

Model Matematika Penyebaran Penyakit Toksoplasmosis

Resti Indrawati Utami^{#1}, Riry Sriningsih^{#2}

[#]Mathematics Department State University of Padang
Jl. Prof. Dr. Hamka Air Tawar Padang, 25131, Telp. (0751) 444648, Indonesia

¹restiutami52@gmail.com
²srirysriningsih@yahoo.com

Abstract– Toxoplasmosis is a disease that affected by *Toxoplasma gondii* parasite which have latent (asymptomatic) characteristic. Toxoplasmosis disease was spreading vertically and horizontally. Spreading vertically through mother to kids and spreading horizontally through uncooked that contain of *ookista*. *Toxoplasmosis* disease can affect to serious health problems including physical disability, miscarriage and death. To determine influence level of Toxoplasmosis disease spreading, mathematic model was divided population by four individual groups: susceptible individual, latent individual, infection individual and controlled individual. Mathematical model formed was analysed by looking at its stability, analysis result was obtained fixed stability point. Increase in sum of individuals Toxoplasmosis disease spreading was affected by three parameters, which were susceptible individual moving to latent individual due to consume the foods that contain of *ookista*, individual that infected due to decrease immune system, and controlled individual or given treatment.

Keywords – Mathematical model, Toxoplasmosis, spread of disease

Abstrak– Penyakit toksoplasmosis merupakan penyakit yang dipengaruhi oleh parasit *Toxoplasma gondii* yang bersifat laten (asimtomatik). Penularan penyakit toksoplasmosis ditularkan secara vertikal dan horizontal. Penularan secara vertikal melalui ibu ke anak dan secara horizontal melalui memakan makanan mentah mengandung ookista. Penyakit toksoplasmosis dapat mengakibatkan masalah kesehatan yang serius termasuk, cacat fisik, keguguran, dan kematian. Untuk mengetahui tingkat yang mempengaruhi penyebaran penyakit toksoplasmosis. Model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis membagi populasi atas empat kelompok individu yaitu kelompok individu rentan, kelompok individu laten, kelompok individu infeksi dan kelompok individu dikontrol. Model matematika yang terbentuk dianalisis dengan melihat kestabilannya, hasil analisis diperoleh titik tetap yang stabil. Pertambahan jumlah individu penyebaran penyakit toksoplasmosis dipengaruhi tiga parameter, yaitu individu rentan yang berpindah ke laten akibat memakan makanan yang mengandung ookista, individu yang terinfeksi akibat sistem imun yang menurun, dan adanya individu yang dikontrol atau diberi pengobatan.

Kata Kunci– Model Matematika, Toksoplasmosis, Penyebaran Penyakit

PENDAHULUAN

Salah satu infeksi parasit yang dikenal manusia adalah toksoplasmosis yang disebabkan oleh *Toxoplasma gondii* dengan inang perantara primernya adalah kucing. Infeksi parasit ini sangat berbahaya bagi seseorang yang sistem imunnya lemah seperti ibu hamil, bayi, orang tua rentan, dan penderita penyakit HIV/AIDS. Infeksi ini sebagian besar bersifat tidak menimbulkan gejala (asimtomatik), sehingga infeksi toksoplasmosis adalah infeksi laten dimana keadaan penyebab penyakit sudah ada tetapi belum menyebabkan penyakit. Toksoplasmosis tersebar luas di seluruh dunia dengan frekuensi penyebarannya tergantung pada iklim tropis atau berkelembaban tinggi sehingga

mempercepat perkembangan parasit di lingkungan dan kebiasaan hidup dalam mengkonsumsi makanan kurang matang.

Toksoplasmosis merupakan penyakit parasit yang dapat ditularkan dari hewan ke manusia dan dapat menyerang hewan berdarah panas, burung dan manusia [4]. Toksoplasmosis adalah salah satu penyakit parasit paling umum di seluruh dunia. Meskipun diperkirakan bahwa sepertiga dari populasi dunia terinfeksi parasit *Toxoplasma gondii*, dengan bentuk paling umum dari penyakit ini adalah laten (asimtomatik) atau tidak menimbulkan gejala[5]. Di Indonesia prevalensi pada manusia berkisar antara 6-63% [2].

