

Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara dengan Penanaman Pohon

Esti Wahyuni^{#1}, Muhammad Subhan^{*2}, Media Rosha^{*3}

[#]Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia

^{*}Lecturers of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia

lestiwahyuni49@gmail.com

Abstract – Air pollution is greatly feared by urban communities, as the majority of them use motor vehicles. The purpose of the research is to know the factors that increase air pollution using mathematical model. This research is a basic research using descriptive method. Research steps are identifying problems, determining variables, parameters, assumptions, forming mathematical models, analyzing models and interpreting models. The mathematical model analysis results obtained by a stable fixed point. Where the fixed point is (M_1, M_2, M_3) which is the maximum value of each concentration. The stability behavior of the fixed point is strongly influenced by the condition of the parameter value of the model that is the rate of change of each factor. Factors that affect the increase of carbon monoxide in the air are the sources of carbon monoxide derived from motor vehicles, the source must be controlled so that the increase of carbon monoxide in the air can be limited.

Keywords – Mathematical Model, Air pollution, carbon monoxide.

Abstrak – Pencemaran udara sangat dikhawatirkan oleh masyarakat perkotaan, karena mayoritas mereka menggunakan kendaraan bermotor. Tujuan dari penelitian adalah untuk dapat mengetahui faktor-faktor dari peningkatan pencemaran udara sehingga dengan model matematika dapat diketahui apa saja faktor yang harus ditingkatkan dan diturunkan agar permasalahan pencemaran udara dapat diatasi. Penelitian ini merupakan penelitian dasar dengan menggunakan metode deskriptif, yaitu dengan cara menganalisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan. Penelitian dimulai dengan mengidentifikasi masalah, menentukan variabel, menentukan parameter, menentukan asumsi, membentuk model matematika, menganalisis model dan menginterpretasikan model. Hasil analisis model matematika diperoleh satu titik tetap yang bersifat stabil. Dimana titik tetapnya adalah (M_1, M_2, M_3) yang merupakan nilai maksimum dari masing-masing konsentrasi. Perilaku kestabilan titik tetap sangat dipengaruhi oleh kondisi nilai parameter model yaitu laju perubahan dari masing-masing faktor. Faktor yang mempengaruhi kenaikan karbon monoksida diudara adalah sumber penghasil karbon monoksida yang berasal dari kendaraan bermotor, sumber tersebut harus dikontrol agar peningkatan karbon monoksida diudara dapat dibatasi.

Kata Kunci – Model Matematika, Pencemaran Udara, Karbon monoksida, Karbon Monoksida.

PENDAHULUAN

Isu pemanasan global terus mendapat perhatian serius dari bangsa-bangsa di Asia, termasuk Indonesia. Perubahan suhu lingkungan sudah secara nyata dan mudah dirasakan sekarang ini. Udara di sekitar dirasakan lebih panas dari biasanya, hal ini menandakan bahwa udara di bumi sudah mulai tercemar [1]. Beberapa tahun mendatang dikhawatirkan udara di daerah padat penduduk (daerah perkotaan) akan memburuk diakibatkan adanya kenaikan suhu bumi. Hal ini dipicu oleh minimnya jumlah pohon yang ada di daerah tersebut.

Mengurangi jumlah pohon sama halnya dengan mengurangi pemasokan oksigen, sebab pohon dapat menghasilkan oksigen (O_2). Oksigen dihasilkan pohon dari proses fotosintesis yang mengikat karbon dioksida

(CO_2) kemudian melepaskan kembali ke udara dalam bentuk oksigen [2]. Selain itu, terdapat hal lain yang memicu kenaikan suhu bumi yaitu konsentrasi karbon monoksida (CO) yang dihasilkan kendaraan bermotor sehingga terjadinya pencemaran udara [3].

