Metode Tipe Newton Bebas Turunan untuk Menentukan Akar Persamaan Tak Linier

Engki Mai Putra[#1], Muhammad Subhan[*2], Yusmet Rizal[*3]

[#]*Student of Mathematics Department State Universitas Negeri Padang, Indonesia*
[*]Lecturers of Mathematics Department State Universitas Negeri Padang, Indonesia

[1]engkimaiputra@yahoo.com
[2]13subhan@gmail.com
[3]yusmet_abdurrahman@yahoo.co.id

Abstract –Newton Method and Potra-Ptak Method are an iterative method which is used for solving nonlinear equation. Both of those method still have low order. Newton Method has second order convergence and Potra-Ptak Method has third order convergence. It make those method slow in getting roots approximation. Therefore, researcher modify both of those method use Taylor Series to increase the order of convergence, so we obtain Newton Type Derivative Free Method. So that, the purpose of this research is finding the roots of nonlinear equations using Derivative Free Newton Type Method, making the algorithm and determining the order of convergence. This research is theoretical research by reviewing relevant theories for solving nonlinear equation. The results of the research are Derivative Free Newton Type Method, algorithm of Derivative Free Newton Type Method, and this method has fifth order convergence.

Keywords – Potra and Ptak Method, Taylor series, Derivative Free, Order of Convergence

Abstrak –Metode Newton dan Metode Potra-Ptak adalah metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan tak linier. Kedua metode tersebut masih memiliki orde konvergensi yang rendah yaitu Metode Newton berorde dua dan Metode Potra-Ptak berorde tiga, Sehingga lambat dalam mendapatkan akar hampiran. Oleh karena itu peneliti memodifikasi kedua metode tersebut mengunakan Deret Taylor untuk meningkatkan orde konvergensinya sehingga diperoleh Metode Tipe Newton Bebas Turunan. Adapun tujuan dari penelitian ini yaitu menelaah pembentukan Metode Tipe Newton Bebas Turunan , membuat algoritma dan menentukan orde konvergensi dari metode tersebut.Penelitian ini adalah penelitian teoritis dengan mengkaji teori-teori yang relevanuntuk menyelesaikan persamaan tak linier. Selanjutnya, pendekatan masalah yang dilakukan adalah studi kepustakaan yang mengkaji prinsip penggunaan Metode Newton Bebas Turunan untuk mencari akar persamaan tak linear. hasil penelitian yang diperoleh yaitu Metode Tipe Newton Bebas Turunan, algoritma dari Metode Tipe Newton Bebas Turunan, dan metode ini memiliki orde konvergensi lima.

Kata kunci –Metode Newton, Metode Potra dan Ptak, Deret Taylor, Bebas Turunan, Orde Konvergensi

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu ilmu yang memiliki banyak manfaat dalam menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu permasalahan dalam matematika yaitu mencari solusi persamaan tak linier. Solusi dari persamaan tak linier yaitu berupa akar persamaan. Akar persamaan tak linier dapat ditemukan dengan dua cara, yaitu secara analitik dan secara numerik. Akar persamaan dari persamaan tak linier dapat ditemukan secara analitik jika masih dalam bentuk sederhana, misal $ax^2 + bx + c = 0$ (1) dengan $a, b,$dan c bilangan real dan $a \neq 0$. Persamaan (1) dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus abc yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

namun jika persamaan tak liniernya berbentuk sangat rumit maka sangat sulit diselesaikan secara analitik sehingga dibutuhkan metode numerik untuk menghampiri akar persamaan tak linier tersebut. Metode numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk merumuskan masalah-masalah matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi-operasi aritmatika (hitungan) biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) [1]. Salah satu metode numerik yang sering digunakan adalah Metode Newton dengan orde konvergensi [2]. Bentuk umum dari Metode Newton adalah:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Seiring dengan berkembangnya ilmu matematika, metode newton telah banyak mengalami modifikasi, tujuanya untuk memperoleh orde konvergensi yang tinggi, sehingga lebih efektif dalam mengahmpiri akar persamaan tak linier. Salah satunya Metode Potra-Ptak yang memiliki orde konvergensi tingkat tiga [3]. Bentuk umum dari metode ini adalah:

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \quad (2)$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Selanjutnya persamaan 3 dimodifikasi dengan melakukan beberapa pendekatan utuk meningkatkan orde konvergensi sehingga menghasilkan akar-akar hampiran yang memiliki galat yang kecil terhadap akar eksak. Diantaranya yaitu memodifikasi Metode potra –ptak menggunakan *interpolasi kuadratik*[4] dan Metode Potra dan Ptak yang dimodifikasi menggunakan *lengkungan kurva*[5].

