Metode Newton-Steffensen untuk Menentukan Hampiran Akar Persamaan Tak Linier

Khairunisa[#1], Muhammad Subhan[*2], Meira Parma Dewi[*3]

[#]*Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*
[*]*Lecturers of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia*

[1]nisa.khairunisa1711@gmail.com
[2]13subhan@gmail.com
[3]meiradaud@gmail.com

Abstract –Newton-Steffensen method is one of numerical method for finding root of nonlinear equation. This method is modified method from Newton-Raphson method. The purpose of this research is to review the iteration formula, compile the algorithm, and analyze the order of convergence. This research is theoretical research. Which is a literature study based on the relevant sources. Based on the result, the algorithm applied to a computer program. The order of convergence of Newton-Steffensen method is three so the method is faster than Newton-Raphson method.

Keywords –nonlinear equation, newton-raphson method, newton-steffensen method, algorithm, order of convergence.

Abstrak–Metode Newton-Steffensen merupakan salah satu metode numerik untuk menentukan hampiran akar persamaan tak linier. Metode Newton-Steffensen merupakan modifikasi dari Metode Newton-Raphson. Tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji ulang formula iterasi Metode Newton-Steffensen, menyusun algoritma, dan menganalisis orde kekonvergenan.Penelitian ini adalah penelitian teoritis.Selanjutnya, pendekatan masalah yang dilakukan merupakan studi kepustakaan yang berpedoman pada sumber yang relevan.Berdasarkan hasil pembahasan, algoritma diterapkan pada program komputer.Orde kekonvergenan Metode Newton-Steffensen adalah tiga.Metode ini lebih cepat daripada Metode Newton-Raphson.

Kata Kunci– persamaan tak linier, metode newton-raphson, , metode newton-steffensen, algoritma, orde kekonvergenan.

PENDAHULUAN

Salah satu permasalahan yang dapat di selesaikan dengan matematika yaitu menentukan solusi persamaan tak linier. Solusi persamaan dapat diperoleh dengan dua cara yaitu secara analitik dan secara numerik. Metode analitik digunakan untuk persamaan tak linier yang berbentuk sederhana. Apabila persamaan berbentuk rumit dan sulit diselesaikan secara analitik maka persamaan dapat diselesaikan dengan metode numerik.

Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk mencari penyelesaian numerik dari suatu model matematis. Metode ini digunakan apabila penyelesaian secara analitik sulit ditentukan dan memerlukan waktu yang lama [1].Selain itu, metode numerik digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik yang dipecahkan dengan operasi hitung/aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi) [2]. Salah satu metode numerik dalam menentukan akar persamaan yaitu Metode Newton-Raphson.Metode ini adalah metode yang memerlukan tebakan awal dan menggunakan prinsip garis singgung dalam mencapai akar [2].Namun, dalam mencapai akar persamaan metode ini memiliki laju kekonvergenan kuadratik atau orde kekonvergenan dua [2].Hal ini menyatakan bahwa metode ini masih kalah cepat dengan metode yang memiliki orde kekonvergenan tiga dan seterusnya.Sejauh ini telah banyak modifikasi dari Metode Newton-Raphson diantaranya yaitu Metode Secant dan Metode Steffensen. Namun, setelah dimodifikasi Metode Secant tidak lebih cepat dibandingkan Metode Newton-Raphson dalam mencapai akar.Metode Secant memiliki laju kekonvergenan superlinier [3]. Metode Steffensen merupakan modifikasi metode Newton-Raphson dengan mengganti turunan pada Metode Newton-Raphson menggunakan hampiran selisih maju yang dimodifikasi.Metode Steffensen memiliki orde kekonvergenan dua [4].Hal ini berarti bahwa orde kekonvergenan Metode Steffensen sama dengan Metode Newton Raphson.

