and Computation*, *224*, 372-386.

[9] Zhou, X., Shi, X., & Song, X. (2009). Analysis of a delay prey-predator model with disease in the prey species only. *Journal of the Korean Mathematical Society*, *46*(4), 713-731.

[10] Johri, A., Trivedi, N., Sisodiya, A., Sing, B., & Jain, S. (2012). Study of a prey-predator model with diseased prey. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, *7*(10), 489-498.

[11]Merkin. D.R.(1997). Introduction to the Teory Stability. Springer,NewYork.