Optimisasi Penyusunan Jadwal Menggunakan Pendekatan Pembangkit Kolom *(Column Generation)*

Nur Shayara Kamila [#1], Yerizon[*2], Meira Parma Dewi[*3]

[#]*Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*
[*]*Lecturers of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*

[1] kamilashayara20@gmail.com
[2]yerizon@yahoo.com
[3]meiradaud@gmail.com

Abstract – Scheduling problem can be modeled by using linear integer programming and completed using the column generation method. Column generation methods taking sub-set of the set of large columns to be resolved. This new column is generated when variables corresponding to that column potentially optimize the purpose function. The purpose of this research is to model integer program for scheduling, forming process with column generation approach, and get optimization result from scheduling. This research is the oretical research. Which is a literature study based on the relevant sources. Based on the result, obtained model scheduling problem in the form of linear integer program, the scheduling model is processed by the column generation method, that is Master Problem formation, Restricted Master Problem, then RMP is formed dual so tested using pricing problem until got optimal result. The method was applied to the sample in order to get the most optimal schedule.

Keywords – scheduling, linear programming, integer programming, column generation

Abstrak– Permasalahan penjadwalan dapat dimodelkan dengan menggunakan pemograman linier integer dan diselesaikan menggunakan metode pendekatan pembangkit kolom *(Column Generation)*. Metode pembangkit kolom mengambil sub himpunan dari himpunan kolom yang besar untuk diselesaikan. Kolom baru ini dibangkitkan ketika variabel yang bersesuaian dengan kolom tersebut berpotensi mengoptimalkan fungsi tujuan. Tujuan dari penelitian ini adalah memodelkan program integer untuk penyusunan jadwal, membentuk proses dengan pendekatan *column generation*, dan mendapatkan hasil optimasi dari penjadwalan. Penelitian ini adalah penelitian teoritis. Selanjutnya, pendekatan masalah yang dilakukan merupakan studi kepustakaan yang berpedoman pada sumber yang relevan. Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh model masalah penjadwalan dalam bentuk program linier integer. Model penjadwalan diproses dengan metode *column generation*, yaitu pembentukan *Master Problem*, pembentukan *Restricted Master Problem (RMP),* kemudian *RMP* dibentuk dual sehingga diujikan menggunakan *pricing problem* sampai didapat hasil optimal. Metode tersebut diaplikasikan ke dalam contoh sehingga didapat jadwal yang paling optimal.

Kata Kunci– penjadwalan, program linear, program linier bilangan bulat, pembangkit kolom

PENDAHULUAN

Penjadwalan merupakan kegiatan yang harus dimiliki oleh setiap orang agar dapat membantu dalam melakukan aktivitasnya sehari-hari. Masalah penjadwalan biasanya terdapat proses pembuatan jadwal yang cukup rumit, khususnya penjadwalan yang memiliki kombinasi yang sangat besar. Karena proses ini membutuhkan ketelitian dan waktu yang cukup banyak agar tidak tumpang tindih antara kegiatan yang satu dengan kegiatan yang lain. Maka dari itu, masalah penjadwalan dapat dipecahkan atau dicari solusinya yaitu salah satunya dengan menggunakan teknik-teknik penyelesaian dalam program linear.

Program linier banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi, meliputi perencanaan aktivitas untuk mendapatkan hasil maksimal, yaitu sebuah hasil yang mencapai tujuan terbaik (menurut model matematika) di antara semua kemungkinan alternatif yang ada [1]. Namun untuk menyelesaikan masalah penjadwalan program linier yang digunakan adalah program bilangan bulat (integer programming), karena dalam penjadwalan tidak ada variable yang bernilai pecahan. Pemograman bilangan bulat (integer programming) adalah sebuah model penyelesaian matematis yang memungkinkan hasil penyelesaian kasus program linier yang berupa bilangan pecahan diubah menjadi bilangan bulat tanpa meninggalkan optimalisasi penyelesaian [3]. Salah satu cara menyelesaikan pemograman linier bilangan bulat dengan menggunakan metode pembangkit kolom (column generation).

Metode pembangkit kolom (column generation) telah sukses digunakan untuk penyelesaian beberapa optimasi kombinatorik dan masalah penjadwalan [2]. Langkah pertama dalam menyelesaikan persoalan optimasi penjadwalan ini yaitu menentukan pola penjadwalan yang mungkin kemudian menentukan kombinasi-kombinasi pola yang layak. Permasalahan penjadwalan ini dimodelkan dengan menggunakan pemograman linier bilangan bulat. Langkah selanjutnya yaitu persoalan dibentuk ke dalam bentuk program linier baku. Bentuk ini kemudian diselesaikan dengan teknik *column generation*, yaitu mengambil sub himpunan dari himpunan kolom yang besar untuk diselesaikan. Kolom baru ini dibangkitkan hanya saat diperlukan, yaitu ketika variabel yang bersesuaian dengan kolom tersebut berpotensi mengoptimalkan fungsi tujuan. Ide dasar dari teknik pembangkit kolom adalah untuk mengefisiensi suatu kolom dengan harga akhir yang efisien (positif dalam persoalan minimum).