Selain Metode Secant dan Metode Steffensen, terdapat metode lainnya yaitu Metode Newton-Steffensen.Metode Newton-Steffensen adalah metode modifikasi dari Metode Newton-Raphson.Metode Newton-Steffensen mengganti turunan pertama pada Metode Newton-Raphson dengan bentuk umum hampiran turunan Metode Steffensen. Kemudian diekspansi menggunakan deret Taylor dan diperoleh formula iterasi Metode Newton-Steffensen.

Metode Newton-Steffensen memiliki orde kekonvergenan yang lebih tinggi dibandingkan Metode Newton-Raphson.Sehingga, Metode Newton-Steffensen lebih cepat dalam mencapai akar jika dibandingkan dengan Metode Newton-Raphson.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan , dimana penyelesaian permasalahannya mengikuti beberapa langkah kerja sebagai berikut :

1. Membaca dan mempelajari literatur mengenai persamaan tak linier dan metode numerik dalam menentukan hampiran akar persamaan taklinier.
2. Mempelajari prinsip Metode Newton-Raphson dalam menentukan hampiran akar persamaan tak linier.
3. Mempelajari prinsip Metode Steffensen dalam menentukan hampiran akar persamaan tak linier.
4. Mempelajari prinsip Metode Newton-Steffensen dalam menentukan hampiran akar persamaan tak linier.
5. Menelaah pembentukan formula Metode Newton-Steffensen.
6. Menyusun algoritma Metode Newton-Steffensen.
7. Menerapkan algoritma Metode Newton-Steffensen dalam menentukan hampiran akar persamaan tak linier pada program komputer.
8. Menganalisis orde kekonvergenan.
9. Menerapkan Metode Newton-Steffensen dalam menentukan hampiran akar dan membandingkan hasil hampiran akar dengan hasil hampiran akar Metode Newton-Raphson.
10. Menyimpulkan hasil yang diperoleh berdasarkan teori yang telah dipelajari.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Pembentukan Formula Iterasi Metode Newton-Steffensen*

Pandang formula Metode Newton-Raphson

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \ldots(1)$$

Metode Steffensen mengganti $f'(x_n)$ padapersamaan (3.1) dengan

$$g(x_n)=\frac{f\big(x_n+f(x_n)\big)-f(x_n)}{f(x_n)} \ldots(2)$$

Berdasarkan bentuk hampiran turunan pada Metode Steffensen diperoleh bentuk umum hampiran turunan

$$h(x_n)=\frac{f\big(x_n+b(x_n)f(x_n)\big)-f(x_n)}{b(x_n)f(x_n)} \ldots(3)$$

Ganti turunan pertama yang ada pada Metode Newton-Raphson dengan $h(x_n)$ sehingga,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n+b(x_n)f(x_n))-f(x_n)}{b(x_n)f(x_n)}}$$

maka

$$x_{n+1}=x_n-\frac{b(x_n)[f(x_n)]^2}{f\big(x_n+b(x_n)f(x_n)\big)-f(x_n)} \quad \ldots(4)$$

Persamaan (4) diekspansi dengan deret Taylor. Misalkan α adalah akar dari f(x) , sehingga f(α)=0. Asumsikan f memiliki turunan pertama, kedua, dan ketiga. Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor disekitar $x_n=\alpha$ diperoleh

$$b(x_n)=-\frac{1}{f'(x_n)} \ldots(5)$$

Substitusikan persamaan (5) ke persamaan (4) diperoleh

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\left(-\frac{1}{f'(x_n)}\right)\left[f(x_n)\right]^2}{f\left(x_n+\left(-\frac{1}{f'(x_n)}\right)f(x_n)\right)-f(x_n)} \ldots(6)$$

maka

$$x_{n+1}=x_n+\frac{\left[f(x_n)\right]^2}{f'(x_n)\left[f\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)-f(x_n)\right]} \quad \ldots(7)$$

diperoleh

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\left[f(x_n)\right]^2}{f'(x_n)\left[f(x_n)-f\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right]} \ldots(8)$$

