

Analisis Metode Homotopi dalam Menyelesaikan Persamaan Lorenz

Robi Kurniawan^{#1}, Dewi Murni^{*2}

[#]*Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang
Jl. Prof. Hamka, Air Tawar Padang, Indonesia*

¹robikurniawan566@gmail.com

²dewimunp@gmail.com

Abstract—Lorenz equations is one of the result of mathematical modeling of the three dimensional phenomenon of convection (air) in the atmosphere. In recent years, the Lorenz equations has attracted the attention of scientists and engineering because of the phenomenon chaos was produced. The complexity of the chaos produced cause the Lorenz equations to be very difficult to solve. This study aims to solve the Lorenz equations by using homotopy analysis method and then comparing it with the approximation on the ode45 solver. Solution using a homotopy method is done by constructing a zero-order deformation equation into a high-order deformation equation. In this method there is freedom in choosing a auxiliary linear operator, initial approximation, and convergent–control parameter \hbar that can guarantee the convergence solution. The resulting approximation is a series. The results of the study obtained 10th order homotopy approximation from the Lorenz equations, which is when $\hbar = -4/5$ it approach the ode45 approximation. Unfortunately the period of homotopy approximation is a very short.

Keywords –Lorenz equations, *Chaos*, Homotopy Method.

Abstrak – Persamaan Lorenz adalah salah satu hasil pemodelan matematika dari fenomena konveksi (udara) tiga dimensi di atmosfer. Dalam beberapa tahun terakhir, persamaan Lorenz sangat menarik perhatian para ilmuwan sains dan rekayasa teknik karena adanya fenomena ketidakteraturan (*chaos*) yang dihasilkan. Kompleksnya *chaos* yang dihasilkan menyebabkan persamaan Lorenz sangat sulit dilakukan penyelesaiannya. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan hampiran solusi persamaan Lorenz menggunakan analisis metode homotopi dan kemudian membandingkannya dengan hampiran pada solver ode45. Penyelesaian menggunakan metode homotopi dilakukan dengan mengkonstruksi persamaan deformasi orde nol menjadi persamaan deformasi orde tinggi. Pada metode ini terdapat kebebasan dalam memilih operator linear bantu, pendekatan awal, dan parameter kontrol-konvergen \hbar yang dapat menjamin kekonvergenan solusi hampiran. Hampiran yang dihasilkan berupa deret. Hasil penelitian didapatkan hampiran homotopi orde 10 dari persamaan Lorenz, yang mana pada saat $\hbar = -4/5$ hampiran tersebut memiliki penyelesaian yang mendekati hampiran ode45. Akan tetapi periode hampiran yang dapat dihampiri metode homotopi hanya dalam waktu yang sangat singkat.

Kata kunci –Persamaan Lorenz, *Chaos*, Metode Homotopi.

PENDAHULUAN

Alam semesta diciptakan oleh Allah SWT untuk kepentingan umat manusia, agar manusia dapat menjalankan fungsi dan kedudukannya di muka bumi. Dalam ilmu pengetahuan, alam semesta berperan sebagai salah satu sumber ilmu pengetahuan. Banyak para ahli menciptakan dan mengembangkan suatu teori berdasarkan

fenomena-fenomena yang terjadi di alam semesta. Fenomena-fenomena yang terjadi di alam dapat diinterpretasikan menjadi suatu persamaan matematika, yang disebut dengan pemodelan matematika.

Salah satu hasil pemodelan matematika yang dalam beberapa tahun terkahir ini menarik perhatian para ilmuwan sains dan rekayasa teknik

adalah persamaan Lorenz. Persamaan Lorenz merupakan suatu sistem persamaan diferensial biasa yang bersifat nonlinear. Persamaan Lorenz pertama kali diperkenalkan oleh Edward N. Lorenz (1963) ketika membuat model matematika dari konveksi (udara) tiga dimensi di atmosfer. Hal yang menjadi perhatian dari persamaan ini adalah lintasan pemecahan dalam ruang tiga dimensi pada persamaan tersebut memiliki ciri lintasan yang tidak teratur (*chaos*), dan tidak pernah menempuh lintasan yang sama. Jika titik awal perhitungan dirubah sedikit saja, maka akan muncul pola orbit dengan lintasan berbeda.