Tingginya kecemasan masyarakat akan pencemaran udara di suatu daerah beberapa tahun mendatang disebabkan oleh konsentrasi karbon monoksida yang berasal dari kendaraan bermotor tidak mampu ditekan oleh konsentrasi oksigen yang ada di udara. Apabila pencemaran udara ini terus dibiarkan, maka akan mengakibatkan meningkatnya suhu bumi di suatu daerah yang mayoritas menggunakan kendaraan bermotor namun sedikit dalam jumlah pohon serta gangguan kesehatan. Hal ini mengakibatkan jumlah gas pembentuk efek rumah kaca meningkat, diantaranya ialah

gas CO, CO₂, CFC dan sebagainya. Karbon monoksida merupakan gas yang sangat berbahaya meskipun tidak berbau namun jika terikat dalam jaringan darah, gas ini akan mencegah oksigen untuk bereaksi dengan darah [4].

Kadar CO diperkotaan sangat bervariasi tergantung jumlah kepadatan kendaraan bermotor yang menggunakan bahan bakar bensin. Umumnya ditemukan kadar maksimum CO yang bersamaan dengan jam-jam sibuk pada pagi dan sore hari. Kadar CO juga dipengaruhi oleh topografi jalan dan bangunan disekitarnya [5]. Artinya, yaitu semakin padat jalanan dari kendaraan bermotor dan bangunan, maka jumlah karbon monoksida juga akan meningkat. Gas CO sangat berbahaya terutama jika berada dalam ruang tertutup yang tidak ada sirkulasi udara di dalamnya dan di jalan raya dalam keadaan lalu lintas macet [6]. Persamaan reaksi dari proses pembakaran BBM pada kendaraan bermotor yaitu sebagai berikut:



Apabila suhu udara normal, CO yang berbentuk gas tidak berwarna, oleh radikal hidroksil akan teroksidasi menjadi CO₂. Gas CO diudara dapat berkurang jumlahnya dengan adanya proses biologi dalam tanah dan pindah kelapisan stratosfer yang kemudian diikuti dengan proses oksidasi menjadi CO₂ [7]. Karbon monoksida bersifat racun dan berbahaya karena mampu membentuk ikatan yang kuat sehingga oksigen tidak dapat bereaksi dengan darah.

Berdasarkan fakta tersebut, maka dalam karya tulis ini penulis mengembangkan model matematika yang akan menjawab permasalahan mengenai bagaimana cara memperkecil peluang terjadinya pencemaran udara agar kemungkinan buruk tersebut tidak merugikan makhluk hidup dipermukaan bumi?, apakah pengaruh yang akan ditimbulkan saat pencemaran udara tidak dapat diatasi dengan benar?, dan kemudian apakah kesimpulan dari permasalahan pencemaran udara tersebut?

Model matematika merupakan paparan sederhana dari masalah nyata kedalam simbol-simbol matematika [8]. Pemodelan matematika adalah merepresentasikan dan menjelaskan masalah dunia nyata kedalam pernyataan matematika, sehingga diperoleh pemahaman dari permasalahan dunia nyata menjadi lebih tepat. Representasi matematika dari suatu fenomena yang dihasilkan dari proses mendeskripsikannya dalam simbol-simbol matematika dinamakan sebagai Model Matematika [9]. Sehingga melalui model matematika ini diharapkan dapat menggambarkan siklus dari karbon sehingga dapat menjadi pertimbangan untuk pihak-pihak yang berkepentingan dalam mengambil tindakan. Kemudian akan dilihat juga pengaruh dari parameter yang dianggap penting dalam model dan mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah dari masing-masing kelompok dari waktu ke waktu.

Dalam penelitian ini, kita akan mengembangkan dan menguji model matematika yang tidak hanya cocok

untuk membahas penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon, tetapi juga dapat digunakan untuk pemodelan hasil yang berbeda dari perubahan jumlah karbon yang ada di atmosfer.

