

Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara

Eri Ranyusa Putri^{#1}, Muhammad Subhan^{*2}

[#]Mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang, Indonesia

^{*}Dosen Jurusan Matematika Universitas Negeri Padang, Indonesia

¹eryranyusa@gmail.com

²13subhan@fmipa.unp.ac.id

Abstract–Air pollution is a change in the composition of substances in the air from normal conditions. An air is said to be polluted if a certain amount of substance that is in the air for a long period of time exceeds its safe limit. Substances that most influence the occurrence of air pollution are carbon monoxide produced by vehicles. The purpose of this research is to form a mathematical model, analyze mathematical models that have been obtained, and interpret the results of the analysis of the mathematical model. This research is a basic research, which starts from creating variables, parameters, and assumptions. Mathematical models for air pollution control are obtained by nonlinear differential equation systems. The results of the model analysis obtained a fixed point that is not stable, so that we can do air pollution prevention by the number of trees must be a lot of carbon dioxide produced from the process of hydroxyl oxidation and carbon monoxide produced by existing vehicles.

Keywords - Mathematical Models, Air Pollution, differential equation system.

Abstrak–Pencemaran udara merupakan perubahan susunan zat di udara dari keadaan normal. Suatu udara dikatakan tercemar apabila zat dengan jumlah tertentu yang berada diudara dalam jangka waktu yang lama melebihi batas amannya. Zat yang paling mempengaruhi terjadinya pencemaran udara adalah karbon monoksida yang dihasilkan oleh kendaraan. Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model matematika, menganalisis model matematika yang telah diperoleh, dan menginterpretasikan hasil analisis model matematika tersebut. Penelitian ini merupakan penelitian dasar, yang dimulai dari membuat variabel, parameter, dan asumsi. Model matematika penanggulangan pencemaran udara diperoleh sistem persamaan differensial yang non linear. Hasil analisis model diperoleh titik tetap yang tidak stabil, sehingga penanggulangan pencemaran udara dapat kita lakukan dengan cara jumlah pohon harus banyak dari karbon dioksida yang dihasilkan dari proses oksidasi hidroksil dan karbon monoksida yang dihasilkan oleh kendaraan yang ada.

Kata kunci –Model Matematika, Pencemaran Udara, Sistem Persamaan Differensial.

PENDAHULUAN

Pencemaran udara 75% di sebabkan oleh gas pembuangan hasil pembakaran bahan bakar fosil (minyak atau batu bara) yang terdapat pada transportasi [1]. Sumber utama dari pencemaran udara dalam bentuk emisi (buangan asap) adalah kendaraan bermotor, industri, dan rumah tangga. Emisi merupakan zat, energi, atau komponen lain yang dihasilkan dari suatu kegiatan dan masuk kedalam udara. Hal lain yang memicu terjadinya emisi yaitu jumlah kendaraan motor, kecepatan suatu kendaraan, kemacetan pada lalu lintas, umur dan tipe suatu kendaraan, serta jenis bahan bakar yang digunakan [2].

Pencemaran udara ini disebabkan dari banyaknya kendaraan yang menghasilkan karbon monoksida melalui pembakaran yang tidak sempurna [3]. Karbon monoksida jika terhirup oleh tubuh akan menjadi sangat berbahaya, ia akan menghalangi oksigen yang mengalir dalam darah [4].

Apabila pencemaran udara ini terus dibiarkan maka akan berakibat terhadap manusia, hewan, dan tumbuhan. Akibat yang ditimbulkan akan sangat merugikan, pada tahun 2000-an di Amerika Serikat kematian yang disebabkan oleh pencemaran udara mencapai 57.000 orang per tahunnya. Selama 20 tahun angka kematian yang disebabkan oleh

pencemaran udara naik mendekati 14% atau mendekati 0,7% per tahun [1]. Pencemaran udara juga akan mengakibatkan meningkatnya suhu bumi di suatu daerah yang mayoritas menggunakan kendaraan bermotor, namun jumlah pohon yang minimalisirnya sedikit, sehingga gas pembentuk efek rumah kaca meningkat.