Menurut [1] bentuk persamaan Lorenz adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= rx(t) - y(t) - x(t) \cdot z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -bz(t) + x(t) \cdot y(t)\end{aligned}\quad (1)$$

dimana $x(t)$ adalah intensitas gerak konveksi (udara), $y(t)$ adalah perbedaan suhu horizontal antara arus naik dan turun, $z(t)$ adalah perbedaan suhu vertikal, dan dengan tiga parameter yang menjelaskan karakter dari sistem tersebut yaitu: σ adalah bilangan prandtl, r adalah bilangan Rayleigh, dan b adalah perbandingan luas dan ketebalan (keadaan geometri fluida).

Ada banyak kemungkinan nilai dari masing-masing parameter persamaan Lorenz, yang mana masing-masingnya dapat memberikan perilaku *chaos* yang beranekaragam. Referensi [2] menyatakan bahwa nilai parameter σ dan b yang pantas untuk fluida di atmosfer bumi adalah $\sigma = 10$ dan $b = 8/3$ dengan nilai r yang bervariasi. Kemudian menurut [1], bilangan Rayleigh r yang digunakan Lorenz pada [3] sedikit lebih kritis yaitu $r = 28$ dan sampai sekarang nilai tersebut masih sering digunakan oleh para peneliti. Oleh karena itu, pada penelitian ini nilai parameter yang digunakan adalah $\sigma = 10$, $b = 8/3$, dan $r = 28$.

Kompleksnya *chaos* yang dihasilkan serta bersifat nonlinear menyebabkan persamaan Lorenz sangat sulit dilakukan penyelesaiannya. Dalam beberapa buku dan jurnal penelitian, persamaan Lorenz ini hanya dilakukan analisis terhadap perilaku dinamika solusinya dan konstruksi model diskrit (diskretisasi).

Berbagai macam metode telah dikembangkan oleh para ahli untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear. Referensi [4] menyatakan bahwa ada dua standarisasi untuk menentukan

keberhasilan suatu metode analitik persamaan nonlinear: (i) metode tersebut dapat selalu memberikan hampiran analitik yang efisien (tepat guna), dan (ii) metode tersebut dapat menjamin hampiran analitik yang cukup akurat untuk semua nilai parameter. Pada tahun 1992, seorang ilmuwan China, Shijun Liao, dalam disertasi S3-nya memperkenalkan suatu metode yang dapat memenuhi kedua standarisasi metode analitik persamaan nonlinear di atas, yang dikenal dengan Metode Homotopi. Metode ini menggunakan konsep topologi untuk mendapatkan hampiran analitik dari persamaan diferensial nonlinear. Pada metode ini terdapat kebebasan dalam memilih operator linear bantu, pendekatan awal, dan parameter kontrol – konvergen yang dapat menjamin kekonvergenan solusi deret homotopi.

Metode homotopi telah banyak digunakan oleh para peneliti untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik berupa persamaan diferensial linear maupun persamaan diferensial nonlinear. Beberapa diantaranya adalah sebagai berikut: (i) Rashidi, Domairry, dan Dinarvand (2009) dalam [5] mendapatkan solusi eksplisit persamaan Jaulent-Miodek, (ii) Alfu Laila (2016) dalam [6] menyelesaikan model *Predator-Prey*, (iii) Molabahrani dan Khani (2007) dalam [7] menyelesaikan persamaan Burgers-Huxley, dan masih banyak lagi. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaan Lorenz menggunakan analisis metode homotopi.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah metode studi literatur, yaitu dengan cara mempelajari berbagai literatur yang relevan terhadap permasalahan dan kemudian mengkaitkannya. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan nilai parameter dan syarat awal dari persamaan Lorenz, menentukan pendekatan awal homotopi (*initial approximation*) yang sesuai dari persamaan Lorenz, mendapatkan hampiran homotopi (*homotopy approximation*) persamaan Lorenz dengan menggunakan analisis metode homotopi, dan terakhir membandingkan solusi hampiran persamaan Lorenz menggunakan analisis metode homotopi dan solver ode45 pada MATLAB.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Analisis Metode Homotopi dalam Menyelesaikan Persamaan Lorenz

Persamaan Lorenz telah diberikan pada persamaan (1). Berdasarkan batasan masalah, nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini adalah $\sigma = 10$, $\rho = 28$, dan $\beta = -8/3$ sehingga persamaan (1) menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -10x(t) + 10y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= 28x(t) - y(t) - x(t) \cdot z(t) \quad (2) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -\frac{8}{3}z(t) + x(t) \cdot y(t)\end{aligned}$$

dengan pendekatan awal (*initial approximation*) yang dipilih adalah $x_0(t) = e^t$, $y_0(t) = e^t$, $z_0(t) = e^t$ dengan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