Penularan toksoplasmosis dapat terjadi secara vertikal dan horizontal. Penularan secara vertikal adalah penularan dari ibu yang sedang hamil kepada janin dalam kandungannya yang disebut dengan toksoplasmosis kongenital. Penularan horizontal adalah penularan yang terjadi apabila mengkonsumsi daging atau sayuran kurang matang yang terpapar parasit, transfusi darah dan transplantasi organ atau disebut juga dengan toksoplasmosis akuisita [7].

Penyakit ini sangat berbahaya karena dapat menimbulkan kerusakan pada otak, mata, paru, kelainan kulit, kerusakan jaringan, dan organ-organ lainnya. Dampak pada ibu hamil dapat menyebabkan abortus, kematian ketika bayi masih berada dirahim, dan jika bayi lahir maka bayi tersebut akan mengalami cacat seperti kebutaan, penumpukan cairan pada cairan otak (hidrosefalus), epilepsi, pembesaran hati, pembesaran limpa, jaundis (kulit dan mata berwarna kekuningan), keterbelakangan mental dan beberapa bayi diantaranya meninggal dunia beberapa hari sesudah dilahirkan [3].

Perkembangan ilmu pengetahuan dalam di bidang matematika juga memberikan peranan yang penting dalam membantu memprediksi penyebaran penyakit toksoplasmosis dengan melihat dinamika penyebarannya. Peranan tersebut berupa model matematika. Infeksi *Toxoplasma gondii* pada umumnya berlangsung secara tersembunyi (laten), dan parasit dalam keadaan pasif [4].

Dengan memodelkan masalah yang ada diharapkan dapat memberikan solusi yang dapat ditempuh dengan memanfaatkan suatu persamaan matematika atau suatu fungsi matematika.

Model dasar toksoplasmosis digunakan dalam memodelkan tingkat yang mempengaruhi penyebaran toksoplasmosis yang diasumsikan adanya individu yang dikontrol. Dalam penelitian ini, model yang dikembangkan dengan adanya penambahan individu yang bersifat laten atau belum menimbulkan gejala pertama kali. Dengan memodelkan individu yang laten untuk melihat pengaruh seseorang individu jika mengalami penurunan sistem imun.

Tujuan dari penelitian ini adalah: membentuk model matematika, menganalisis model matematika dan menginterpretasikan hasil analisis dari model matematika.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar dengan menggunakan teori yang relevan berdasarkan studi kepustakaan. Langkah kerja yang akan dilakukan adalah meninjau masalah yang dihadapi, dengan mengumpulkan dan mengaitkan teori-teori yang diperoleh pada permasalahan model matematika untuk penyebaran penyakit toksoplasmosis.

Adapun metode penelitian dalam penelitian ini yaitu meninjau tentang permasalahan yang dihadapi, dengan mengumpulkan teori pendukung serta mengaitkan teori-teori yang diperoleh pada permasalahan yang dibahas.

PEMBAHASAN

A. Pembentukan Model

Model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis, jumlah populasi dibagi kedalam empat kelompok yaitu: jumlah kelompok yang rentan (S), jumlah kelompok yang laten (E), jumlah kelompok yang terinfeksi (I), dan jumlah kelompok yang dikontrol terhadap penyakit toksoplasmosis (C). dengan demikian jumlah total populasi adalah $N=S+E+I+C$.