METODE

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar. Adapun metode yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap permasalahan yang dibahas. Langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan yaitu:

1. Mengidentifikasi masalah sesungguhnya yang akan diangkat dalam penelitian yaitu mengenai masalah penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon.
2. Mengumpulkan teori-teori yang relevan dengan masalah pencemaran udara.
3. Menentukan metode yang akan digunakan dalam penyelesaian mengenai masalah penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon dalam hal ini menggunakan model matematika.
4. Membentuk model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon dengan terlebih dahulu menentukan asumsi, variabel, parameter, yang berkaitan dengan masalah tersebut.
5. Menganalisis model matematika yang telah diperoleh dengan menemukan titik kesetimbangan model, menentukan kestabilan dari titik tetap model.
6. Menginterpretasikan hasil analisis dari model yang diperoleh

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara dengan Penanaman Pohon

Dalam pembentukan model matematika penanggulangan pencemaran udara digunakan beberapa variabel dimana x merupakan jumlah kelompok konsentrasi karbon monoksida, y merupakan jumlah kelompok konsentrasi karbon dioksida dan z merupakan jumlah kelompok konsentrasi oksigen.

Terdapat beberapa asumsi dalam pembentukan model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman:

1. Konsentrasi karbon monoksida hanya berasal dari kendaraan bermotor, karena 95% dari karbon monoksida yang ada diudara berasal dari hasil pembakaran BBM oleh kendaraan bermotor, sehingga 5% dari karbon monoksida tidak dipertimbangkan sumbernya.
2. Reaksi terjadi hanya antar karbon monoksida, karbon dioksida dan oksigen.
3. Suhu di daerah penelitian normal, karena hanya disaat suhu normal proses oksidasi hidroksil dapat terjadi. Kisaran suhu normal yaitu antara 26 – 36°C.

4. Kendaraan bermotor yang melewati daerah penelitian jumlahnya konstan.
5. Kecepatan dari kendaraan bermotor yang melewati daerah penelitian konstan.
6. Makhluk hidup yang menghasilkan karbon dioksida hanya manusia.

Oleh karena adanya asumsi di atas, variabel-variabel yang telah terbentuk dapat disederhanakan, sehingga variabel yang akan digunakan dalam pembentukan model ini adalah:

$x(t)$: Jumlah kelompok konsentrasi karbon Monoksida dalam waktu t

$y(t)$: Jumlah kelompok konsentrasi karbon Dioksida dalam waktu t

$z(t)$: Jumlah kelompok konsentrasi Oksigen dalam waktu t .

Selanjutnya, dibutuhkan beberapa parameter yaitu:

k : Penambahan karbon monoksida yang dikeluarkan oleh kendaraan bermotor.

l : Pengurangan oksigen saat proses pembakaran BBM oleh kendaraan bermotor.

h : Penguraian karbon monoksida menjadi karbon dioksida saat proses oksidasi hidroksil.

i : Penambahan karbon dioksida dari hasil proses oksidasi hidroksil.

f : Pengurangan karbon dioksida oleh pohon saat proses fotosintesis.

g : Penambahan oksigen dari hasil proses fotosintesis oleh pohon.

r : Penambahan karbon dioksida yang berasal dari hasil pernapasan makhluk hidup.

s : Pengurangan oksigen akibat diserap oleh makhluk hidup saat pernapasan berlangsung.

Berdasarkan variabel, parameter dan asumsi di atas diperoleh model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = (k - h) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = (i - f + r) \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = (g - s - l) \quad (3)$$

Nilai dari masing-masing persamaan tidak boleh negatif bahkan nol, karena bertentangan dengan kondisi alam. Dimana konsentrasi karbon monoksida, karbon monoksida dan oksigen tidak pernah habis bahkan mencapai nilai minus diudara. Oleh sebab itu model yang diperoleh diubah menjadi model logistik seperti berikut:

$$\frac{dx}{dt} = (k - h) \left(1 - \frac{x}{M_1}\right) \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = (i - f + r) \left(1 - \frac{y}{M_2}\right) \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = (g - s - l) \left(1 - \frac{z}{M_3}\right) \quad (6)$$

Dimana (x, y, z) merupakan nilai awal dari masing-masing konsentrasi dan (M_1, M_2, M_3) merupakan nilai maksimum dari masing-masing konsentrasi.