Berdasarkan uraian di atas, maka untuk mendapatkan metode dengan orde konvergensi yang tinggi peneliti tertarik untuk melakukan modifikasi terhadap Metode Potra dan Ptak dengan deret taylor orde satu. Kemudian turunan pertama dari hasil metode tersebut didekati dengan *gradien*, sehingga terbentuklah Metode Tipe Newton Bebas Turunan. Oleh karena itu penelitian ini diberi judul ‘’Metode Tipe Newton Bebas Turunan untuk Menentukan akar Persamaan Tak Linier’’.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah studi kepustakaan,yaitu mengumpulkan teori-teori dari berbagai buku, jurnal dan sumber lain yang relevan, sehingga diperoleh jawaban terhadap permasalahan yang sedang diteliti. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk memecahkan permasalahan penelitian ini yaitu: pertama, Mengkaji pembentukan Metode Tipe Newton Bebas Turunan serta orde konvergensinya. Kedua, Menyusun algoritma Metode Tipe Newton Bebas Turunan dalam menemukan akar persamaan tak linear. Ketiga, algoritma diterapkan ke dalam program komputer. Keempat, Menganalisa galat dan kekonvergenan dari Metode Tipe Newton Bebas Turunan. Kelima, kemudian Menyimpulkan hasil yang diperoleh berdasarkan teori yang telah dipelajari.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Metode Tipe Newton Bebas Turunan*

Metode Tipe Newton Bebas Turunan merupakan metode yang diperoleh melalui ekspansi Deret Taylor, Metode Newton dan Metode Potra dan Ptak. Perhatikan Metode Potra dan Ptak berikut

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$$

kemudian dengan mengambil dua suku dari Deret Taylor $f(x_{n+1})$ disekitar z_n, diperoleh

$$f(z_n) + f'(z_n)(x_{n+1} - z_n) = 0$$

setelah dilakukan manipulasi aljabar diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (3)$$

lalu nilai $f'(z_n)$dihampiri dengan Deret Taylor dari $f'(y_n)$ disekitar z_{n+1}, dan diambil dua suku, sehingga diperoleh

$$f'(y_n) = f'(z_n)$$

sehingga persamaan (3) dapat ditulis

$$x_{n+1} = z_{n+1} - \frac{f(z_{n+1})}{f'(y_n)} \quad (4)$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

kemudian nilai $f'(x_n)$ dan $f'(y_n)$, dapat ditentukan sebagai *gradien* ,dengan

$$f'(x_n) \approx \frac{f(w_n) - f(x_n)}{f(x_n)} = \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n} \quad (5)$$

dengan $w_n = x_n + f(x_n)$

atau

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \quad (6)$$

dan

$$f'(y_n) = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \cdot \frac{f(w_n) - f(y_n)}{w_n - y_n} \cdot \frac{(w_n - x_n)}{(f(w_n) - f(x_n))} \quad (7)$$

Substitusikan persamaan (5)-(7) ke persamaan (4). Sehingga persamaan (4), dapat ditulis dalam tiga langkah iterasi yaitu