Asumsi yang digunakan dalam membentuk model adalah sebagai berikut :

1. Bayi yang baru lahir dari ibu yang bukan terinfeksi aktif memiliki peluang p untuk dilahirkan tanpa toksoplasmosis.
2. Tingkat penularan bergantung pada penularan secara vertikal melalui ibu hamil terinfeksi aktif yang ditularkan kepada bayinya dan penularan secara horizontal melalui memakan makanan mentah atau dimasak kurang matang yang mengandung ookista.
3. Kematian yang disebabkan penyakit toksoplasmosis
4. Semua anggota subpopulasi rentan memiliki peluang yang sama untuk terinfeksi.
5. pemberian obat-obatan atau penanganan kepada individu yang terinfeksi aktif.
6. Individu yang rentan berpindah ke subpopulasi yang laten dengan penularan horizontal.
7. Infeksi laten berpindah ke subpopulasi infeksi karena turunya daya tahan tubuh (sistem imun).

Parameter yang digunakan dalam pembentukan model adalah :

1. μ dinyatakan tingkat kematian alami
2. α dinyatakan tingkat kelahiran
3. d dinyatakan tingkat kematian yang disebabkan oleh toksoplasma
4. β dinyatakan tingkat penularan secara horizontal
5. p dinyatakan peluang individu dilahirkan tanpa toksoplasma
6. γ dinyatakan tingkat individu yang dikontrol dengan diberi penanganan atau pemberian obat-obatan
7. δ dinyatakan tingkat perpindahan dari laten ke infeksi aktif akibat sistem imun yang lemah.

Sehingga berdasarkan gambar 1 dapat diformulasikan model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha p N - \mu S - \beta S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S - \mu E - \delta E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha(1-p)N + \delta E - (\mu + d)I - \gamma I \\ \frac{dC}{dt} &= \gamma I - \mu C \end{aligned} \right\} (1)$$

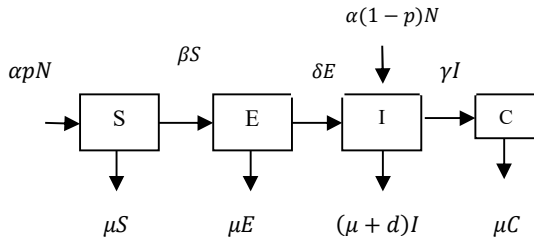
Selanjutnya dengan menyederhankan notasi, dengan memisalkan :

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, c = \frac{C}{N}$$

Jadi sistem (1) dapat ditulis menjadi :

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \alpha p - (\beta + \alpha - di)s \\ \frac{de}{dt} &= \beta s - (\delta + \alpha - di)e \\ \frac{di}{dt} &= \alpha(1-p) + \delta e - (\gamma + \alpha + d - di)i \\ \frac{dc}{dt} &= \gamma i - c(\alpha - di) \end{aligned} \right\} (2)$$

Dinamika populasi penyebaran untuk penyakit toksoplasmosis dapat ditunjukkan dalam gambar berikut :



Gambar 1. Model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis

B. Analisis Model

1. Titik tetap model

Dari analisis sistem (2) diperoleh titik tetap yaitu :

$$P_0 = \left(\frac{\alpha p}{\beta + \alpha}, 0, 0, 0 \right)$$

2. Analisis kestabilan titik tetap

Model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis merupakan sistem persamaan diferensial. Analisis kestabilan titik tetap dapat ditentukan dengan cara menentukan nilai eigen dari matriks Jacobi sistem. Matriks Jacobi dari sistem (2) adalah:

$$J = \begin{bmatrix} -(\beta + \alpha - di) & 0 & sd & 0 \\ \beta & -(\delta + \alpha - di) & ed & 0 \\ 0 & \delta & -(\gamma + \alpha + d) + 2di & 0 \\ 0 & 0 & \gamma + cd & -(\alpha - di) \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobi dititik tetap penyebaran penyakit toksoplasmosis $P_0 = \left(\frac{\alpha p}{\beta + \alpha}, 0, 0, 0 \right)$ adalah :

$$J(P_0) = \begin{bmatrix} -(\beta + \alpha) & 0 & \frac{\alpha p d}{(\beta + \alpha)} & 0 \\ \beta & -(\delta + \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(\gamma + \alpha + d) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$$