B. Analisis Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara dengan Penanaman Pohon

1. Titik Tetap Model Matematika

Analisis titik tetap pada sistem persamaan diferensial sering digunakan untuk menentukan solusi yang tidak berubah terhadap waktu [10]. Berdasarkan definisi titik tetap model dapat ditentukan ketika $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$.

Dari persamaan model matematika yang diperoleh akan dicari titik tetapnya, dengan menyamakan persamaan dengan nol seperti berikut:

$$(k - h) \left(1 - \frac{x}{M_1}\right) = 0 \quad (7)$$

$$(i - f + r) \left(1 - \frac{y}{M_2}\right) = 0 \quad (8)$$

$$(g - s - l) \left(1 - \frac{z}{M_3}\right) = 0 \quad (9)$$

Dengan demikian diperoleh titik tetap untuk model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon adalah (M_1, M_2, M_3) atau $(30; 5.000; 209.400)$.

2. Uji Kestabilan Titik Tetap Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara dengan Penanaman Pohon.

a. Matriks Jacobi

Matriks Jacobi dari yang akan digunakan untuk menyelesaikan model tersebut yaitu dengan cara berikut:

$$J(f(x)) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \\ \frac{df_3}{dx} & \frac{df_3}{dy} & \frac{df_3}{dz} \end{pmatrix}$$

Maka setelah diinputkan, matrik jacobian untuk model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon diperoleh seperti berikut:

$$J(A) = \begin{pmatrix} \frac{h-k}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(f-i-r)}{M_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(s-g+l)}{M_3} \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan $\det(\lambda I - J(A)) = 0$. Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = \frac{h-k}{M_1}, \text{ dimana } k > h$$

$$\lambda_2 = \frac{(f-i-r)}{M_2}, \text{ dimana } i > f < r$$

$$\lambda_3 = \frac{(s-g+l)}{M_3}, \text{ dimana } s < g > l$$

Karena nilai eigen bernilai negatif, maka dapat dikatakan titik tetap stabil [11].

C. Interpretasi dari Hasil Analisis Kestabilan Titik Tetap Model Matematika

Berdasarkan pembahasan diatas, dapat diketahui bahwa peningkatan karbon monoksida yang bersifat pencemar di pengaruhi oleh parameter yang menjadi sumber penambahan karbon monoksida dari kendaraan bermotor. Sedangkan pengurangan karbon monoksida dipengaruhi oleh parameter yang menjadi penguraian karbon monoksida menjadi karbon dioksida dalam proses oksidasi hidroksil, dimana proses ini terjadi secara alami oleh alam. Agar permasalahan dapat diatasi maka parameter yang harus di kontrol adalah parameter penambahan karbon monoksida dari kendaraan bermotor, dengan cara menggeser nilai parameter tersebut mendekati nilai parameter pengurai karbon monoksida. Namun pengeseran nilai parameter penambahan karbon monoksida tidak pernah lebih kecil dari nilai parameter pengurai karbon monoksida, dikarenakan dari sudut pandang waktu penambahan karbon monoksida lebih panjang dibandingkan waktu penguraian karbon monoksida. Sehingga, nilai dari penambahan karbon monoksida akan selalu besar dibandingkan nilai pengurai karbon monoksida.