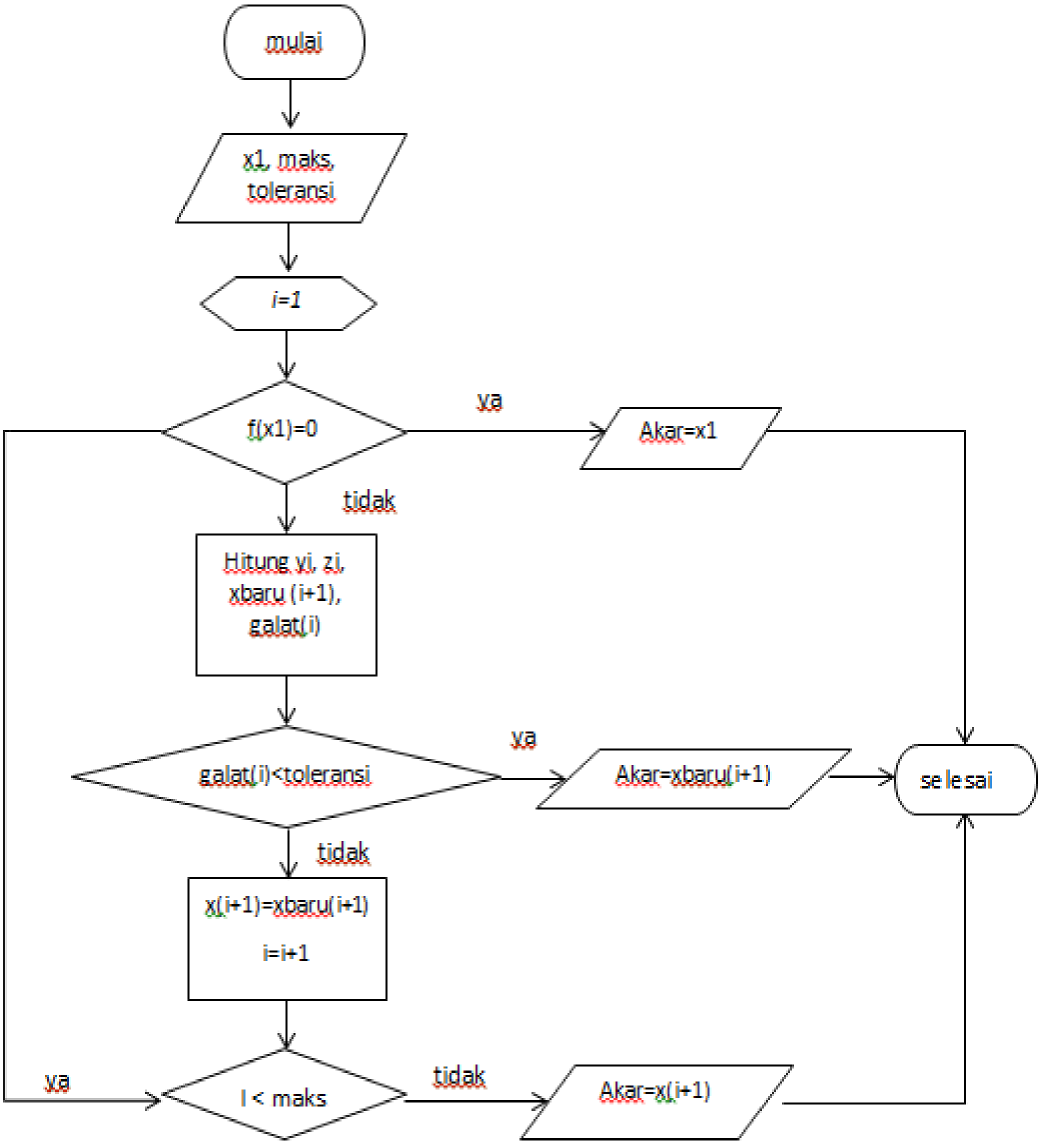
$$y_n = x_n - f(x_n) \times \frac{1}{\frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n}} \quad (8)$$

$$z_n = x_n - \frac{(f(x_n) + f(y_n)) \cdot f(x_n)}{f(w_n) - f(x_n)} \quad (9)$$

$$x_{n+1} = z_{n+1} - \frac{f(z_{n+1}) \cdot \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n}}{\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \cdot \frac{f(w_n) - f(y_n)}{w_n - y_n}} \quad (10)$$

B. *Algoritma*

Algoritma dari Metode Tipe Newton Bebas Turunan untuk mencari akar persamaan tak linier terjadi dalam tiga tahap yaitu masukan, proses dan keluaran, Sseperti yang terlihat pada gambar 1.