Dalam analisis metode homotopi, langkah pertama yang dilakukan adalah mendefinisikan operator linear bantu. Operator linear bantu dari persamaan (2) didefinisikan sebagai berikut:

$$L[\phi_i(t, q)] = \frac{d\phi_i(t, q)}{dt} \quad (3)$$

untuk $i = 1, 2, 3$ dan

$$L[c] = 0 \quad (4)$$

dimana $q \in [0, 1]$ merupakan suatu parameter, L

merupakan operator linear bantu, ϕ_i merupakan suatu fungsi yang bergantung pada variabel bebas t dan parameter q , dan c adalah konstanta.

Kemudian mendefinisikan operator nonlinear. Berdasarkan operator linear (3), operator nonlinear dari persamaan (2) dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}N_1[\phi_i(t, q)] &= \frac{d\phi_1(t, q)}{dt} + 10\phi_1(t, q) - 10\phi_2(t, q) \\ N_2[\phi_i(t, q)] &= \frac{d\phi_2(t, q)}{dt} - 28\phi_1(t, q) + \phi_2(t, q) \\ &\quad + \phi_1(t, q) \cdot \phi_3(t, q) \\ N_3[\phi_i(t, q)] &= \frac{d\phi_3(t, q)}{dt} + \frac{8}{3}\phi_2(t, q) \\ &\quad - \phi_1(t, q) \cdot \phi_2(t, q)\end{aligned} \quad (5)$$

dimana N_1 , N_2 , dan N_3 adalah operator-operator nonlinear.

Langkah selanjutnya adalah mengkonstruksi persamaan deformasi orde-nol sebagai berikut

$$\begin{aligned}(1-q)L[\phi_1(t, q) - x_0(t)] &= q\hbar_1 N_1[\phi_1(t, q)] \\ (1-q)L[\phi_2(t, q) - y_0(t)] &= q\hbar_2 N_2[\phi_2(t, q)] \quad (6) \\ (1-q)L[\phi_3(t, q) - z_0(t)] &= q\hbar_3 N_3[\phi_3(t, q)]\end{aligned}$$

dimana $x_0(t)$, $y_0(t)$, dan $z_0(t)$ adalah suatu pendekatan awal (*initial approximation*) dari solusi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ berturut-turut.

Kemudian \hbar_1 , \hbar_2 , dan \hbar_3 adalah parameter-parameter bantu tak-nol yang nantinya

dapat dipilih secara bebas untuk kekonvergenan solusi deret. Dari persamaan (6), ketika $q = 0$ diperoleh,

$$\begin{aligned}L[\phi_1(t, q) - x_0(t)] &= 0 \\ L[\phi_2(t, q) - y_0(t)] &= 0 \\ L[\phi_3(t, q) - z_0(t)] &= 0\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\phi_1(t, 0) &= x_0(t) \\ \phi_2(t, 0) &= y_0(t) \\ \phi_3(t, 0) &= z_0(t)\end{aligned} \quad (7)$$

dan ketika $q = 1$ diperoleh,

$$\begin{aligned}N_1[\phi_1(t, 1)] &= 0 \\ N_2[\phi_2(t, 1)] &= 0 \\ N_3[\phi_3(t, 1)] &= 0\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\phi_1(t, 1) &= x(t) \\ \phi_2(t, 1) &= y(t) \\ \phi_3(t, 1) &= z(t)\end{aligned} \quad (8)$$

Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan nilai parameter q dari 0 ke 1, menyebabkan solusi dari $\phi_i(t, q)$ untuk $i = 1, 2, 3$, berubah dari pendekatan awal (*initial approximation*) $x_0(t)$, $y_0(t)$, dan $z_0(t)$ ke solusi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ berturut-turut.