Persamaan (8) dapat ditulis seperti berikut

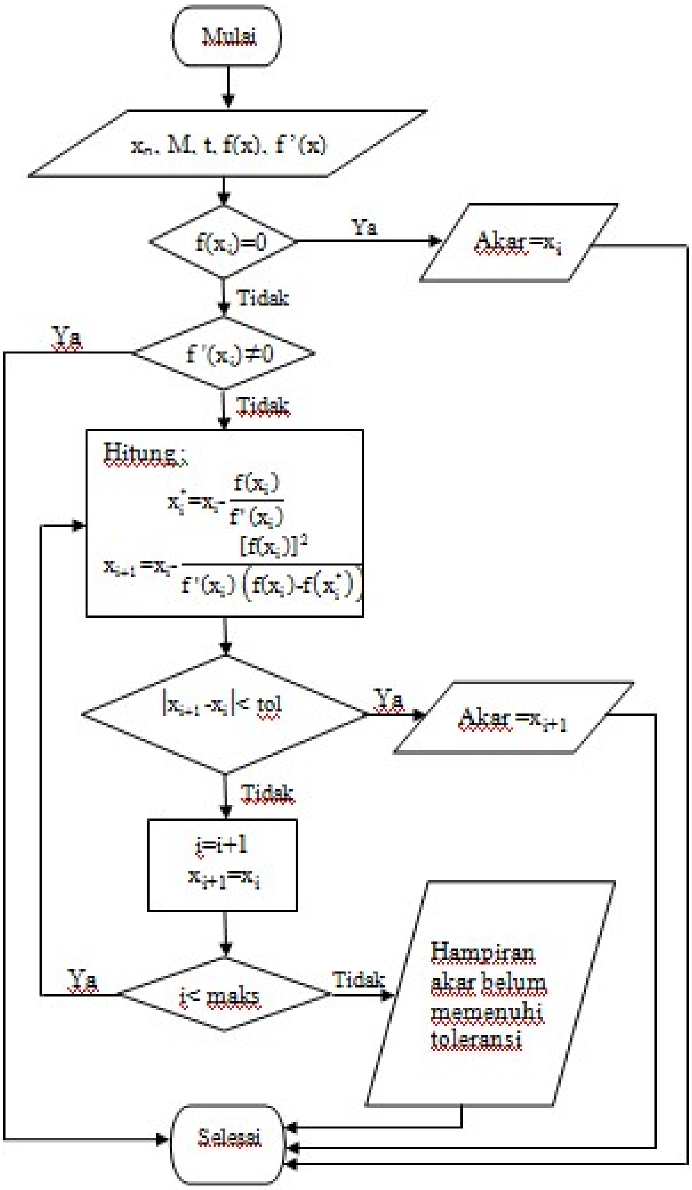
$$x_{n+1}=x_n-\frac{\left[f(x_n)\right]^2}{f'(x_n)[f(x_n)-f(x_n^*)]} \quad \ldots(9)$$

dimana $x_n^*=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Persamaan (9) inilah yang merupakan formula iterasi Metode Newton-Steffensen.

B. *Algoritma Metode Newton-Steffensen*

Berdasarkan proses yang diperoleh maka algoritma dari Metode Newton-Steffensendapat dilihat pada gambar *flowchart* berikut :



Flow Chart Metode Newton-Steffensen

C. *Orde Kekonvergenan Metode Newton-Steffensen*

Teorema 1: Misalkan $f:D\subseteq R\rightarrow R$ untukinterval buka D. Asumsikan f memiliki turunan pertama, turunan kedua, dan turunan ketiga dalam interval D. Jika $\alpha\in D$ adalah akar dari f sehingga $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(\alpha)\neq0$ dan x_0 cukup dekat ke α maka Metode Newton-Steffensen yang diberikan oleh persamaan (9) memenuhi persamaan *error* :

$$e_{n+1}=c_2^2e_n^3+O(e_n^4)$$

dimana $e_n=x_n-\alpha$ dan $c_j=\frac{f^j(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, $j = 2,3,4,\ldots.$