Kemungkinan kombinasi pola penjadwalan jumlahnya sangat besar, oleh karena itu akan digunakan pendekatan column generation yang dibantu penyelesaiannya menggunakan software lingo.

Adapun tujuan penelitian ini adalah memodelkan program bilangan bulat untuk penyusunan jadwal, membentuk proses dalam menyelesaikan program bilangan bulat dengan pendekatan column generation, mendapatkan hasil optimasi dari penyusunan jadwal dengan menggunakan pendekatan column generation.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan , dimana penyelesaian permasalahannya mengikuti beberapa langkah yaitu meninjau permasalahan, mengumpulkan dan mengaitkan teori-teori yang relevan dengan permasalahan tentang optimisasi penyusunan jadwal dengan program bilangan bulat menggunakan pendekatan column generation, mempelajari dan menelaah lebih mendalam teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan optimasi penyusunan jadwal dengan program bilangan bulat menggunakan pendekatan column generation, membuat tahapan-tahapan penggunaan pendekatan column generation untuk mengoptimalkan penjadwalan, pembentukan model penjadwalan menggunakan pemograman linier integer menurut asumsi yang ada, menyelesaikan masalah penjadwalan tersebut dengan menggunakan pendekatan column generation, menyusun tabel jadwal dari program yang telah dihasilkan, dan menarik kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dikerjakan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Pemodelan Penyusunan Jadwal dengan Menggunakan Program Bilangan Bulat (integer programming)*

Untuk membentuk pemodelan penjadwalan tersebut akan dibuat variable-variabel yang menunjukkan sumber *h* ke tujuan *i* pada waktu ke *j*. Atau dapat diilustrasikan sebagai berikut:

TABEL 1.
TABEL KOMBINASI SUMBER h , TUJUAN i, DAN WAKTU j

	Tujuan / waktu	*i*=1	*i*=2	……	*i*=m
Sumber *h*=1	*j*=1	$x_{1,1,1}$	$x_{1,2,1}$	……	$x_{1,m,1}$
	j=2	$x_{1,1,2}$	$x_{1,2,2}$	……	$x_{1,m,2}$
	…….	……….	………	……	………
	j=n	$x_{1,1,n}$	$x_{1,2,n}$	……	$x_{1,m,n}$
……….	…….	………	………	……	………
Sumber *h=l*	*j*=1	$x_{l,1,1}$	$x_{l,2,1}$	……	$x_{l,m,1}$
	j=2	$x_{l,1,2}$	$x_{l,2,2}$	……	$x_{l,m,2}$
	…….	………	………	……	………
	j=n	$x_{l,1,n}$	$x_{l,2,n}$	……	$x_{l,m,n}$

Berdasarkan tabel diatas dapat kita tentukan variabel keputusan dari penjadwalan pada sumber *h*, tujuan *i*, dan waktu j, yaitu:

$$x_{h,i,j} = \begin{Bmatrix} 1, \text{jika sumber } h \text{ ditugaskan pada} \\ \text{tujuan } i \text{ pada waktu } j \\ 0, \qquad \text{lainnya} \end{Bmatrix}$$

Dimana, $h = 1,2,\ldots,l$, $i = 1,2,\ldots,m$, dan $j = 1,2,\ldots,n$. Jika diberikan masing-masing bobot dimisalkan dengan $p_{h,i,j}$, maka dapat dibentuk fungsi tujuannya berdasarkan tabel di atas yaitu sebagai berikut:

Maksimumkan

$$\sum_{1\le h\le l} \sum_{1\le i\le m} \sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j} \qquad (1)$$

Menentukan batasan-batasan yang dianggap sangat umum dalam menjadwalkan sesuatu, misalkan:

1) Tidak ada sumber yang ditugaskan pada tujuan dan waktu yang sama.

$$\sum_{1\le h\le l} x_{h,i,j} = 1, \quad \forall i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

2) Terpenuhinya jumlah waktu pada setiap tujuan

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n} x_{h,i,j} = n_i, \quad \forall i = 1,2,\dots,m \qquad (3)$$

Maka bentuk pemodelan dari masalah penjadwalan akan ditunjukan sebagai berikut:
maksimum

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j}$$

Kendala

$$\sum_{1\le h\le l} x_{h,i,j} = 1, \quad \forall i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n} x_{h,i,j} = n_i, \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$

$$x_{h,i,j} \in \{0,1\} \qquad (4)$$

B. Proses Pengoptimalan Penyusunan Jadwal Menggunakan Pendekatan Pembangkit Kolom (Column Generation)

Untuk menyelesaiakan formulasi dari model masalah penjadwalan di atas dengan menggunakan teknik pembangkit kolom, terlebih dahulu ditentukan masalah induk (*master problem*/MP) dari model masalah penjadwalan.