Gambar 1. *flowchart*

C. *Orde Konvergensi*

Teorema

Misalkan $\alpha \in I$ akar sederhana dari fungsi $f, f: I \rightarrow R$ yang terdiferensialkan pada interval terbuka I. Jika x_0 cukup dekat dengan $\propto$, maka metode iterasi persamaan (10) memiliki persamaan *error:*

$$e_{n+1} = \left(-\frac{2c_2^2c_3}{c_1^3} + \frac{6c_2^4}{c_1^4} + \frac{15c_2^4}{c_1^3} - 4c_2^2c_3 + \frac{10c_2^4}{c_2^2} - \frac{5c_2^2c_3}{c_1^2} - \frac{6c_2^2c_3}{c_1} - c_1c_2^2c_3 - c_2^4\right)e_n^5 + O(e_n^6)$$

dengan $c_k = \frac{f^k(\propto)}{k!}$

Bukti : Misalkan $\propto$ adalah akar sederhana dari $f(x_n) = 0$, sehingga $f(\propto) = 0$ dan $f'(\propto) \neq 0$maka dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor [6] $f(x_n)$disekitar $\propto$ sampai orde lima dan mengabaikan orde yang lebih tinggi diperoleh

$$f(x_n) = c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + O(e_n^6) \quad (11)$$

dengan $c_k = f^k(\propto)$ dengan $k = 1,2,3, \ldots$

sehingga

$$w_n = x_n + c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + O(e_n^6) \quad (12)$$

kemudian gunakan nilai w_n untuk menghitung nilai $f(w_n)$ dengan ekspansi Deret Taylor disekitar α,sehingga diperoleh

$$f(w_n) = (c_1^2 + c_1)e_n + (c_1^2c_2 + 3c_1c_2 + c_2)e_n^2 + (c_1^3c_3 + +3c_1^2c_3 + 2c_1c_2^2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 + c_3)e_n^3 + (c_1^4c_4 + 4c_1^3c_4 + 3c_1^2c_2c_3 + 6c_1^2c_4 + 8c_1c_2c_3 + c_2^3 + 5c_1c_4 + 5c_2c_3 + c_4)e_n^4 + (c_1^5c_5 5c_1^4c_5 + 4c_1^3c_2c_4 + 10c_1^3c_5 + 12c_1^2c_2c_4 + 3c_1^2c_3^2 + 3c_1c_2^2c_3 + 10c_1^2c_5 + 14c_1c_2c_4 + 6c_1c_3^2 + 5c_2^2c_3 + 6c_1c_5 + 6c_2c_4 + 3c_3^2 + c_5)e_n^5 \tag{13}$$

selanjutnya dihitung nilai $\frac{f(w_n)-f(x_n)}{w_n-x_n}$, dengan menggunakan persamaan (11) – (13), diperoleh

$$\frac{f(w_n)-f(x_n)}{w_n-x_n} = c_1 + (c_1c_2 + 2c_2)e_n + (c_1^2c_3 + 3c_1c_3 + c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + (c_1^3c_4 + 4c_1^2c_4 + 2c_1c_2c_3 + 6c_1c_4 + 4c_2c_3 + 4c_4)e_n^3 + (c_1^4c_5 + 5c_1^3c_5 + 3c_1^2c_2c_4 + 10c_1^2c_5 + 8c_1c_2c_4 + 2c_1c_3^2 + c_2^2c_3 + 10c_1c_5 + 7c_2c_4 + 3c_3^2 + 5c_5)e_n^4 + (-5c_1^2c_2c_5 - \frac{7c_5c_2}{c_1} - 3c_1c_2^2c_4 - c_1^2c_3c_4 - \frac{7c_4c_3}{c_1} - \frac{8c_4c_2^2}{c_1} - 5c_1c_4c_3 - 10c_1c_2c_5 - \frac{c_2^3c_3}{c_1} - c_1^3c_2c_5 - 4c_3^2c_2 - 9c_4c_3 - 8c_4c_2^2 - 11c_5c_2 - \frac{7c_3^2c_2}{c_1})\, e_n^5 \tag{14}$$

selanjutnya dicari nilai dari persamaan (8) dengan menggunakan persamaan (11) dan (14) , diperoleh