Bukti :

Ekspansi fungsi $f(x_n)$ menggunakan deret taylor di sekitar $x_n=\alpha$ sehingga diperoleh

$$f(x_n)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x_n-\alpha)+\frac{f''(\alpha)(x_n-\alpha)^2}{2!}+\frac{f'''(\alpha)(x_n-\alpha)^3}{3!}+O((x_n-\alpha)^4)\ldots(10)$$

karena $x_n-\alpha=e_n$ dan $f(\alpha)=0$maka

$$f(x_n)=f'(\alpha)e_n+\frac{f''(\alpha)e_n^2}{2!}+\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{3!}$$

$$+O(e_n^4)\ldots(11)$$

Dengan melakukan modifikasi aljabar pada persamaan (11) dan misalkan$c_j=\frac{f^j(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, j = 2,3,4,..., sehingga persamaan (11) menjadi

$$f(x_n)=f'(\alpha)[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)]\ldots(12)$$

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk $f'(x_n)$ di sekitar $x_n=\alpha$ diperoleh

$$f'(x_n)=f'(\alpha)+f''(\alpha)(x_n-\alpha)+\frac{f'''(\alpha)(x_n-\alpha)^2}{2!}$$
$$+O((x_n-\alpha)^3)\ldots(13)$$

karena $x_n-\alpha=e_n$ maka

$$f'(x_n)=f'(\alpha)+f''(\alpha)e_n+\frac{f'''(\alpha)}{2!}e_n^2+O(e_n^3)\ldots(14)$$

Dengan melakukan modifikasi aljabar dan misalkan $c_j=\frac{f^j(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$, j = 2,3,4,... maka persamaan (14) menjadi

$$f'(x_n)=f'(\alpha)\left[1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right]\ldots(15)$$

Kemudian persamaan (12) dibagi dengan persamaan (15)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{f'(\alpha)[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)]}{f'(\alpha)\left[1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right]}\ldots(16)$$

Perhatikan bentuk persamaan (16). Untuk persamaan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan deret geometri. Misalkan $A=e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3$ dan $r=2c_2e_n+3c_3e_n^2$. Dengan menggunakan deret geometri $\frac{1}{1+r}=1-r+r^2-r^3+\ldots$diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3-\left[(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3)\left(2c_2e_n+3c_3e_n^2\right)\right]$$
$$\left[(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3)\left(2c_2e_n+3c_3e_n^2\right)^2\right]\ldots(17)$$

sehingga

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=e_n-c_2e_n^2-2c_3e_n^3+2c_2^2e_n^3+O(e_n^4)\ldots(18)$$

karena $x_n=\alpha+e_n$ maka

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-e_n+c_2e_n^2+\left(2c_3-2c_2^2\right)e_n^3+O(e_n^4)$$
$$=\alpha+c_2e_n^2+(2c_3-2c_2^2)e_n^3+O(e_n^4)\ldots(19)$$

Substitusikan persamaan (12), (15), dan (19) ke persamaan (9), diperoleh

$$e_{n+1}=e_n-\left[e_n-c_2^2e_n^3+O(e_n^4)\right]$$

sehingga

$$e_{n+1}=c_2^2e_n^3+O(e_n^4)\ldots(20)$$

Berdasarkan [], dapat diartikan bahwa Metode Newton-Steffensen memiliki orde kekonvergenan tiga.

D. *Uji Komputasi*

Berikut ini akan dilakukan uji komputasi untuk melihat banyak iterasi yang diperlukan dalam menentukan akar hampiran persamaan tak linier. Tentukan akar persamaan tak linier berikut:

a. $x^3-8x^2-37x+44=0$. [5]

diperoleh akar hampiran untuk persamaan b yaitu 0.429493565548.

b. $e^x+x^4+x-2=0$ [6]

c. $\sin x-0.5x=0$ [4]

Untuk menentukan solusi numerik dari keempat persamaan di atas diperlukan nilai awal dan kriteria pemberhentian program komputasi. Hasil dari uji numeric untuk ketiga persamaan di atas ditunjukkan pada tabel berikut.