1) Menentukan Master Problem (MP)

Pada permasalahan (4), pembentukan variable kolom yang *feasible* ditentukan sesuai dengan kasus penjadwalan yang ada. Misalkan didefinisikan $K_{h,i} = \{x_{h,i,1}, x_{h,i,2}, \dots, x_{h,i,k_{hi}}\}$ adalah himpunan semua kemungkinan penjadwalan oleh sumber *h* dan tujuan *i*, dengan $x_{h,i,k_{hi}}$ adalah kemungkinan penjadwalan ke-*k* oleh sumber *h* dan tujuan *i*. Dengan menggunakan dekomposisi Dantzig-Wolfe, $x_{h,i}$ dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$x_{h,i} = \sum_{1\le k\le q} x_{h,i,k}\, y_{h,i,k}$$

$$\sum_{1\le k\le q} y_{h,i,k} = 1 \qquad (5)$$

$$y_{h,i,k} \in \{0,1\}, \quad k = 1,\dots,q$$

Kemudian subtitusikan (5) ke (4), maka akan diperoleh maksimum

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le k\le q}\left(\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j,k}\right) y_{h,i,k} \qquad (6)$$

Kendala

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}\, y_{h,i,k} = 1, \quad \forall i = 1,2,\dots,m,$$
$$j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}\, y_{h,i,k} = n_i, \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{1\le k\le q} y_{h,i,k} = 1, \quad h = 1,2,\dots,l, \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$y_{h,i,k} \in \{0,1\} \quad h = 1,2,\dots,l,$$
$$i = 1,2,\dots,m, \quad k = 1,2,\dots,q$$

Atau misalkan didefinisikan $K_h = \{x_{h,1}, x_{h,2}, \dots, x_{h,k_h}\}$ adalah himpunan semua kemungkinan penjadwalan oleh sumber *h*. Hal ini terjadi jika sumber *h* dan tujuan *i* identik yaitu $K_{h,i} = K_h$. Dengan menggunakan dekomposisi Dantzig-Wolfe, x_h dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$x_h = \sum_{1\le k\le q} x_{h,k}\, y_{h,k}$$

$$\sum_{1\le k\le q} y_{h,k} = 1 \qquad (7)$$

$$y_{h,i,k} \in \{0,1\} \quad k = 1,\dots,q$$

Kemudian subtitusikan (7) ke (5), maka akan diperoleh:

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le k\le q}\left(\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j,k}\right) y_{h,k} \qquad (8)$$

Kendala

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}\, y_{h,k} = 1, \quad \forall i = 1,2,\dots,m,$$
$$j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}\, y_{h,k} = n_i, \quad \forall i = 1,2,\dots,m$$

$$\sum_{1\le k\le q} y_{h,k} = 1, \quad h = 1,2,\dots,l$$

$$y_{h,k} \in \{0,1\} \quad h = 1,2,\dots,l, \quad k = 1,2,\dots,q$$

2) Membentuk Restricted Master Problem (RMP)

Restricted master problem (RMP) adalah formulasi masalah yang merupakan bagian dari *master problem* yang hanya menggunakan K', dengan $K' \subset K$, dimana K adalah semua himpunan pola penjadwalan yang *feasible*. Membentuk RMP ini dengan cara memilih secara acak kolom yang mungkin mengoptimalkan fungsi tujuan. Misalkan pada *master problem* (6)
maksimum

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le k\le q}\left(\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j,k}\right) y_{h,i,k} \qquad (9)$$

Kendala

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}\, y_{h,i,k} = 1, I' \in I, J' \in J \qquad (10)$$

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}\, y_{h,i,k} = n_i, \quad I' \in I \qquad (11)$$

$$\sum_{1\le k\le q} y_{h,i,k} = 1, H' \in H \;, I' \in I \qquad (12)$$

$$y_{h,k} \in \{0,1\} \quad H' \in H, \qquad K' \in K$$

Kemudian persamaan dari RMP diselesaikan sehingga didapatkan solusi awal.

3) Membentuk Dual

Setelah didapatkan solusi optimal dari RMP, kita akan membentuk dual dari RMP (9), misalkan didefiniskan variable dual dari kendala (10) adalah w_{ij}, kendala (11) adalah v_i, dan kendala (12) adalah u_{hi}, sehingga permasalahan dual adalah

Minimum

$$\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} w_{ij} + \sum_{1\le i\le m} v_i + \sum_{1\le h\le n}\sum_{1\le i\le m} u_{hi} \qquad (13)$$

Kendala

$$\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} w_{ij} + \sum_{1\le i\le m} v_i + \sum_{1\le h\le n}\sum_{1\le i\le m} u_{hi} \ge \sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j} \qquad (14)$$

$$h = 1,2,\dots,l, i = 1,2,\dots,m , j = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,q$$

selesaikan masalah dual di atas kemudian diperiksa apakah keadaan optimal tersebut juga berlaku untuk MP

4) Pricing Problem

Ambil persamaan dari kendala RMP dual (14), yaitu:

$$\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} w_{ij} + \sum_{1\le i\le m} v_i + \sum_{1\le h\le n}\sum_{1\le i\le m} u_{hi} \ge \sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}$$