Dengan mengembangkan fungsi $\phi_i(t, q)$ ke dalam bentuk deret Taylor terhadap q yang dihitung di sekitar $q = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\phi_1(t, q) &= \phi_1(t, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} x_m(t) q^m \\ \phi_2(t, q) &= \phi_2(t, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(t) q^m \quad (9) \\ \phi_3(t, q) &= \phi_3(t, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_m(t) q^m\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}x_m &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi_1(t, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \\ y_m &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi_2(t, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \\ z_m &= \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi_3(t, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}\end{aligned} \quad (10)$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (9), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\phi_1(t, q) &= x_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} x_m(t) q^m \\ \phi_2(t, q) &= y_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(t) q^m \\ \phi_3(t, q) &= z_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_m(t) q^m\end{aligned}\quad (11)$$

Jika operator linear bantu L , pendekatan awal (*initial approximation*) $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$, dan parameter bantu \hbar_i ($i = 1, 2, 3$) dipilih dengan tepat, maka deret (11) akan konvergen di $q = 1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\phi_1(t, 1) &= x_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} x_m(t) \\ \phi_2(t, 1) &= y_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(t) \\ \phi_3(t, 1) &= z_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_m(t)\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} x_m(t) \\ y(t) &= y_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(t) \\ z(t) &= z_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} z_m(t)\end{aligned}\quad (12)$$

yang mana solusi deret (12) akan menjadi solusi dari persamaan Lorenz (2).

Selanjutnya akan dikonstruksi *persamaan deformasi orde-m*. Sebelumnya didefinisikan vektor,

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= \{x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)\} \\ \bar{y}_n &= \{y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t)\} \\ \bar{z}_n &= \{z_0(t), z_1(t), \dots, z_n(t)\}\end{aligned}$$

Dengan menurunkan persamaan (6) terhadap q sebanyak m kali, kemudian mengevaluasi pada $q = 0$, dan terakhir dibagi oleh $m!$, maka diperoleh *persamaan deformasi orde-m* sebagai berikut

$$\begin{aligned}L[x_m(t) - \chi_m x_{m-1}(t)] &= \hbar_1 R_{1,m}(\bar{x}_{m-1}) \\ L[y_m(t) - \chi_m y_{m-1}(t)] &= \hbar_2 R_{2,m}(\bar{y}_{m-1}) \\ L[z_m(t) - \chi_m z_{m-1}(t)] &= \hbar_3 R_{3,m}(\bar{z}_{m-1})\end{aligned}\quad (13)$$

dimana

$$\begin{aligned}R_{1,m}(\bar{x}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N_1[\phi_1(t, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \\ R_{2,m}(\bar{y}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N_2[\phi_2(t, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \\ R_{3,m}(\bar{z}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N_3[\phi_3(t, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0}\end{aligned}\quad (14)$$

dan

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5) ke persamaan (14), diperoleh

$$\begin{aligned}R_{1,m}[\bar{x}_{m-1}] &= \frac{d}{dt}(x_{m-1}(t)) + 10x_{m-1}(t) \\ &\quad - 10y_{m-1}(t) \\ R_{2,m}[\bar{y}_{m-1}] &= \frac{d}{dt}(y_{m-1}(t)) - 28x_{m-1}(t) \\ &\quad + y_{m-1}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} x_k(t) \cdot z_{m-1-k}(t) \\ R_{3,m}[\bar{z}_{m-1}] &= \frac{d}{dt}(z_{m-1}(t)) + \frac{8}{3}z_{m-1}(t) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-1} x_k(t) \cdot y_{m-1-k}(t)\end{aligned}\quad (15)$$

Kemudian dengan menggunakan definisi (3) dan $\hbar = \hbar_1 = \hbar_2 = \hbar_3$ maka solusi dari *persamaan deformasi orde-m* (13) diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}x_m(t) &= \chi_m x_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t R_{1,m}(\bar{x}_{m-1}) d\tau \\ y_m(t) &= \chi_m y_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t R_{2,m}(\bar{y}_{m-1}) d\tau \\ z_m(t) &= \chi_m z_{m-1}(t) + \hbar \int_0^t R_{3,m}(\bar{z}_{m-1}) d\tau\end{aligned}\quad (16)$$