Untuk persamaan a.

TABEL I
HASIL KOMPUTASI UNTUK TEBAKAN AWAL -2

i	Hampiran Akar	
	MNS	MNR
1	-2.271622485964	-13.142857142857
2	-2.921756970073	-8.628229073998
3	-3.813132451800	-5.931893004021
4	-3.999474977217	-4.544830218380
5	-3.999999999990	-4.064086969166
6	-4.000000000000	-4.001065657336
7		-4.000000302694
8		-4.000000000000
9		-4.000000000000

Berdasarkan tabel di atas, Metode Newton-Steffensen memerlukan 6 iterasi dan Metode Newton-Raphson memerlukan 9 iterasi dalam mencapai akar dan diperoleh akar persamaan untuk persamaan a yaitu -4.

Untuk persamaan b.

TABEL II
HASIL KOMPUTASI UNTUK TEBAKAN AWAL 7

I	Hampiran Akar	
	NS	NR
1	4.804666363913	5.581719253941
2	3.075696611789	4.293146914496
3	1.880820730492	3.230467816320
4	1.057447327815	2.390032187630
5	0.541883383579	1.729610362804
6	0.430176920589	1.205839541682
7	0.429493565685	0.795403907027
8	0.429493565548	0.525521974166
9		0.435929765055
10		0.429520923740
11		0.429493566039
12		0.429493565548

Berdasarkan tabel 2, Metode Newton-Steffensen memerlukan 8 iterasi dan Metode Newton-Raphson memerlukan 12 iterasi dalam mencapai akar dan Untuk persamaan c.

TABEL III
HASIL KOMPUTASI UNTUK TEBAKAN AWAL 22.678

i	Hampiran Akar	
	MNS	MNR
1	3.869815455030	tidak konvergen
2	1.850018934226	
3	1.895459650513	
4	1.895494267034	
5	1.895494267034	

TABEL IV
HASIL KOMPUTASI UNTUK TEBAKAN AWAL 7

i	Hampiran Akar	
	MNS	MNR
1	1.515730652152	1.218293695293
2	1.854124373772	3.346628065989
3	1.895468428748	2.077630349163
4	1.895494267034	1.910665127770
5	1.895494267034	1.895624686496
6		1.895494276873
7		1.895494267034

Berdasarkan tabel 3, Metode Newton-Steffensen memerlukan 5 iterasi dan Metode Newton-Raphson gagal mencapai akar karena hasil iterasi dari metode ini tidak konvergen. Berdasarkan tabel 4, Metode Newton-Steffensen memerlukan 5 iterasi dan Metode Newton-Raphson memerlukan 7 iterasi dalam mencapai akar dan diperoleh akar hampiran untuk persamaan c yaitu 1.895494267034.

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1) Formula iterasi Metode Newton Steffensen adalah persamaan (9)
2) Laju kekonvergenan Metode Newton-Steffensen adalah kubik.

REFERENSI

[1] Santoso, F.G.I. 2011. "Analisis Perbandingan Metode Numerik dalamMenyelesaikan Persamaan-persamaan Serentak". Widya Warta No.1 tahunXXXV (19-39).

[2] Munir, Rinaldi.. 2013. *Metode Numerik Revisi Ketiga*. Bandung: Informatika.

[3] Kincaid, David dan Cheney, Ward. 1991. *Numerical Analysis*. California: Brooks/Cole Publishing Company.

[4] Sharma, J.R. 2005. "A composite third order Newton-Steffensen method forsolving nonlinier equation". Applied Mathematics and Computation. 169 (242-246).

[5] Khairunisa. 2018. Metode Newton-Steffensen untuk Menentukan Hampiran Akar Persamaan Tak Linier.Universitas Negeri Padang.

[6] Susila, I nyoman. 1992. *Metode Numerik.* Bandung: FMIPA ITB.