Atau

$$\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j} - \left(\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n} w_{ij} + \sum_{1\le i\le m} v_i + \sum_{1\le h\le n}\sum_{1\le i\le m} u_{hi}\right) \le 0$$

$$\sum_{1\le j\le n}\left(p_{h,i,j} - \sum_{1\le i\le m} w_{ij}\right) - \sum_{1\le i\le m} v_i - \sum_{1\le h\le n}\sum_{1\le i\le m} u_{hi} \le 0 \qquad (15)$$

Untuk memaksimumkan (3.14) terhadap *J*, maka bentuk *pricing problem* menjadi sebagai berikut:

$$\max_{1\le j\le n}\left[p_{h,i,j} - w_{ij}\right] - v_i - u_{hi} \quad h = 1,2,\dots,l, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (16)$$

Dari bentuk *pricing problem* di atas untuk menentukan apakah solusi optimal RMP juga optimal untuk MP, maka akan ditentukan sesuai dengan kriteria pemberhentian

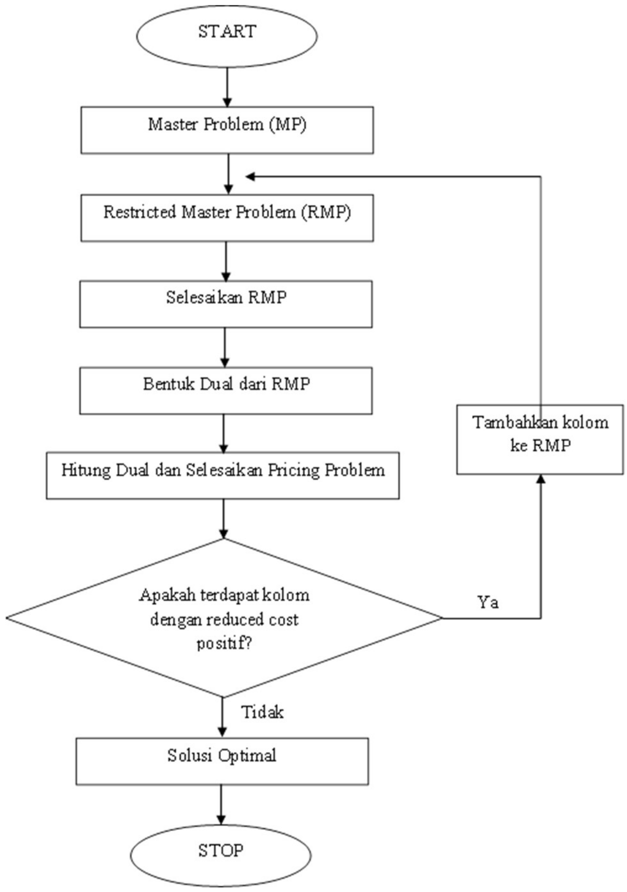
5) Kriteria pemberhentian

Proses pembangkitan kolom berhenti jika semua *reduced cost* dari semua variabel bernilai ≤ 0. Untuk permasalahan penjadwalan di atas maka ketentuannya sebagai berikut:

1. Jika $\max_{1\le j\le n}\left[p_{h,i,j} - w_{ij}\right] - v_i - u_{hi} \le 0$, maka proses berhenti dan solusi optimal RMP juga merupakan solusi optimal MP
2. Jika $\max_{1\le j\le n}\left[p_{h,i,j} - w_{ij}\right] - v_i - u_{hi} > 0$, maka solusi optimal RMP bukan solusi optimal MP, sehingga dibangkitkan kembali kolom/variabel lainnya yang diaggap dapat mengoptimalkan MP dengan membentuk kembali RMP. Dan RMP tersebut diselesaikan kembali sampai didapatkan *reduced cost* ≤ 0.

6) Flowchart metode column generation

Untuk mengetahui lebih jelas mengenai metode *column generation*, maka dapat dilihat pada flowchart berikut ini:



Gambar. 1 *Flow Chart* metode *column generation*

C. *Contoh Penyelesaian Penyusunan Jadwal Menggunakan Teknik Pembangkit Kolom*

Terdapat 4 kelas yang terdiri dari 2 kelas IPA dan 2 kelas IPS. Dimana masing-masing memiliki mata pelajaran umum dan mata pelajaran jurusan. Untuk setiap mata pelajaran memiliki periode waktu yang berbeda yaitu untuk mata pelajaran untuk Ujian Nasional adalah Matematika, Bahasa Indo, Bahasa Ing, Biologi, Fisika, Kimia, Ekonomi, Sosiologi dan Geografi memiliki 3 periode waktu dan mata pelajaran PKN, Agama, Sejarah, TIK, Kesenian, Kewirausahaan, Bahasa daerah, Bahasa Jepang, Bahasa Mandarin, Penjas memiliki 2 periode waktu, Jadwal ini harus di alokasikan dalam 1 minggu dengan periode waktu seharinya sebagai berikut:

TABEL 2.
TABEL PERIODE WAKTU DALAM SEHARI

Periode waktu	Se nin	Sela sa	Rabu	Kamis	Jum' at	Sab tu
07.00 – 07.50	1	9	17	25	31	35
07.50 – 08.40	2	10	18	26	32	36
08.40 – 09.30	3	11	19	27	33	37
09.30 – 10.00	Istirahat pertama					
10.00 – 10.50	4	12	20	28	34	38
10.50 – 11.40	5	13	21	29		
11.40 – 12.30	6	14	22	30		
12.30 – 13.20	Istirahat kedua					
13.20 – 14.10	7	15	23			
14.10 – 15.00	8	16	24			

Maka jumlah periode waktu dalam seminggu adalah 38. Mata pelajaran pada periode waktu tertentu juga memiliki bobot yang berbeda-beda. Oleh karena diberikan bobot mata pelajaran pada tiap periode waktu dengan 3 tingkat yaitu,

0 = tidak bisa
1 = bisa
2 = sangat bisa

Maka bobot mata pelajaran tersebut dapat kita bentuk sebagai berikut:

TABEL 4
BOBOT MATA PELAJARAN PADA TIAP PERIODE WAKTU

Periode Waktu	Matematika, B. Indo, B.Ing	Bio, fis, Kim,Eko, Sos,Geo, PKN,Agama, Sejarah	TIK, B. Daerah, B.Jepang, B. Mandarin	Kesenian ,Kewirausahaan, dan Penjas
1	2	2	1	0
2	2	2	1	0
3	2	2	1	1
4	2	2	1	1
5	2	2	1	1
6	0	2	1	2
7	0	2	1	2
8	2	2	1	0
9	2	2	1	0
10	2	2	1	0
11	2	2	1	1
12	2	2	1	1
13	2	2	1	1
14	0	2	1	2
15	0	2	1	2
16	2	2	1	0
17	2	2	1	0
18	2	2	1	0
19	2	2	1	1
20	2	2	1	1
21	2	2	1	1
22	0	2	1	2
23	0	2	1	2
24	2	2	1	0
25	2	2	1	0
26	2	2	1	0
27	2	2	1	1
28	2	2	1	1
29	2	2	1	1
30	0	1	1	2
31	0	1	1	2
32	0	1	1	2
33	0	1	1	2
34	0	1	1	2
35	0	0	1	2
36	0	0	1	2
37	0	0	1	2
38	0	0	1	2

Maka tentukanlah penjadwalan yang optimal dari masalah diatas menggunakan teknik pembangkit kolom!

Penyelesaian:

Diketahui:

Terdapat tiga indeks yaitu mata pelajaran, kelas, dan periode waktu jaga, maka kita misalkan,

H = terdapat 19 mata pelajaran, misalkan dengan himpunan mata pelajaran {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s}

I = terdapat 4 kelas yaitu IPA1,IPA 2,IPS 1, dan IPS 2,maka misalkan himpunan kelas {1,2,3,4}

J = terdapat 38 periode waktu maka misalkan himpunan periode waktu {1, 2, …,38}

Sebelum menyelesaikan masalah di atas ada beberapa hal yang harus ditentukan, yaitu sebagai berikut

1) Pada kasus di atas terdapat mata pelajaran yang sama disetiap kelas. Jika mata pelajaran tersebut diajarkan masing-masing oleh seorang guru, maka pada setiap kelas tidak boleh diajarkan mata pelajaran yang sama di periode waktu yang sama. Pada kasus ini kita berikan kendala tambahan sebagai berikut:

$$\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k}y_{h,i,k} \le 1,$$
$$\forall h = a,\dots,s \;\; j = 1,\dots,38$$

2) Mata pelajaran memiliki jumlah periode waktu yang berbeda, maka akan dibentuk pola penjadwalan berdasarkan jumlah periode waktu tiap mata pelajaran. Asumsikan bahwa mata pelajaran tiap periode waktunya harus dijadwalkan berurutan.

Untuk mata pelajaran yang memiliki 3 periode waktu, sebagai berikut:

TABEL 5.
POLA PENJADWALAN MATA PELAJARAN 3 PERIODE WAKTU

Hari	Pola	periode waktu dalam sehari							
Senin	Pola 1	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 2	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 3	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 4	1	2	3	4	5	6	7	8

	Pola 5	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 6	1	2	3	4	5	6	7	8
Selasa	Pola 7	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 8	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 9	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 10	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 11	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 12	1	2	3	4	5	6	7	8
Rabu	Pola 13	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 14	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 15	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 16	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 17	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 18	1	2	3	4	5	6	7	8
Kamis	Pola 19	1	2	3	4	5	6		
	Pola 20	1	2	3	4	5	6		
	Pola 21	1	2	3	4	5	6		
	Pola 22	1	2	3	4	5	6		
Jumat	Pola 23	1	2	3	4				
	Pola 24	1	2	3	4				
Sabtu	Pola 26	1	2	3	4				
	Pola 27	1	2	3	4				