Telah banyak tindakan yang dilakukan pemerintah untuk mengatasi permasalahan pencemaran udara, seperti Reforestasi, Bike To work, dan lain-lain [5]. Upaya yang dilakukan dalam minimalisir pencemaran udara yaitu diantara lain dengan menanam pohon, pohon nantinya akan melakukan fotosintesis. Fotosintesis merupakan pengikatan karbon dioksida oleh daun pada saat memasak makanan sendiri dengan bantuan dari cahaya matahari. Lama – kelamaan lahan yang digunakan untuk menanam pohon akan semakin berkurang [6].

Permasalahan pencemaran udara ini dapat dimodelkan kedalam matematika. Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda seperti, bidang fisika, ilmu biologi, kedokteran, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, juga problem-*problem* jaringan komputer [7].

Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model matematika penanggulangan pencemaran udara, menganalisis model matematika yang telah dibentuk, dan menginterpretasikan hasil analisis yang telah diperoleh dari model matematika.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan cara menganalisa teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan. Dalam penelitian ini, peneliti memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan bahan rujukan, mengaitkan teori-teori yang diperoleh yang didapat dengan permasalahan yang akan dibahas sehingga dapat menjawab pertanyaan yang muncul dari permasalahan, dan menarik kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan yaitu: Mengidentifikasi masalah sesungguhnya yang akan diangkat dalam penelitian yaitu mengenai masalah penanggulangan pencemaran udara, Mengumpulkan teori-teori yang relevan dengan masalah penanggulangan pencemaran udara, Menentukan metode yang akan digunakan dalam penyelesaian masalah yaitu mengenai masalah penanggulangan pencemaran udara menggunakan model matematika, Membentuk model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan terlebih dahulu

menentukan asumsi, variabel, parameter, yang berkaitan dengan masalah tersebut, Menganalisis model matematika penanggulangan pencemaran udara yang telah diperoleh dengan menentukan titik kesetimbangan model, menentukan kestabilan dari titik tetap model, Menginterpretasikan hasil analisis dari model yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika

Model matematika penanggulangan pencemaran udara di pengaruhi oleh jumlah kendaraan dan pohon. Adapun variabel yang digunakan dalam model yaitu: X : konsentrasi oksigen (ppm), Y : konsentrasi karbon dioksida (ppm), Z : konsentrasi karbon monoksida (ppm), N : jumlah kendaraan (unit), P : jumlah pohon (batang). Dengan parameter yaitu: a : penambahan oksigen dari proses fotosintesis (ppm/batang/tahun), b : pengurangan karbon dioksida pada saat proses fotosintesis (ppm/pohon/tahun), c : pengurangan karbon monoksida menjadi karbon dioksida pada saat proses oksidasi hidroksil (ppm/tahun), d : penambahan karbon monoksida dari proses pembakaran oleh kendaraan bermotor (ppm/unit/tahun), j : pengurangan oksigen pada saat pembakaran oleh kendaraan bermotor (ppm/unit/tahun), f : pengurangan oksigen pada saat pernafasan makhluk hidup (ppm/tahun), g : penambahan karbon dioksida dari proses pernafasan makhluk hidup (ppm/tahun), h : penambahan karbon dioksida dari proses oksidasi hidroksil (ppm/tahun), k : pengurangan oksigen pada saat oksidasi (ppm/tahun).

Asumsi yang diperoleh yaitu: Karbon monoksida hanya berasal dari kendaraan bermotor, karena 75 % pencemaran udara di sebabkan oleh hasil dari pembakaran bahan bakar fosil yang terdapat pada kendaraan, Reaksi yang terjadi hanya antara karbon monoksida, karbon dioksida, dan oksigen, Suhu di daerah penelitian normal, karena pada proses oksidasi hidroksil hanya dapat terjadi pada suhu yang normal yaitu antara 26 – 36 derajat celsius, Kecepatan kendaraan bermotor konstan.