$$y_n = \alpha + \frac{c_2}{c_1}(1 + c_1)e_n^2 + \left(3c_3 + \frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^2}{c_1} - c_2^2 + c_1c_3 - \frac{2c_2^2}{c_1^2}\right)e_n^3 + \left(\frac{3c_2^3}{c_1} + c_1^2c_4 + \frac{4c_2^3}{c_1^3} - \frac{10c_2c_3}{c_1} + \frac{3c_4}{c_1} - \frac{7c_2c_3}{c_1^2} + 4c_1c_4 + 6c_4 - 7c_2c_3 - 2c_1c_2c_3 + c_2^3 + \frac{5c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \left(-\frac{4c_2^4}{c_1} - \frac{8c_2^4}{c_1^4} - c_1^2c_3^2 - 6c_1c_3^2 - \frac{12c_2^4}{c_1^3} - \frac{9c_2^4}{c_1^2} - \frac{12c_3^2}{c_1} + 13c_2^2c_3 - 16c_2c_4 + \frac{4c_5}{c_1} + 10c_1c_5 - \frac{6c_3^2}{c_1^2} + 5c_1^2c_5 + c_1^3c_5 - c_2^4 + 3c_1c_2^2c_3 - \frac{18c_2c_4}{c_1} + \frac{20c_2^2c_3}{c_1^3} - 2c_1^2c_2c_4 - 8c_1c_2c_4 - \frac{10c_2c_4}{c_1^2} + \frac{33c_2^2c_3}{c_1^2} + \frac{27c_2^2c_3}{c_1} - 12c_3^2 + 10c_5\right)e_n^5 \tag{15}$$

selanjutnya, nilai dari persamaan (15) digunakan untuk mencari nilai $f(y_n)$, diperoleh

$$f(y_n) = (c_1c_2 + c_2)e_n^2 + \left(-\frac{2c_2^2}{c_1} + 2c_3 + 3c_1c_3 - 2c_2^2 - c_1c_2^2 + c_3c_1^2\right)e_n^3 + \left(-\frac{7c_2c_3}{c_1} - 2c_2c_3c_1^2 + c_2^3c_1 + 3c_4 - 10c_2c_3 + \frac{5c_2^3}{c_1^2} - 7c_1c_2c_3 + 6c_1c_4 + 4c_2^3 + c_4c_1^3 + 4c_1^2c_4 + \frac{7c_2^3}{c_1}\right)e_n^4 + \left(3c_2^2c_3c_1^2 - 2c_2c_4c_1^3 + c_5c_1^4 - c_2^4c_1 - c_3^2c_1^3 - \frac{15c_2^4}{c_1} - 12c_1c_3^2 - \frac{12c_2^4}{c_1^3} - \frac{20c_2^4}{c_1^2} - \frac{6c_3^2}{c_1} + 35c_2^2c_3 - 18c_2c_4 + 10c_1c_5 + 10c_1^2c_5 - 6c_1^2c_3^2 + 5c_1^3c_5 - 12c_3^2 + \frac{24c_2^2c_3}{c_1^2} - 8c_1^2c_2c_4 + 15c_1c_2^2c_3 + \frac{43c_2^2c_3}{c_1} - \frac{10c_2c_4}{c_1} - 16c_1c_2c_4 - 6c_2^4 + 4c_5\right)e_n^5 \tag{16}$$

Selanjutnya nilai persamaan (9), dihitung dengan menggunakan persamaan (11), persamaan (14), dan persamaan (16), diperoleh

$$z_n - \alpha = \left(\frac{3c_2^2}{c_1} + c_2^2 + \frac{2c_2^2}{c_1^2}\right)e_n^3 + \left(-\frac{15c_2^3}{c_1^2} - 2c_2^3 + \frac{7c_2c_3}{c_2^2} + 9c_2c_3 + \frac{14c_2c_3}{c_1} + 2c_1c_2c_3 - \frac{9c_2^3}{c_1^2} - \frac{9c_2^3}{c_1}\right)e_n^4 + \left(\frac{25c_2c_4}{c_1} + 3c_2^4 + 2c_1^2c_2c_4 + 14c_3^2 + \frac{10c_2c_4}{c_1^2} - \frac{93c_2^2c_3}{c_1^2} - \frac{80c_2^2c_3}{c_1} - 34c_2^2c_3 + 24c_2c_4 + \frac{18c_2^4}{c_1} + 6c_1c_3^2 + \frac{57c_2^4}{c_1^3} + \frac{45_2^4}{c_1^2} + \frac{15c_3^2}{c_1} + 11c_1c_2c_4 - \frac{44c_2^2c_3}{c_1^3} - 6c_1c_2^2c_3 + c_1^2c_3^2 + \frac{30c_2^4}{c_1^4} + \frac{6c_3^2}{c_1^2}\right)e_n^5 \tag{17}$$