Selanjutnya terhadap syarat awal $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$, dipilih pendekatan awal (*initial approximation*) $x_0(t) = e^t$, $y_0(t) = e^t$, $z_0(t) = e^t$ dengan syarat awal $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = 1$, $z_0(0) = 1$. Sehingga dari persamaan (16) diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= e^t \\
x_1(t) &= \hbar e^t - \hbar \\
x_2(t) &= -\frac{5}{2}\hbar e^{2t} + (271\hbar^2 + \hbar)e^t - 265\hbar^2 t \\
&\quad - \frac{537}{2}\hbar^2 - \hbar \\
x_3(t) &= \frac{5}{9}\hbar^3 e^{3t} + \left(-\frac{365}{12}\hbar^3 - 5\hbar^2\right)e^{2t} \\
&\quad + \left(\frac{11468}{3}\hbar^3 + 542\hbar^2 + \hbar\right)e^t - \frac{3185}{2}\hbar^3 t^2 \\
&\quad - \frac{7525}{2}\hbar^3 t - \frac{136541}{36}\hbar^3 - 530\hbar^2 t \\
&\quad - 537\hbar^2 - \hbar \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= e^t \\
y_1(t) &= \frac{1}{2}\hbar e^{2t} - 26\hbar e^t + \frac{51\hbar}{2} \\
y_2(t) &= -\frac{1}{6}\hbar^2 e^{3t} + \left(\frac{37}{12}\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar\right)e^{2t} \\
&\quad + \left(-\frac{505}{6}\hbar^2 - 26\hbar\right)e^t + \frac{107}{2}\hbar^2 t \\
&\quad + \frac{325}{4}\hbar^2 + \frac{51}{2}\hbar \\
y_3(t) &= \frac{1}{24}\hbar^3 e^{4t} + \left(\frac{23}{9}\hbar^3 - \frac{1}{3}\hbar^2\right)e^{3t} \\
&\quad + \left(\frac{123}{61}\hbar^3 + \frac{37}{6}\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar\right)e^{2t} \\
&\quad + \left(-\frac{2461}{9}\hbar^3 t - \frac{23275}{3}\hbar^3 - \frac{505}{3}\hbar^2 - 26\hbar\right)e^t \\
&\quad + \frac{14947}{4}\hbar^3 t^2 + \frac{91871}{12}\hbar^3 t \\
&\quad + \frac{273029}{36}\hbar^3 + 107\hbar^2 t + \frac{325}{2}\hbar^2 + \frac{51}{2}\hbar \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_0(t) &= e^t \\
z_1(t) &= -\frac{1}{2}\hbar e^{2t} + \frac{11}{3}\hbar e^t - \frac{19}{6}\hbar \\
z_2(t) &= -\frac{1}{6}\hbar^2 e^{3t} + \left(\frac{34}{3}\hbar^2 - \frac{1}{2}\hbar\right)e^{2t} \\
&\quad + \left(-\frac{199}{18}\hbar^2 + \frac{11}{3}\hbar\right)e^t - \frac{76}{9}\hbar^2 t - \frac{1}{9}\hbar^2 \\
&\quad - \frac{19}{6}\hbar \\
z_3(t) &= \frac{1}{24}\hbar^3 e^{4t} + \left(-\frac{73}{108}\hbar^3 - \frac{1}{3}\hbar^2\right)e^{3t} \\
&\quad + \left(-\frac{967}{18}\hbar^3 + \frac{68}{3}\hbar^2 - \frac{1}{2}\hbar\right)e^{2t} \\
&\quad + \left(+\frac{423}{2}\hbar^3 t - \frac{12559}{108}\hbar^3 - \frac{199}{9}\hbar^2 + \frac{11}{3}\hbar\right)e^t \\
&\quad - \frac{304}{27}\hbar^3 t^2 + \frac{905}{54}\hbar^3 t \\
&\quad + \frac{36859}{216}\hbar^3 - \frac{152}{9}\hbar^2 t - \frac{2}{9}\hbar^2 - \frac{19}{6}\hbar \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Perhitungan dilakukan dengan bantuan software *Maple* sampai orde 10. Jadi, bentuk hampiran homotopi (*homotopy approximation*) orde 10 persamaan Lorenz dengan menggunakan pendekatan awal (*initial approximation*) $x_0(t) = e^t$, $y_0(t) = e^t$, $z_0(t) = e^t$ dan syarat awal $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + \sum_{m=1}^{10} x_m(t) \\
&= e^t + (\hbar e^t - \hbar) - \frac{5}{2}\hbar e^{2t} + (271\hbar^2 + \hbar)e^t \\
&\quad - 265\hbar^2 t - \frac{537}{2}\hbar^2 - \hbar + \dots
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0(t) + \sum_{m=1}^{10} y_m(t) \\
&= e^t + \left(\frac{1}{2}\hbar e^{2t} - 26\hbar e^t + \frac{51\hbar}{2}\right) - \frac{1}{6}\hbar^2 e^{3t} \\
&\quad + \left(\frac{37}{12}\hbar^2 + \frac{1}{2}\hbar\right)e^{2t} + \left(-\frac{505}{6}\hbar^2 - 26\hbar\right)e^t
\end{aligned} \quad (18)$$