Berdasarkan variabel, parameter, dan asumsi yang telah dibuat dapat dibentuk model sebagai berikut:

Laju perubahan jumlah konsentrasi oksigen dipengaruhi karena adanya penambahan oksigen dari hasil proses fotosintesis yang dihasilkan oleh pohon yang sebanding dengan rata-rata jumlah pohon yang terdapat di daerah penelitian tersebut sebesar aPy . konsentrasi oksigen berkurang dengan adanya pengikatan oksigen yang terjadi pada saat proses pembakaran bahan bakar oleh kendaraan bermotor yang sebanding dengan banyaknya kendaraan yang melintasi daerah penelitian tersebut semakin banyak kendaraan yang melintasi wilayah penelitian tersebut sebesar

jN . juga berkurang karena adanya makhluk hidup yang memerlukan oksigen untuk kelangsungan hidupnya yaitu bernafas sebesar f . konsentrasi oksigen juga berkurang karena terjadinya oksidasi, sebesar k .

Laju perubahan jumlah konsentrasi karbon dioksida bertambah karena adanya karbon dioksida yang dihasilkan oleh manusia pada saat proses pernafasan sebesar g . konsentrasi karbon dioksida juga bertambah karena adanya karbon dioksida yang dihasilkan dari proses oksidasi yang di hasilkan dari reaksi antara gas karbon monoksida dengan gas oksigen di udara sebesar hxz . konsentrasi karbon dioksida akan berkurang karena adanya pengikatan karbon dioksida oleh pohon pada saat proses fotosintesis berlangsung oleh pohon yang sebanding dengan banyak jumlah pohon yang ada sebesar bP .

Laju perubahan jumlah konsentrasi karbon monoksida bertambah karena adanya pembakaran yang terjadi di mesin kendaraan yang mengalami pembakaran yang tidak sempurna. karbon monoksida yang dihasilkan oleh kendaraan yang sebanding dengan banyak jumlah kendaraan sebesar dNx . konsentrasi karbon monoksida berkurang karena adanya penguraian karbon monoksida yang bereaksi dengan oksigen membentuk karbon dioksida pada saat proses oksidasi sebesar cxz .

maka diperoleh model matematika penanggulangan pencemaran udara yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= aPy - jN - f - kxz \\ \frac{dy}{dt} &= g + hxz - bP \\ \frac{dz}{dt} &= dNx - cxz \end{aligned} \quad (1)$$

B. Analisis Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara.

1) Titik Tetap Model.

Analisis titik tetap pada sistem persamaan sering digunakan untuk menentukan solusi yang tidak berubah terhadap waktu. Titik tetap model dapat ditentukan ketika $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} dNx - cxz &= 0 \\ z^* &= \frac{dN}{c} \end{aligned} \quad (2)$$

Substitusikan persamaan (5) ke persamaan berikut:

$$\begin{aligned} g + hxz - bP &= 0 \\ x^* &= \frac{bPc - g}{haP} \end{aligned} \quad (3)$$

Substitusikan persamaan (5), dan (6) ke persamaan berikut:

$$\begin{aligned} aPy - jN - f - kxz &= 0 \\ y^* &= \frac{bkP + hjN + fh - gk}{haP} \end{aligned} \quad (4)$$

Sehingga dari persamaan (6),(5), dan (4) di peroleh titik tetap (x^*, y^*, z^*) yaitu: $(\frac{bPc}{haP}, \frac{bkP + hjN + fh - gk}{haP}, \frac{dN}{c})$.

2) Uji Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara.

Matriks Jacobi sistem persamaan model matematika penanggulangan pencemaran udara yaitu:

$$j(f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \\ \frac{df_3}{dx} & \frac{df_3}{dy} & \frac{df_3}{dz} \end{pmatrix}$$

Sebelum mendapatkan matriks Jacobi, maka terlebih dahulu dicari entri-entri dari matriks tersebut.

$$\begin{aligned} f_1 &= aPy - jN - f - kxz \\ f_2(x, y, z) &= g + hxz - bP \\ f_3(x, y, z) &= dNx - cxz \end{aligned}$$

Selanjutnya akan di bentuk matriks Jacobi untuk sistem persamaan diferensial tersebut dengan memisalkan:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1 \\ \frac{dy}{dt} &= f_2 \\ \frac{dz}{dt} &= f_3 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks jacobinya adalah:

$$J(f(x)) = \begin{pmatrix} -kz & ap & -kx \\ hz & 0 & hx \\ dN - cz & 0 & -cx \end{pmatrix}$$

Untuk melihat kestabilan dari titik tetap sistem dapat ditentukan berdasarkan nilai-nilai eigen dari metrics jacobinya.