selanjutnya nilai $f(z_{n+1})$ akan dicari dengan menggunakan persamaan (17), diperoleh

$$f(z_{n+1}) = \left(c_1c_2^2 + \frac{2c_2^2}{c_1} + 3c_2^2\right)e_n^3 + \left(-\frac{9c_2^3}{c_1^2} - \frac{15c_2^3}{c_1} + \frac{7c_2c_3}{c_1} - 9c_2^3 + 14c_2c_3 - 2c_2^3c_1 + 2c_2c_3c_1^2 + 9c_1c_2c_3\right)e_n^4 + \left(25c_2c_4 + \frac{6c_3^2}{c_1} + \frac{57c_2^4}{c_1^2} + \frac{30c_2^4}{c_1^3} + \frac{45c_2^4}{c_1} + 14c_1c_3^2 - 80c_2^2c_3 + c_3^2c_1^3 + 3c_2^4c_1 + \frac{10c_2c_4}{c_1} + 11c_1^2c_2c_4 - \frac{44c_2^2c_3}{c_1^2} - \frac{93c_2^2c_3}{c_1} + 24c_1c_2c_4 - 34c_1c_2^2c_3 + 18c_2^4 + 15c_3^2 + 2c_2c_4c_1^3 - 6c_2^2c_3c_1^2 + 6c_1^2c_3^2\right)e_n^5 \tag{18}$$

selanjutnya untuk mencari nilai persamaan (10), maka dicari nilai $\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}$ dan $\frac{f(w_n)-f(y_n)}{w_n-y_n}$, dengan cara yang sama dengan persamaan (14), diperoleh

$$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = c_1 + c_2 e_n + \left(c_3 + c_2^2 + \frac{c_2^2}{c_!}\right) e_n^2 + \left(c_4 - \frac{2c_2^3}{c_1^2} - c_2^3 + c_1 c_2 c_3 + 4c_2 c_3 + \frac{3c_2 c_3}{c_1} - \frac{2c_2^3}{c_1}\right) e_n^3 + \left(-7c_2^2 c_3 + c_1^2 c_2 c_4 - 2c_1 c_2^2 c_3 + c_5 + c_3^2 - \frac{8c_2^2 c_3}{c_1^2} + c_2^4 + 4c_1 c_2 c_4 + c_1 c_3^2 + \frac{4c_2^4}{c_1^3} + \frac{5c_2^4}{c_1^2} + \frac{4c_2 c_4}{c_1} - \frac{10c_2^2 c_3}{c_1} + \frac{3c_2^4}{c_1} + \frac{2c_3^2}{c_1} + 7c_2 c_4\right) e_n^4 + \left(-4c_2^2 c_4 - \frac{4c_2^5}{c_1^4} - 2c_3^2 c_2 + 2c_3^2 c_2 + 2c_2^3 c_3 - \frac{c_2^5}{c_1^2} - \frac{3c_2^5}{c_1^2} - \frac{5c_2^2 c_4}{c_1^2} - \frac{2c_3 c_4}{c_1} - \frac{5c_2^5}{c_1^3} - \frac{8c_2^2 c_4}{c_1} - \frac{2c_5 c_2}{c_1} - \frac{7c_3^2 c_2}{c_1} + \frac{12c_2^3 c_3}{c_1^2} + \frac{10c_2^3 c_3}{c_1^3} + \frac{8c_2^3 c_3}{c_1} - c_1 c_2^2 c_4 \frac{5c_3^2 c_2}{c_1^2}\right) e_n^5 \quad (19)$$