$$+ \frac{107}{2} \hbar^2 t + \frac{325}{4} \hbar^2 + \frac{51}{2} \hbar + \dots$$

$$z(t) = z_0(t) + \sum_{m=1}^{10} z_m(t)$$

$$= e^t + \left(-\frac{1}{2} \hbar e^{2t} + \frac{11}{3} \hbar e^t - \frac{19}{6} \hbar \right) + \frac{1}{6} \hbar^2 e^{3t}$$

$$+ \left(\frac{34}{3} \hbar^2 - \frac{1}{2} \hbar \right) e^{2t} + \left(-\frac{199}{18} \hbar^2 + \frac{11}{3} \hbar \right) e^t$$

$$- \frac{76}{9} \hbar^2 t - \frac{1}{9} \hbar^2 - \frac{19}{6} \hbar + \dots \quad (19)$$

B. Analisis Perbandingan Solusi Hampiran Persamaan Lorenz Menggunakan Analisis Metode Homotopi dan Solver ode45

Persamaan (17)-(19) merupakan hampiran penyelesaian persamaan Lorenz dengan menggunakan analisis metode homotopi. Hampiran tersebut dilakukan perhitungan sampai orde 10 dan mengandung parameter \hbar yang berguna untuk kekonvergenan solusi hampiran. Pada penelitian ini, peneliti juga membandingkan hampiran penyelesaian yang dilakukan dengan metode homotopi dengan hampiran dari solver ode45. Ode45 adalah suatu analisis kerja dari solver persamaan diferensial pada software MATLAB. Berikut solusi hampiran penyelesaian persamaan Lorenz menggunakan solver ode45 dan analisis metode homotopi untuk beberapa nilai \hbar .

TABEL 1
SOLUSI HAMPIRAN PERSAMAAN LORENZ MENGGUNAKAN ANALISIS METODE HOMOTOPI DAN ODE45

t	Variabel	ode45	Hampiran Homotopi pada Parameter				
			h=-1	h=-4/5	h=-1/2	h=-1/5	h=-1/10
0	x(t)	1	0,99615	1,0009312	0,9999979	1	1
	y(t)	1	0,9580169	1,0001531	0,9999943	1	1
	z(t)	1	1,0007935	1,0008495	0,9999991	1	1
0,0277289	x(t)	1,0920597	1,0873413	1,0930939	1,0912569	1,0626983	1,0356732
	y(t)	1,7348162	1,6945792	1,7353133	1,7332096	1,6511249	1,4823802
	z(t)	0,9665973	0,9671234	0,9674812	0,9664337	0,9693395	0,9827952
0,0527289	x(t)	1,3187111	1,3140869	1,3197098	1,3150814	1,2143984	1,1109348
	y(t)	2,4896204	2,452857	2,4905428	2,4817715	2,2704334	1,9282844
	z(t)	0,9654807	0,9657705	0,966389	0,9637906	0,9563133	0,9732147
0,0777289	x(t)	1,6809871	1,6761475	1,6820221	1,6695032	1,4493817	1,225332
	y(t)	3,4212064	3,3834964	3,4221617	3,3966312	2,9523813	2,3922705
	z(t)	1,0099225	1,0100358	1,0107099	1,0017935	0,9602904	0,9699401
0,1027289	x(t)	2,1980256	2,1939697	2,1990662	2,1684343	1,7645636	1,3776134
	y(t)	4,6178371	4,5821182	4,6190345	4,5563793	3,7259083	2,8815128
	z(t)	1,1325803	1,1333331	1,1324196	1,1035495	0,9855549	0,9737948
0,1277289	x(t)	2,9053465	2,9016113	2,90625	2,8393092	2,1600218	1,566919
	y(t)	6,1781177	6,145649	6,1802186	6,0455818	4,6186734	3,4030129
	z(t)	1,3914757	1,404635	1,387114	1,3043925	1,0376818	0,9857719
0,1527289	x(t)	3,8538706	3,8461914	3,8554688	3,7215344	2,6386776	1,7927635
	y(t)	8,2127978	8,2215938	8,223369	7,9603615	5,6576313	3,9636324
	z(t)	1,8880432	1,9776216	1,8686408	1,6567185	1,1236516	1,0070442
0,1777289	x(t)	5,1083536	5,095459	5,1152954	4,8662031	3,2060229	2,055021
	y(t)	10,834725	10,997624	10,882861	10,412485	6,8695531	4,5701232
	z(t)	2,7959236	3,2508383	2,7323398	2,236451	1,2520083	1,0389751
0,2	x(t)	6,5425292	6,5107422	6,5683899	6,1580914	3,7924428	2,3194895
	y(t)	13,73119	14,395849	13,89509	13,154716	8,1168076	5,1544616
	z(t)	4,1801974	5,7829012	4,024814	3,0310299	1,4103751	1,0776649

Untuk melihat perbandingan solusi hampiran analisis metode homotopi dan solver ode45 penyelesaian persamaan Lorenz menggunakan diberikan tabel galat sebagai berikut.