Misalkan $J(f(x)) = J(A)$, sehingga diperoleh:

$$J(A) = \begin{pmatrix} -kz & ap & -kx \\ hz & 0 & hx \\ dN - cz & 0 & -cx \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks jacobian dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan $\det(\lambda I - J(A)) = 0$.

$$|\lambda I - J(A)| = \begin{vmatrix} (\lambda & 0 & 0) \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} -kz & ap & -kx \\ hz & 0 & hx \\ dN - cz & 0 & -cx \end{pmatrix} = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda + kz & -ap & kx \\ -hz & \lambda & -hx \\ -dN + cz & 0 & \lambda + cx \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda + k\left(\frac{dN}{c}\right) & -ap & k\left(\frac{bPc - gc}{hdN}\right) \\ -h\left(\frac{dN}{c}\right) & \lambda & -h\left(\frac{bPc - gc}{hdN}\right) \\ 0 & 0 & \lambda + c\left(\frac{bPc - gc}{hdN}\right) \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^3 + \frac{\lambda^2 kdn}{c} - \frac{\lambda hdnap}{c} + \lambda^2 \left(\frac{bpc^2 - gc^2}{hdn} \right) + \frac{\lambda kdn}{c} \left(\frac{bpc^2 - gc^2}{hdn} \right) - \frac{hdnap}{c} \left(\frac{bpc^2 - gc^2}{hdn} \right)$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{kdn}{c} + \frac{bpc^2 - gc^2}{hdn} \right) + \lambda \left(\frac{kbpc}{h} - \frac{hdnap}{c} - \frac{kgc}{h} \right) + (apgc - apbc)$$

Berdasarkan pada kriteria Routh-Hurwitz [8] maka diperoleh:

$$a_1 = \frac{kdn}{c} + \frac{bpc^2}{hdn} - \frac{gc^2}{hdn} > 0$$

$$a_1 = \frac{kdn}{c} + \frac{bpc^2}{hdn} > \frac{gc^2}{hdn}$$

$$a_2 = \frac{kbpc}{h} - \frac{hdnap}{c} - \frac{kgc}{h} > 0$$

$$a_2 = \frac{kbpc}{h} > \frac{hdnap}{c} > \frac{kgc}{h}$$

$$a_1 a_2 > a_3$$

$$\left(\frac{kdn}{c} + \frac{bpc^2}{hdn} - \frac{gc^2}{hdn} \right) \left(\frac{kbpc}{h} - \frac{hdnap}{c} - \frac{kgc}{h} \right) > (apgc - apbc)$$

$$\frac{k^2 dnbp}{h} - \frac{kd^2 n^2 ap}{c} - \frac{k^2 dng}{h} + \frac{b^2 p^2 c^3 k}{h^2 dn} - bpca - \frac{bpc^3 kg}{h^2 dn} - \frac{gc^3 kbp}{h^2 dn} + gcap + \frac{gc^3 kg}{h^2 dn} > (apgc - apbc)$$

$$\frac{k^2 d^2 n^2 c (bph - g)}{h^2 dnc} + \frac{bpc^4 k (bp - g)}{h^2 dnc} + \frac{gc^4 k (g - bp)}{h^2 dnc} - \frac{h^2 kd^3 n^3 ap}{h^2 dnc} + (apgc - apbc) > (apgc - apbc)$$

Dari analisis terdapat :

$$a_1 a_2 < a_3$$

Sehingga kriteria Routh-Hurwitz tidak terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa titik tetap dari model tidak stabil.