dan

$$\frac{f(w_n)-f(y_n)}{w_n-y_n} = c_1 + (c_1 c_2 + c_2) e_n + \left(-c_1 c_2^2 + 2c_1 c_3 + \frac{c_2^2}{c_1} + c_3 + 2c_2^2\right) e_n^2 + \left(\frac{3c_2 c_3}{c_1} + c_1 c_2 c_3 + c_4 - c_1 c_2^3 + 3c_1 c_4 - 3c_2^3 - \frac{2c_2^3}{c_1} - \frac{2c_2^3}{c_1^2} + 8c_2 c_3\right) e_n^3 + \left(\frac{4c_2 c_4}{c_1} + \frac{4c_2^4}{c_1^3} - \frac{11c_2^2 c_3}{c_1} + c_5 + \frac{2c_3^2}{c_1} - 9c_1 c_2^2 c_3 + \frac{5c_2^4}{c_1^2} - \frac{8c_2^2 c_3}{c_1^2} + 7c_3^2 + 13c_2 c_4 - 14c_2^2 c_3 + \frac{5c_2^4}{c_1} + c_2^4 c_1 + 3c_1 c_3^2 + 4c_1 c_5 + c_2^4 + 7c_1 c_2 c_4\right) e_n^4 + \left(-20c_1 c_2^2 c_4 - 17c_1 c_2 c_3^2 - \frac{5c_2^2 c_4}{c_1^2} + 4c_1 c_3 c_4 + \frac{2c_2^3 c_3}{c_1^2} + \frac{14c_2^3 c_3}{c_1} + 9c_1 c_2^3 c_3 - \frac{8c_2 c_3^2}{c_1} + c_1 c_2 c_5 + \frac{5c_3 c_4}{c_1} - \frac{7c_2^2 c_4}{c_1} + \frac{5c_2 c_5}{c_1} - \frac{c_2^3 c_3}{c_1^3} - \frac{5c_2 c_3^2}{c_1^2} + 6c_2^3 c_3 - 24c_2 c_3^2 - \frac{c_2^5}{c_1^2} + \frac{4c_2^5}{c_1^4} - c_1 c_2^5 \frac{2c_2^5}{c_1^3} - 22c_2^2 c_4 + 12c_2 c_5 + 14c_3 c_4 - \frac{2c_2^5}{c_1} - 2c_2^5\right) e_n^5 \quad (20)$$

Selanjutnya dicari nilai dari $\frac{f(z_{n+1}) \times \frac{f(w_i)-f(x_i)}{w_i-x_i}}{\frac{f(y_i)-f(x_i)}{y_i-x_i} \times \frac{f(w_i)-f(y_i)}{w_i-y_i}}$ dengan menggunakan (14) dan (18) – (20), diperoleh

$$\frac{f(z_{n+1}) \times \frac{f(w_i)-f(x_i)}{w_i-x_i}}{\frac{f(y_i)-f(x_i)}{y_i-x_i} \times \frac{f(w_i)-f(y_i)}{w_i-y_i}} = \left(-30c_2^2 c_3 + \frac{18c_2^4}{c_1} + \frac{15c_3^2}{c_1} + \frac{10c_2 c_4}{c_1^2} + 6c_1 c_3^2 + \frac{35c_2^4}{c_1^2} + c_1^2 c_3^2 - \frac{88c_2^2 c_3}{c_1^2} - \frac{42c_2^2 c_3}{c_1^2} + 24c_2 c_4 + 11c_1 c_2 c_4 - 4c_1 c_2^2 c_3 - \frac{74c_2^2 c_3}{c_1} + \frac{25c_2 c_4}{c_1} + 2c_1^2 c_2 c_4 + \frac{24c_2^4}{c_1^4} + 4c_2^4 + 14c_3^2 + \frac{42c_2^4}{c_1^3} + \frac{6c_3^2}{c_1^2}\right) e_n^5 + \left(\frac{7c_2 c_3}{c_1^2} + 9c_2 c_3 - \frac{15c_2^3}{c_1^2} - \frac{9c_2^3}{c_1^2} + 2c_1 c_2 c_3 + \frac{14c_2 c_3}{c_1} - 2c_2^3 - \frac{9c_2^3}{c_1^3}\right) e_n^4 + \left(\frac{2c_2^2}{c_1^2} + c_2^2 + \frac{3c_2^2}{c_1}\right) e_n^3 \, (21)$$