Untuk mata pelajaran yang memiliki 2 periode waktu, sebagai berikut:

TABEL 6.
POLA PENJADWALAN MATA PELAJARAN 2 PERIODE WAKTU

Hari	Pola	periode waktu dalam sehari							
Senin	Pola 1	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 2	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 3	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 4	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 5	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 6	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 7	1	2	3	4	5	6	7	8
Selasa	Pola 8	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 9	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 10	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 11	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 12	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 13	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 14	1	2	3	4	5	6	7	8
Rabu	Pola 15	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 16	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 17	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 18	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 19	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 20	1	2	3	4	5	6	7	8
	Pola 21	1	2	3	4	5	6	7	8
Kamis	Pola 22	1	2	3	4	5	6		
	Pola 23	1	2	3	4	5	6		
	Pola 24	1	2	3	4	5	6		
	Pola 25	1	2	3	4	5	6		
	Pola 26	1	2	3	4	5	6		
Jumat	Pola 27	1	2	3	4				
	Pola 28	1	2	3	4				
	Pola 29	1	2	3	4				
Sabtu	Pola 31	1	2	3	4				
	Pola 32	1	2	3	4				
	Pola 32	1	2	3	4				

1) Master Problem

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le k\le q}\left(\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j,k}\right) y_{h,i,k}$$

Kendala

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k} y_{h,i,k} = 1, \qquad \forall i = 1,2,3,4,$$
$$j = 1,2,\dots,38$$

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k} y_{h,i,k} = n_i, \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{1\le k\le q} y_{h,i,k} = 1, \qquad h = 1,2,\dots,s, \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le q} x_{h,i,j,k} y_{h,i,k} \le 1, \qquad \forall h = 1,2,\dots,s \quad j$$
$$= 1,2,\dots,38$$

$$y_{h,i,k} \in \{0,1\} \quad h = 1,2,\dots,s, i = 1,2,3,4, \quad k = 1,2,\dots,32$$

2) Restricted Master Problem (RMP)

Master problem di atas akan kita rubah menjadi *restricted master problem* (RMP) dengan cara memilih secara acak kolom yang mungkin mengoptimalkan fungsi tujuan, yaitu $K' \subset K$, dimana K adalah semua himpunan pola penjadwalan yang *feasible.* Misalkan pilih 10 pola secara acak dari setiap mata pelajaran dan kelas.

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le k\le q}\left(\sum_{1\le j\le n} p_{h,i,j}\, x_{h,i,j,k}\right) y_{h,i,k}$$

Kendala

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{K'\in K} x_{h,i,j,k} y_{h,i,k} = 1, \qquad \forall i = 1,2,3,4,$$
$$j = 1,2,\dots,38$$

$$\sum_{1\le h\le l}\sum_{1\le j\le n}\sum_{K'\in K} x_{h,i,j,k} y_{h,i,k} = n_i, \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{K'\in K} y_{h,i,k} = 1, \qquad h = 1,2,\dots,s, \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

$$\sum_{1\le j\le n}\sum_{K'\in K} x_{h,i,j,k} y_{h,i,k} \le 1, \qquad \forall h = 1,2,\dots,s \quad j$$
$$= 1,2,\dots,38$$

$$y_{h,i,k} \in \{0,1\} \quad h = 1,2,\dots,s, i = 1,2,3,4, \quad K' \in K$$

3) Membentuk Dual

Untuk menunjukkan apakah bentuk model diatas sudah optimal, maka akan dibentuk dual dari masalah di atas. Diberikan variable dual untuk kendala pertama w_{ij}, kendala kedua v_{hi}, kendala ketiga u_i, dan dan kendala keempat t_{hj} pada kendala-kendala RMP . Dual ini diselesaikan menggunakan lingo 17.0.

4) Pricing Problem

Dan untuk menunjukan RMP sudah optimal kita hitung *pricing problem* dengan nilai dual yang telah didapat, dengan rumus sebagai berikut:

$$\max_{1\le j\le n}(p_{hij} - w_{ij} - t_{hj}) - v_{hi} - u_i \le 0$$

Maka hasil solusi dual RMP 1 sampai ditemukan RMP paling optimal diselesaikan menggunakan lingo 17.0 dan ms. Excel ditunjukkan pada tabel sebagai berikut:

TABEL 7
HASIL DUAL RMP 1 SAMPAI RMP PALING OPTIMAL

Mata Pelajaran	Kelas	RMP 1	2	3	4	5	6
Matematika	IPA1	0.5	5	5	-2.5	-2.5	-4
	IPA2	-2.5	-4	-3	-4	-4	-4
	IPS1	-4	-4	-4	-4	-2.5	-4
	IPS2	3.5	2	2	4	-2	-4
B.Indo	IPA1	0.5	5	5	-2.5	-3	-4
	IPA2	-2.5	-4	-3	-4	-4	-4
	IPS1	-4	-4	-4	-4	-2.5	-4
	IPS2	5	2	2	4	-2	-4
B.Ing	IPA1	0.5	5	5	-2.5	-2.5	-4
	IPA2	-2.5	-4	-3	-4	-4	-4
	IPS1	-4	-4	-4	-4	-2.5	-4
	IPS2	3.5	2	2	4	-2	-4
Biologi	IPA1	0.5	5	5	-2.5	-2.5	-4
	IPA2	-2.5	-4	-2.5	-4	-4	-4
Fisika	IPA1	0.5	5	5	-2.5	-2.5	-4
	IPA2	-2.5	-4	-2.5	-4	-4	-4
Kimia	IPA1	0.5	5	5	-2.5	-2.5	-4
	IPA2	-2.5	-4	-2.5	-4	-4	-4
Sosiologi	IPS1	-4	-4	-4	-4	-2.5	-4
	IPS2	3.5	2	2	4	-2	-4
Geografi	IPS1	-4	-4	-4	-4	-2.5	-4
	IPS2	2	-1	-0.5	0	-2.5	-4
Ekonomi	IPS1	-4	-4	-4	-4	-2.5	-4
	IPS2	3.5	2	2	4	-2	-4
PKN	IPA1	1	4	4	-1	-1	-2
	IPA2	-1	-2	-1	-2	-2	-2
	IPS1	-2	-2	-2	-2	-1	-2
	IPS2	2.5	1	1	2	-1	-2
Agama	IPA1	1	4	4	-1	-1	-2
	IPA2	-1	-2	-1	-2	-2	-2
	IPS1	-2	-2	-2	-2	-1	-2
	IPS2	2.5	1	1	2	-1	-2
Sejarah	IPA1	1	4	4	-1	-1	-2
	IPA2	-1	-2	-1	-2	-2	-2
	IPS1	-2	-2	-2	-2	-1	-2
	IPS2	2.5	1	1.5	2	-0.5	-2
TIK	IPA1	2	5	5	0	0	-1
	IPA2	0	-1	0	-1	-1	-1
	IPS1	-1	-1	-1	-1	0	-1
	IPS2	3.5	2	2	3	-0.5	-1
Kesenian	IPA1	2.5	4	4	0	0	-2
	IPA2	0.5	-1	0.5	-2	-2	-1
	IPS1	-2	-2	-2	-2	-1	-2
	IPS2	2.5	1	1	2	-1.5	-2
PKK	IPA1	2	5	5	-1	0.5	-2
	IPA2	-2	-2	-2	-1	-1	-2
	IPS1	-1	-1	-1	0	0.5	-2
	IPS2	3.5	3	2	4	0.5	-2
B.Daerah	IPA1	1.5	3.5	5	0	0	-1
	IPA2	0	-1	0	-1	-1	-1
	IPS1	-1	-1	-1	-1	0	-1
	IPS2	3.5	2	2	3	-0.5	-1
B.Jepang	IPA1	2	5	5	0	0	-1
	IPA2	0	-1	0	-1	-1	-1
	IPS1	-1	-1	-1	-1	0	-1
	IPS2	3.5	2	2	3	0	-1
B.Mandarin	IPA1	1.5	3.5	5	0	0	-1
	IPA2	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	IPS1	-1	-1	-1	-1	0	-1
	IPS2	3.5	2	2	3	0	-1
PENJAS	IPA1	1	4	4	-1	-1	-2
	IPA2	-1	-2	-1	-2	-2	-2
	IPS1	-2	-2	-2	-2	-1	-2
	IPS2	2.5	1	1	2	-1.5	-2
Nilai paling maksimal		5	5	5	4	0.5	-1
Variabel yang dibangkitkan		$y_{b,4,1}$	$y_{e,1,7}$	$y_{a,1,1}$	$y_{a,4,1}$	$y_{o,3,7}$	

Nilai pada RMP jika masih ada > 0 maka dipilih nilai RMP yang paling maksimal, kemudian veriabelnya dimasukkan ke RMP selanjutnya sampai tidak ada RMP yang memiliki nilai > 0. Pada tabel di atas, RMP 6 merupakan hasil optimal karena tidak ada variabel yang bernilai > 0. Maka RMP 6 ini merupakan hasil optimal juga buat MP. Solusi dari RMP 6, yaitu nilai fungsi 272 dan nilai variable $y_{a,1,7} = y_{a,2,1} = y_{a,3,15} = y_{a,4,22} = y_{b,1,13} = y_{b,2,7} = y_{b,3,19} = y_{b,4,16} = y_{c,1,10} = y_{c,2,16} = y_{c,3,22} = y_{c,4,13} = y_{d,2,4} = y_{d,2,13} = y_{e,1,16} = y_{e,2,4} = y_{f,1,1} = y_{f,2,10} = y_{g,3,7} = y_{g,4,4} = y_{h,3,12} = y_{h,4,19} = y_{i,3,18} = y_{i,4,1} = y_{j,1,14} = y_{j,2,24} = y_{j,3,3} = y_{j,4,12} = y_{k,1,22} = y_{k,2,14} = y_{k,3,15} = y_{k,4,10} = y_{l,1,26} = y_{l,2,7} = y_{l,3,1} = y_{l,4,8} = y_{,1,24} = y_{m,2,26} = y_{m,3,11} = y_{m,4,21} = y_{n,1,21} = y_{n,2,29} = y_{n,3,27} = y_{n,4,7} = y_{o,1,29} = y_{o,2,27} = y_{o,3,7} = y_{o,4,14} = y_{p,1,30} = y_{p,2,22} = y_{p,3,32} = y_{p,4,27} = y_{q,1,32} = y_{q,2,21} = y_{q,3,30} = y_{q,4,29} = y_{r,1,7} = y_{r,2,30} = y_{r,3,5} = y_{r,4,32} = y_{s,1,27} = y_{s,2,32} = y_{s,3,29} = y_{s,4,30} = 1$ dan variabel lainnya bernilai 0. Solusi tersebut ditunjukkan ke dalam tabel, sebagai berikut:

TABEL 8
HASIL PENJADWALAN MATA PELAJARAN

Kelas	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	jumat	Sabtu
IPA 1	Kim	Mate	B.Ind	Aga	Penja	B.Dae
	Kim	Mate	B.Ind	Aga	Penja	B.Dae
	Kim	Mate	B.Ind	TIK	PKK	B.Jep
	Istirahat pertama					
	Bio	B.Ing	Fis	TIK	PKK	B.Jep
	Bio	B.Ing	Fis	Sejar		
	Bio	B.Ing	Fis	Sejar		
	Istirahat kedua					
	B.Ma	PKN	Kese			
	B.Ma	PKN	Kese			
IPA 2	Mate	B.Ind	Bio	B.Dae	PKK	B.Ma
	Mate	B.Ind	Bio	B.Dae	PKK	B.Ma

	Mate	B.Ind	Bio	PKN	Kesen	Penja
	Istirahat pertama					
	Fis	Kim	B.Ing	PKN	Kesen	Penja
	Fis	Kim	B.Ing	TIK		
	Fis	Kim	B.Ing	TIK		
	Istirahat kedua					
	Sejar	Aga	B.Jep			
	Sejar	Aga	B.Jep			
	Sejar	Sosio	Aga	B.Ind	Kesen	B.Jep
	Sejar	Sosio	Aga	B.Ind	Kesen	B.Jep
	PKN	Sosio	Mate	B.Ind	Penja	B.Dae
	Istirahat pertama					
IPS 1	PKN	TIK	Mate	B.Ing	Penja	B.Dae
	B.Ma	TIK	Mate	B.Ing		
	B.Ma	Geo	Eko	B.Ing		
	Istirahat kedua					
	PKK	Geo	Eko			
	PKK	Geo	Eko			
	Eko	Sejar	B.Ing	Geo	B.Dae	Penja
	Eko	Sejar	B.Ing	Geo	B.Dae	Penja
	Eko	Aga	B.Ing	Geo	B.Jep	B.Ma
	Istirahat pertama					
IPS 2	Sosio	Aga	B.Ind	Mate	B.Jep	B.Ma
	Sosio	PKN	B.Ind	Mate		
	Sosio	PKN	B.Ind	Mate		
	Istirahat kedua					
	Kese	PKK	TIK			
	Kese	PKK	TIK			

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1) Bentuk model penjadwalan dengan menggunakan tiga indeks umum yang biasa digunakan dalam penjadwalan yaitu sumber, tujuan, dan waktu adalah persamaan (4)
2) Penjadwalan dengan pendekatan column generation ini terbagi atas beberapa proses, yaitu menentukan *master problem* dari masalah yang ada kemudian membuat subproblem (*Restricted Master Problem)* menggunakan subhimpunan dari pola penjadwalan yang layak. Subproblem tersebut diselesaikan hingga mendapatkan hasil optimal, kemudian diujikan menggunakan *pricing problem* apakah solusi optimal subproblem juga merupakan solusi optimal master problem, yaitu semua kolom atau pola yang ada tidak memiliki reduced cost positif.
3) Pada aplikasi yang telah dilakukan yaitu pada penjadwalan mata pelajaran menggunakan pendekatan column generation ini diperoleh hasil yang optimal

REFERENSI

[1] Hillier, Frederick S., dan Lieberman, Gerald J. 2008. *Intrduction operations research 8th edition* (Terjemahan Dewa, Pratama Kartika, Ai, Jin The, Wigati, Slamet Setio, Hardjono, Dhewiberta). Yogyakarta: Andi, Buku asli diterbitkan tahun 2005

[2] Papoutsis K., C. Valouxis and E. Housos,. (2003). *A column generation approach for the timetabling problem of Greek high schools*. J. of the Operational Research Society, p. 230-238.

[3] Siswanto. 2007. *Operations Research Jilid 1*. Jakarta : Erlangga.

[4] Kamila , Nur Shayara. 2018. *Optimisasi Penyusunan Jadwal Menggunakan Pendekatan Pembangkit Kolom (Column Generation)*.Universitas Negeri Padang.