Analisis titik tetap juga dilakukan dengan cara numerik yaitu dengan memasukkan nilai-nilai parameter ke dalam matriks sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda + k\left(\frac{dn}{c}\right) & -ap & k\left(\frac{c(bp-g)}{dhn}\right) \\ -h\left(\frac{dn}{c}\right) & \lambda & -h\left(\frac{c(bp-g)}{dhn}\right) \\ -dn + c\left(\frac{dn}{c}\right) & 0 & \lambda + c\left(\frac{c(bp-g)}{dhn}\right) \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.000097$$

$$\lambda_2 = -0.001384$$

$$\lambda_3 = 0.00043395$$

Karena semua nilai eigen berlainan tanda, maka dapat dikatakan titik tetapnya tidak stabil.

C. Simulasi Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara

Simulasi dilakukan dengan menggunakan parameter sebagai berikut:

$$a = 0.00964, p = 7, j = 0.000078, k = 0.00096, d = 0.000067, n = 10, c = 0.000097, g = 0.000092, h = 0.0000089, b = 0.000287$$

Dari parameter tersebut diperoleh titik tetap yaitu :

$$(x^*, y^*, z^*) = (31.18, 3.06, 6.91)$$

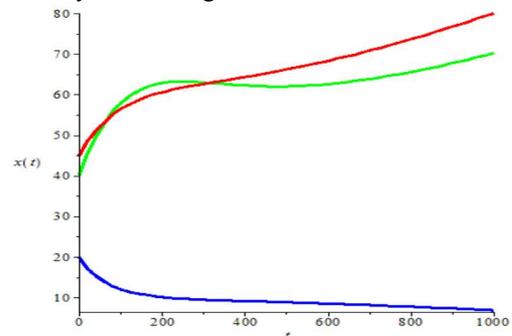
Simulasi titik tetap yang dilakukan menggunakan nilai awal yang berbeda yaitu:

$$x(0) = 20, y(0) = 2, z(0) = 15$$

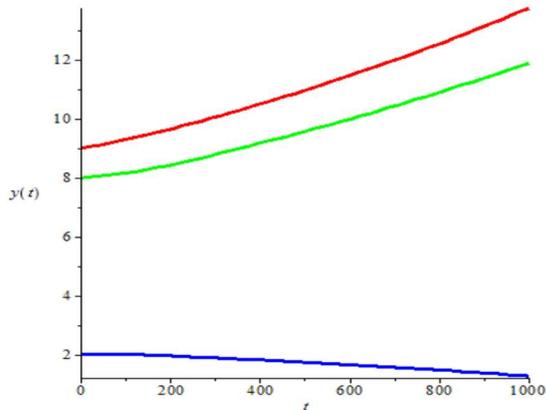
$$x(0) = 40, y(0) = 8, z(0) = 4$$

$$x(0) = 45, y(0) = 9, z(0) = 10$$

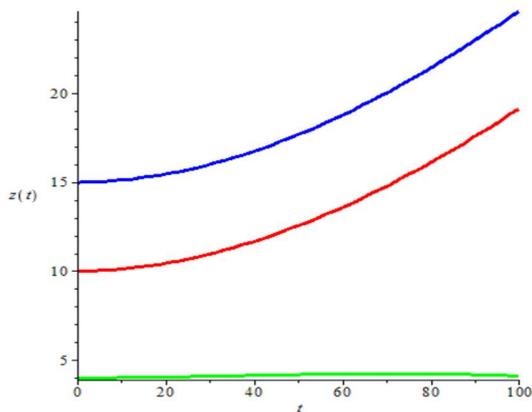
Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal diatas diperoleh trayektori sebagai berikut:



Gambar 2. Trayektori Oksigen terhadap Waktu



Gambar 3. Trayektori Karbon Dioksida terhadap Waktu



Gambar 4. Trayektori Karbon Monoksida terhadap Waktu

Berdasarkan gambar diatas, terlihat bahwa kurva merah, biru, dan merah merupakan tiga titik awal yang berbeda, kestabilan titik tetap dapat dilihat dari perlakuan ketiga kurva jika ketiga kurva mendekati titik tetap maka titik tetapnya stabil, dan begitu juga sebaliknya.