Titik tetap P_0 dikatakan stabil jika semua nilai eigen dari matriks jacobini bernilai negatif. Dari $J(P_0)$ diperoleh nilai eigen sebagai

$$\begin{aligned} & -(\alpha + \lambda) \left[\lambda^3 + (3\alpha + \delta + \gamma + d + \beta)\lambda^2 \right. \\ & \quad + (3\alpha^2 + 2\alpha\delta + \alpha\beta + 2d\alpha + \alpha\gamma + \beta d \\ & \quad + \gamma\delta + d\delta + \beta\gamma + \beta\delta)\lambda + (\beta\alpha^2 + \alpha^2 d \\ & \quad - \beta \frac{\alpha p d \delta}{(\beta + \alpha)} + \beta\alpha d + \beta\delta\gamma + \alpha\delta\gamma + \beta\delta\alpha \\ & \quad \left. + \alpha^3 + \beta\delta\gamma + \alpha^2\delta) \right] = 0 \end{aligned}$$

Jadi $\lambda_1 = -\alpha$ dan $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz. Menurut kriteria Routh-Hurwitz semua nilai eigen negatif terjadi apabila maka $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, dan $a_1 a_2 > a_3$

$$\begin{aligned} & 8\alpha^3 + 2\delta\beta\gamma + 3\delta\beta d + 3\gamma d\alpha + 3d\gamma\delta + 6\alpha\beta\delta + 5\alpha\beta d \\ & \quad + 7\alpha d\delta + 5\alpha\beta\gamma + 5\alpha\gamma\delta + 2\gamma\beta d + 9\delta^2 \\ & \quad + 6\alpha^2\beta + 9d\alpha^2 + 6\alpha^2\gamma + \alpha\delta^2 + \gamma\delta^2 \\ & \quad + d\delta^2 + \beta\delta^2 + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + 2d^2\alpha \\ & \quad + \beta d^2 + d^2\delta + \alpha\beta^2 + \beta^2 d + \beta^2\gamma \\ & \quad + \beta^2\delta - \left(\alpha^2 - \beta \frac{\alpha p d \delta}{(\beta + \alpha)} + \beta\delta\gamma + \beta\delta\alpha \right) \\ & > 0 \end{aligned}$$

Jadi memenuhi syarat dari kriteria Routh-Hurwitz sudah terpenuhi, maka semua nilai eigennya adalah negatif sehingga titik tetap juga stabil.

Berdasarkan analisis titik tetap endemik penyakit toksoplasmosis diperoleh sebagai berikut:

$$P^* = (s^*, e^*, i^*, c^*)$$

Matriks Jacobi dari titik tetap endemik penyakit toksoplasmosis sebagai berikut :

$$J(P^*) = \begin{bmatrix} -(\beta + \alpha - i^*d) & 0 & s^*d & 0 \\ \beta & -(\delta + \alpha - i^*d) & e^*d & 0 \\ 0 & \delta & -(\gamma + \alpha + d) + 2i^*d & 0 \\ 0 & 0 & \gamma + c^*d & -(\alpha - i^*d) \end{bmatrix}$$

3. Simulasi Numerik

Akan disimulasikan untuk keadaan dimana tidak ada individu yang terserang penyakit sehingga parameter yang dapat dilihat pada Table 1.

TABEL 1.
NILAI-NILAI PARAMETER MODEL UNTUK TITIK BEBAS

Parameter	Nilai
α	0.0185
μ	0.0006
δ	0.1
γ	0.05
β	0
d	0.1
p	1

Sehingga, diperoleh titik tetap dari bebas penyakit toksoplasmosis dapat dilihat pada