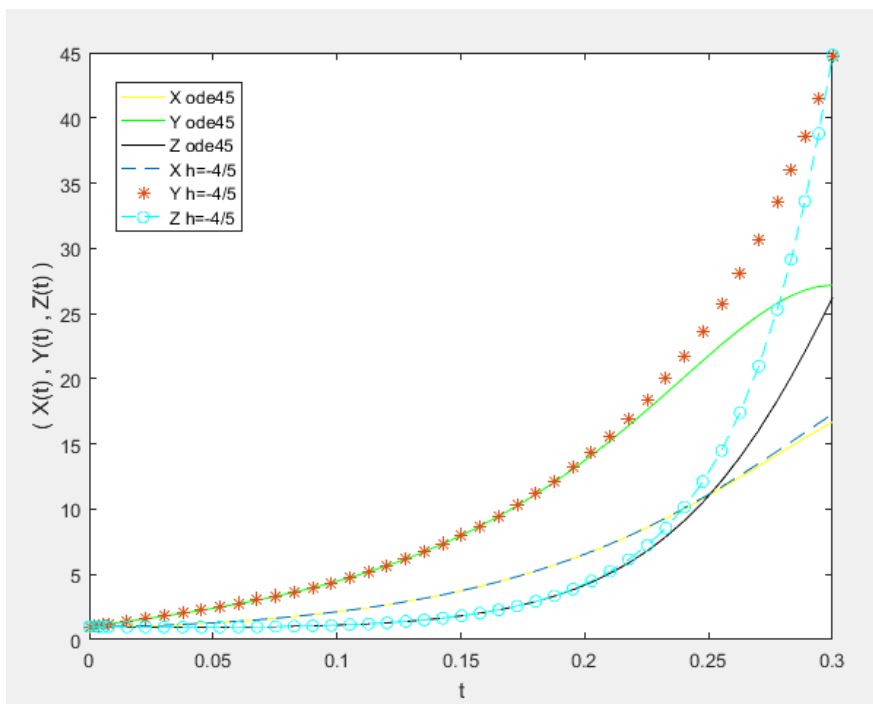
TABEL 2
GALAT SOLUSI HAMPIRAN PERSAMAAN LORENZ MENGGUNAKAN ANALISIS METODE HOMOTOPI DAN ODE45

t	Variabel	Galat Hampiran Homotopi pada Parameter				
		h=-1	h=-4/5	h=-1/2	h=-1/5	h=-1/10
0	x(t)	0,00385	0,0009312	2,105E-06	2,095E-09	1,372E-12
	y(t)	0,0419831	0,0001531	5,722E-06	2,794E-09	0
	z(t)	0,0007935	0,0008495	9,161E-07	8,004E-11	2,416E-13
0,0277289	x(t)	0,0047184	0,0010341	0,0008028	0,0293615	0,0563865
	y(t)	0,0402369	0,0004972	0,0016066	0,0836913	0,2524359
	z(t)	0,0005261	0,0008839	0,0001636	0,0027422	0,0161979
0,0527289	x(t)	0,0046242	0,0009987	0,0036297	0,1043127	0,2077763
	y(t)	0,0367634	0,0009224	0,0078489	0,219187	0,5613361
	z(t)	0,0002898	0,0009084	0,00169	0,0091674	0,007734
0,0777289	x(t)	0,0048397	0,001035	0,0114839	0,2316054	0,4556551
	y(t)	0,0377099	0,0009553	0,0245751	0,4688251	1,0289358
	z(t)	0,0001133	0,0007874	0,008129	0,0496321	0,0399824
0,1027289	x(t)	0,0040559	0,0010405	0,0295914	0,433462	0,8204122
	y(t)	0,0357188	0,0011975	0,0614577	0,8919288	1,7363243
	z(t)	0,0007528	0,0001607	0,0290308	0,1470254	0,1587855
0,1277289	x(t)	0,0037352	0,0009035	0,0660373	0,7453247	1,3384275
	y(t)	0,0324687	0,0021009	0,1325359	1,5594442	2,7751048
	z(t)	0,0131594	0,0043617	0,0870831	0,3537939	0,4057037
0,1527289	x(t)	0,0076792	0,0015982	0,1323362	1,215193	2,061107
	y(t)	0,008796	0,0105712	0,2524363	2,5551665	4,2491653
	z(t)	0,0895784	0,0194024	0,2313247	0,7643915	0,880999
0,1777289	x(t)	0,0128946	0,0069418	0,2421505	1,9023307	3,0533326
	y(t)	0,1628996	0,0481361	0,4222394	3,9651715	6,2646014
	z(t)	0,4549147	0,0635838	0,5594726	1,5439152	1,7569485
0,2	x(t)	0,031787	0,0258607	0,3844378	2,7500864	4,2230397
	y(t)	0,6646589	0,1638998	0,5764736	5,6143825	8,5767285
	z(t)	1,6027038	0,1553833	1,1491675	2,7698223	3,1025325
Rata-Rata	x(t)	0,0086871	0,0044826	0,0967191	0,8235196	1,3573486
	y(t)	0,1179151	0,0253815	0,1643533	1,7064219	2,8271813
	z(t)	0,2403146	0,027369	0,2295625	0,6267211	0,7076537