Pada gambar 2, 3, dan 4 dapat dilihat bahwa dengan titik tetap $(x^*, y^*, z^*) = (31.18, 3.06, 6.91)$ kurva biru, hijau dan merah saling menjauhi titik tetap, keadaan seperti itu disebut titik tetap tidak stabil.

D. Interpretasi Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara

Berdasarkan titik tetap yang telah diperoleh, dapat dilihat faktor-faktor yang telah mempengaruhi pembersihan pencemaran udara yang disebabkan oleh karbon monoksida yang dihasilkan oleh kendaraan yaitu $\frac{bPc-gc}{hdN} > x^*$, Dari persamaan tersebut diperoleh $p > x^* \frac{hdN+g}{bc}$. Sehingga

untuk oksigen selalu naik maka tindakan yang harus kita lakukan yaitu mengontrol p , yaitu mengontrol penanaman jumlah pohon harus lebih besar dari pada karbon dioksida yang di hasilkan dari proses oksidasi hidroksil dan karbon monoksida yang dihasilkan dari pembakaran kendaraan serta jumlah kendaraan yang menghasilkan karbon monoksida, penambahan karbon dioksida yang dihasilkan pada saat manusia bernafas yang sebanding dengan nilai karbon monoksida yang berada diudara yang mengalami proses oksidasi hidroksil yang berbanding terbalik dengan karbon dioksida yang diikat oleh pohon pada saat proses fotosintesis yang sebanding dengan karbon monoksida yang akan terurai menjadi karbon dioksida pada saat proses oksidasi hidroksil di udara. Dengan mengontrol nilai p tersebut maka kita tidak akan pernah kekurangan oksigen atau udara yang bersih di udara.

Agar karbon monoksida berkurang maka $N < z^* \frac{c}{d}$. Sehingga untuk karbon monoksida di udara tersebut berkurang maka kita harus mengontrol N , yaitu mengontrol jumlah kendaraan ada di suatu wilayah tersebut agar jumlahnya selalu lebih kecil dari nilai karbon monoksida yang berada diudara yang akan terurai menjadi karbon dioksida pada saat proses oksidasi hidroksil yang berbanding terbalik dengan nilai karbon monoksida yang dihasilkan dari pembakaran kendaraan. Dengan mengontrol nilai N tersebut maka udara tidak akan tercemar dan tidak akan banyak bahaya yang akan ditimbulkan dari karbon monoksida yang dihasilkan oleh kendaraan serta udara akan tetap bersih.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan, Model matematika penanggulangan pencemaran udara berbentuk sistem persamaan differensial yang non linear, dengan satu titik tetap yang tidak stabil. Penanggulangan pencemaran udara dapat dilakukan dengan mengontrol jumlah $p > x^* \frac{hdN+g}{bc}$ agar oksigen yang berada di udara tetap naik, upaya yang dapat dilakukan agar karbon monoksida yang dihasilkan oleh kendaraan di udara berkurang maka kita harus mengontrol jumlah $N < z^* \frac{c}{d}$.

REFERENSI

- [1] Wisnu, W.A. 2014. *Dampak Pencemaran Lingkungan*. Yogyakarta: C.V Andi.
- [2] Manik, K.E.S. 2016. *Pengelolaan Lingkungan Hidup*. Jakarta: Prenadamedia Group
- [3] Wahyuni, Esti. 2018. *Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara dengan Penanaman Pohon*. Padang: UNP.
- [4] Ermawati, dan Erly Muslini. 2014. *Model Matematika dalam Menentukan Populasi Pohon Di Kampus II UIN Alauddin Makassar Sebagai Carbon Sinks*. Jurnal. Vol.2. No.2.

- [5] Rusbiantoro, Dadang. 2008. *Global Warming For Beginner*. Yogyakarta: O_2 .
- [6] Akhadi, Mukhlis. 2013. *Isu Lingkungan Hidup*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [7] Widowati & Sutimin. 2007. *Buku ajar Pemodelan Matematika Jurusan Matematika Universitas Diponegoro*.
- [8] Boyce, William E. & Richard C. DiPrima. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem: Ninth Edition*. New York: Jhon Wiley & Sons.