TABEL 2.
TITIK TETAP BEBAS PENYAKIT TOKSOPLASMOSIS

Titik Tetap	Nilai
s	1
e	0
i	0
c	0

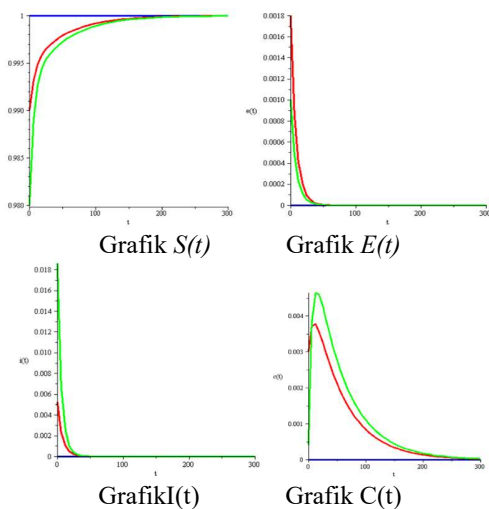
Untuk melihat kestabilan titik tetap bebas penyakit maka lihat nilai eigen dari titik tetap maka diperoleh $\lambda_1 = -0.0184$, $\lambda_2 = -0.0185$, $\lambda_3 = -0.1185$, $\lambda_4 = -0.1685$ sehingga dikatakan titik tetap bebas penyakit stabil. Dalam simulasi titik tetap bebas penyakit akan digunakan tiga nilai awal yang berbeda sebagai berikut:

$$s(0) = 1, e(0) = 0, i(0) = 0, c(0) = 0$$

$$s(0) = 0.99, e(0) = 0.0018, i(0) = 0.0052, c(0) = 0.0030$$

$$s(0) = 0.98, e(0) = 0.001, i(0) = 0.0186, c(0) = 0.0004$$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal diatas diperoleh grafik dari nilai masing masing kelas terhadap waktu t terlihat pada Gambar.2.



Gambar 2. Trayektori di sekitar Titik Bebas Penyakit

Kurva berwarna biru adalah kurva titik bebas
Kurva berwarna merah adalah kurva dengan keadaan nilai awal

$$s(0) = 0.99, e(0) = 0.0018, i(0) = 0.0052, c(0) = 0.0030$$

Kurva berwarna hijau adalah kurva dengan keadaan nilai awal

$$s(0) = 0.98, e(0) = 0.001, i(0) = 0.0186, c(0) = 0.0004$$

Berdasarkan gambar 3 diatas kurva biru mewakili titik tetap bebas penyakit dari grafik, sedangkan kurva hijau dan merah adalah yang menentukan stabil atau tidaknya titik bebas penyakit pada masing-masing grafik dengan diberikan kondisi awal yang berbeda.

Akan disimulasikan untuk keadaan dimana ada individu yang terinfeksi penyakit sehingga diasumsikan parameter sesuai pada

TABEL 3.
NILAI-NILAI PARAMETER MODEL TITIK ENDEMIK

Parameter	Nilai
α	0.0185
μ	0.0006
δ	0.1
γ	0.05
β	0.325
d	0.1
p	0.6

Sehingga, diperoleh titik tetap dari endemik penyakit toksoplasmosis dapat dilihat pada

TABEL 4.
TITIK TETAP ENDEMIK PENYAKIT TOKSOPLASMOSIS

Titik Tetap	Nilai
s	0.0334
e	0.1010
i	0.1120
c	0.7536

Untuk melihat kestabilan titik tetap endemik penyakit maka lihat nilai eigen dari titik tetap maka diperoleh $\lambda_1 = -0.0073$, $\lambda_2 = -0.0840$, $\lambda_3 = -0.1721$, $\lambda_4 = -0.330$ sehingga titik tetap endemik penyakit stabil.