substitusikan nilai persamaan (17) dan persamaan (21) ke persamaan (12), kemudian disederhanakan, diperoleh

$$e_{n+1} = \left(-\frac{2c_2^2 c_3}{c_1^3} + \frac{6c_2^4}{c_1^4} + \frac{15c_2^4}{c_1^3} - 4c_2^2 c_3 + \frac{10c_2^4}{c_1^2} - \frac{5c_2^2 c_3}{c_1^2} - \frac{6c_2^2 c_3}{c_1} - c_1 c_2^2 c_3 - c_2^4\right) e_n^5 + O(e_n^6)$$

D. *Simulasi Numerik*

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerikyang bertujuan untuk membandingkan banyak iterasi dari Metode Newton (MN) dengan Metode Tipe Newton Bebas Turunan (MTNBT) dalam menemukan akar hampiran dari persamaan tak linier.Beberapa fungsi yang digunakan diambil dari skripsi[7]. Perbandingannya menggunakan program Matlab R2013a, dengan menggunakan kriteria pemberhentian program komputasi yang sama untuk setiap metode yaitu :

1. Jika $f(x_n) = 0$,
2. Jika $|x_{n+1} - x_n| < \text{toleransi}$

Dengan toleransi adalah sebesar 10^{-7} dan maksimum iterasi 100. Hasil ditampilkan pada tabel1, sebagai berikut:

TABEL I
TABEL PERBANDINGAN

fungsi	Tebakan awal	Akar hampiran		Banyak iterasi	
		MN	MTNBT	MN	MTNBT
$\left(\log(x)+\sqrt{x}-5\right)^3$	3	8,3094324569968396	8,3094326003707408	44	25
$(\sin(x))^2-x^2+1$	-2	-1.404491659946959	-1,4044916482153413	5	4
x^3-7x+6	6	2,000000000000015	2,000000000036133	9	7
$x^4+\sin x$	-2	-0,9496166887147244	-0.9496166887146629	8	6
x^3+4x^2-10	-1	1,365230013427879	1,365230013414097	25	10

Berdasarkan jumlah iterasi, maka dari tabel I terlihat bahwa terdapat perbedaan yang signifikan antara kedua metode. Yaitu Metode Tipe Newton Bebas Turunan lebih unggul daripada MetodeNewton.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, maka dapat disimpulkan yaitu pembentukan Metode Tipe Newton Bebas Turunan dapat dicari dalam beberapa tahap. Pertama, ambil dua suku dari Deret Taylor $f(x_{n+1})$ disekitar z_n. Kedua, turunan $f'(z_n)$ dihampiri dengan Deret Taylor dari $f'(y_n)$. Ketiga, nilai $f'(x_n)$ dan $f'(y_n)$ dihampiri dengan *gradien*, sehingga diperoleh Metode Tipe Newton Bebas Turunan. Algoritma dari Metode Tipe Newton Bebas Turunan . metode ini memiliki orde konvergensi lima.

REFERENSI

[1] Sutarno, Heru. 2005. *Metode Numerik.* Bandung: PT Sinar Baru Algesindo.

[2] Susila, I nyoman. 1992. *Metode Numerik*. Bandung: FMIPA ITB.

[3] Kumar, Manoj dkk. 2015. "*A New Fifth Order Derivative Free Newton-Type Method for Solving Nonlinear Equations*". Paper. India: Department of Mathematics, Montilal Nehru National Institute of Technology.

[4] Zuhrowardi. 2013. ''Konvergensi Metode Potra-Ptak dengan Menggunakan Kelengkungan Kurva". Skripsi. Riau: UIN SUSKA Riau.

[5] Suharyono, Yuzi Andri. 2013.''Konvergensi Metode Potra-Ptak dengan Menggunakan Interpolasi Kuadratik". Skripsi. Riau:UIN SUSKA Riau.

[6] Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

[7] Putra, Engki Mai. 2016. "Metode Tipe Newton Modifikasi Bebas Turunan untuk Menentukan Akar Persamaan Tak Linier". Skripsi. Padang:Universitas Negeri Padang.