Dari Tabel 2 dapat diketahui bahwa untuk beberapa parameter ($\hbar = -1$, $\hbar = -4/5$, $\hbar = -1/2$, $\hbar = -1/5$, $\hbar = -1/10$), rata-rata galat yang dihasilkan hampiran homotopi pada saat $\hbar = -4/5$ lebih kecil dibandingkan dengan rata-rata galat nilai \hbar lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa hampiran homotopi orde 10 yang diperoleh pada persamaan (17)-(19), memiliki penyelesaian yang menghampiri penyelesaian

ode45 ketika pemilihan nilai parameter $\hbar = -4/5$. Akan tetapi, dari Tabel 1 juga dapat diketahui bahwa periode hampiran yang dapat dihampiri oleh metode homotopi hanya dalam waktu yang sangat singkat, yaitu dalam waktu 0,2 detik.

Berikut diberikan grafik penyelesaian persamaan Lorenz menggunakan solver ode45 dan analisis metode homotopi untuk pemilihan parameter $\hbar = -4/5$.



Gambar 1 Grafik Hampiran Homotopi untuk $h = -4/5$ dan ode45 Persamaan Lorenz

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan di atas maka diperoleh bentuk hampiran homotopi orde 10 dari persamaan Lorenz ,yakni pada persamaan (17)-(19). Penyelesaian persamaan Lorenz dengan metode homotopi dan solver ode45 dapat disimpulkan bahwa untuk beberapa parameter ($\hbar = -1$, $\hbar = -4/5$, $\hbar = -1/2$, $\hbar = -1/5$, $\hbar = -1/10$), hampiran homotopi orde 10 memiliki penyelesaian yang menghampiri penyelesaian ode45 ketika pemilihan nilai parameter $\hbar = -4/5$. Akan tetapi, periode hampiran yang dapat dihampiri oleh metode homotopi hanya dalam waktu yang sangat singkat, yaitu dalam waktu 0,2 detik.

REFERENSI

- [1] Sparrow, Colin. 1982. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. New York/Berlin: Springer-Verlag.
- [2] Brannan, James R & Boyce, William E. 2011. *Differential Equations with Boundary Value Problems: Modern Methods and Applications*. USA: Wiley.
- [3] Lorenz, Edward. 1963. "Deterministic Flow". *Journal of the Atmospheric Sciences*. Vol. 20. Hlm. 130—141.
- [4] Liao, Shijun. 2012. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. China: Springer.
- [5] Rashidi, M.M., Domairry, G., & Dinarvand, S. 2008. "The Homotopy Analysis Method for Explicit Analytical Solutions of Jaulent-Miodek Equations". Hlm.431—439.
- [6] Laila, Alfu. 2016. "Metode Homotopi dalam Menyelesaikan Model Predator-Prey". *Skripsi tidak diterbitkan*. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- [7] Molabahrami, A., & Khani, F. 2007. "The Homotopy analysis Method to solve the Burgers-Huxley Equation". *Jurnal Analisis Nonlinear*. Hlm.589—600.