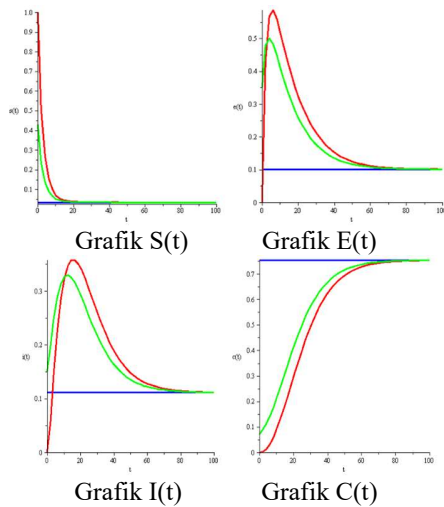
Dalam Simulasi titik tetap endemik penyakit digunakan tiga nilai awal yang berbeda sebagai berikut:

$$s(0) = 0.0334, e(0) = 0.1010, i(0) = 0.1120, c(0) = 0.7536$$

$$s(0) = 1, e(0) = 0, i(0) = 0, c(0) = 0$$

$$s(0) = 0.43, e(0) = 0.35, i(0) = 0.15, c(0) = 0.07$$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal diatas diperoleh grafik dari nilai masing masing kelas terhadap waktu t terlihat pada Gambar.3.



Gambar 3. Trayektori di Sekitar Titik Tetap Endemik Penyakit

Kurva biru adalah kurva titik bebas

Kurva merah adalah kurva dengan nilai awal

$$s(0) = 1, e(0) = 0, i(0) = 0, c(0) = 0$$

Kurva hijau adalah kurva dengan nilai awal

$$s(0) = 0.43, e(0) = 0.35, i(0) = 0.15, c(0) = 0.07$$

Berdasarkan gambar 3 diatas kurva biru mewakili titik tetap endemik penyakit dari grafik, sedangkan kurva merah dan hijau terhadap kurva garis biru adalah yang menentukan stabil atau tidaknya titik bebas penyakit pada masing-masing grafik. Grafik-grafik tersebut menunjukkan bahwa terjadi penyebaran penyakit toksoplasmosis dalam suatu populasi setiap kelompok akan kembali keadaan awal dengan jumlah individu kelompok yaitu (0.0334, 0.1010, 0.1120, 0.7536). Hal ini diperkuat dengan nilai R_0 jika $\alpha + \beta < \alpha p$ maka titik endemik stabil yang artinya penyakit toksoplasmosis akan meendemik.

KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan untuk model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis berbentuk sistem persamaan nonlinear yang terdiri dari empat persamaan nonlinear, sehingga diperoleh hasil analisis model matematika diperoleh dua titik tetap yaitu titik tetap bebas penyakit toksoplasmosis dan titik tetap penyakit endemik. Untuk interpersasi dari hasil analisis model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis dipengaruhi oleh penularan horizontal, pengaruh sistem imun, dan penanganan atau pemberian obat-obat terhadap penyakit toksoplasmosis. Hubungan antara masing-masing faktor dapat dilihat pada persamaan bilangan reproduksi dasar dimana dengan memperkecil tingkat penularan secara horizontal yaitu melalui memakan makanan mentang atau sayuran yang mengandung ookista dengan mencegah memasak makanan yang dimasak matang atau sayuran dicuci bersih. Sehingga dengan nilai β berkurang maka epidemik pada populasi dapat berkurang.

REFERENSI

- [1] Aranda, Diego F., Villanueva, Rafael J., Arenas, Abraham J., dan Gonzalez, Gilberto C. 2008. *Mathematical modeling of Toxoplasmosis disease in varying size populations. Computers and Mathematics with Applications* 56(2008), 690-696
- [2] Dalmi and A.Abdoli. 2012. Latent Toxoplasmosis and Human. *Iran J Parasitol*, 7(1),1-17.
- [3] Hamdan, Abdullah bin. 2015. Toksoplasmosis dalam Kesehatan. *Jurnal kesehatan*, 2(1), 13-18
- [4] Soedarto.2012. Toksoplasmosis. Jakarta: Sagung Seto
- [5] Widagdo. 2011. *Masalah dan Tatalaksana Penyakit Infeksi pada Anak*. Jakarta: CV Sagung Seto.
- [6] Wijayanti, Tri dan Marbawati, Dewi. 2014. Seropositif Toksoplasmosis Kucing Liar pada Tempat-tempat Umum di Kabupaten Banjarnegara. *BALABA*, 10(2), 59- 64.