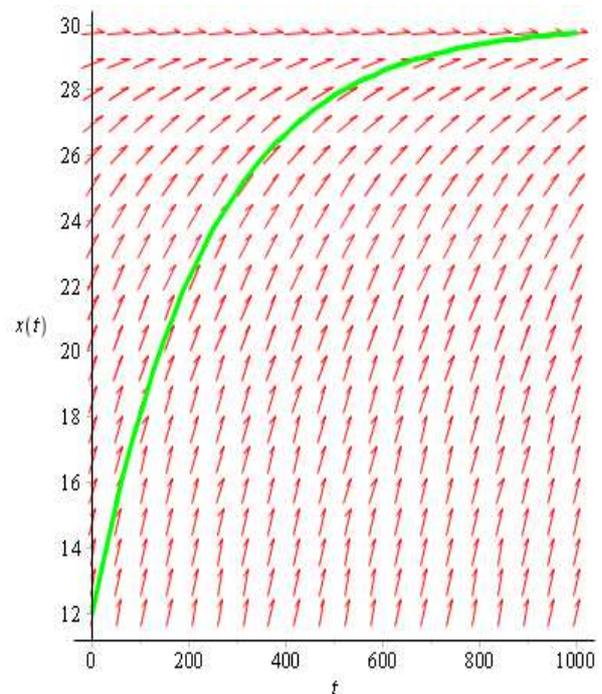
Hasil analisis dari model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon diperoleh titik tetap (M_1, M_2, M_3) . yang stabil, dimana titik tetapnya merupakan nilai maksimum dari masing-masing konsentrasi. Konsentrasi karbon monoksida udara akan meningkat ketika laju pengurangan karbon monoksida saat proses oksidasi hidroksil sangat kecil dibandingkan laju penambahan karbon monoksida yang berasal dari hasil pembakaran BBM oleh kendaraan bermotor.

D. Simulasi Model Matematika Penanggulangan Pencemaran Udara dengan Penanaman pohon

Dalam simulasi berikut akan digambarkan simulasi dari keadaan disaat nilai parameter penambah karbon monoksida mendekati nilai parameter pengurangan karbon monoksida dan keadaan disaat parameter penambah karbon monoksida menjauhi nilai parameter pengurangan karbon monoksida. Dimana nilai dari parameter tersebut adalah sebagai berikut:

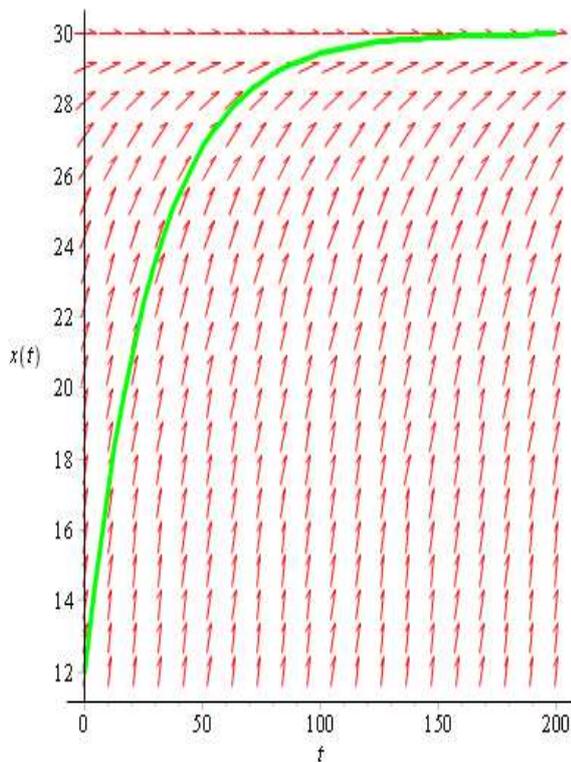
$$k = 1,057 \frac{ppm}{hari}, \quad h = 0,93 \frac{ppm}{hari}, \quad \text{dan} \quad h = 0,021 \frac{ppm}{hari}$$

Simulasi titik tetap yang dilakukan menggunakan nilai awal yaitu $x(0) = 12$. Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal diatas diperoleh trayektori sebagai berikut:

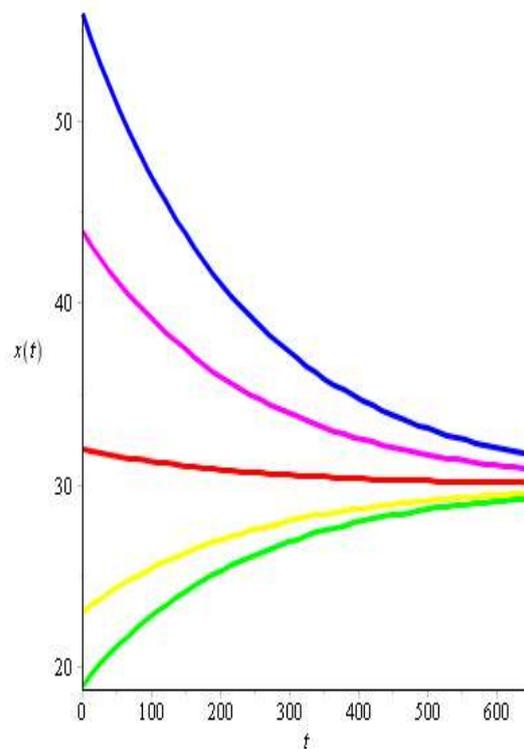


Gambar 1. Trayektori disekitar Titik Tetap Saat Nilai k Mendekati Nilai h .

Berdasarkan gambar diatas, gambar menunjukkan kenaikan karbon monoksida sampai pada batas maksimum yaitu setelah 900 hari. Hal ini dikarenakan parameter penambah karbon monoksida yang berasal dari kendaraan bermotor nilainya mendekati nilai pengurangan karbon monoksida oleh proses oksidasi hidroksil. Sedangkan untuk grafik berikut kenaikan karbon monoksida jauh lebih cepat dibandingkan keadaan sebelumnya, karena nilai pengurangan karbon monoksida oleh proses oksidasi hidroksil jauh lebih kecil. Sehingga kenaikan karbon monoksida mencapai batas maksimum jauh lebih cepat. Kenaikan karbon monoksida mencapai nilai ambang batas yaitu setelah 150 hari.



Gambar 2. Trayektori disekitar Titik Tetap Saat Nilai k Menjauhi Nilai h



Gambar 3. Trayektori dari Konsentrasi Karbon Monoksida

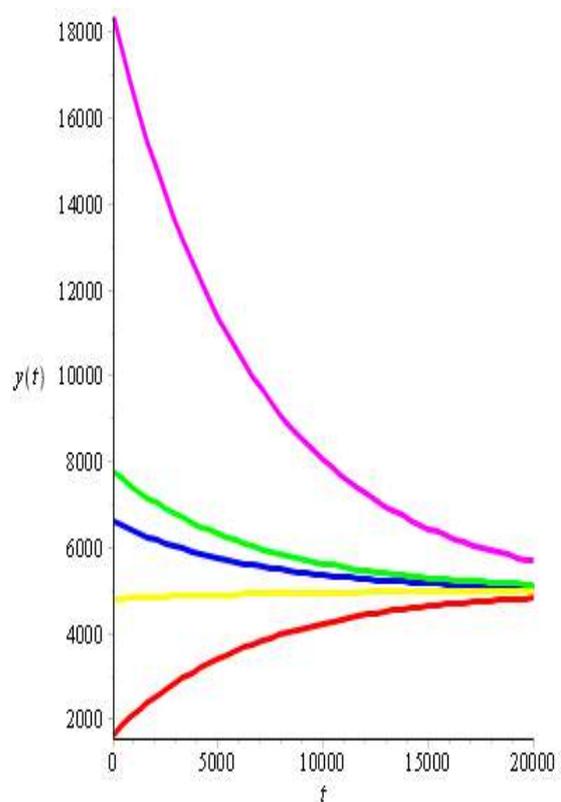
Pada kasus penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon diperoleh titik tetap (M_1, M_2, M_3) , dengan mensubstitusikan nilai maksimum dari masing-masing konsentrasi maka diperoleh titik $(30; 5000; 209.400)$. Dalam simulasi titik tetap ini, dimisalkan lima nilai awal sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
 x(0) = 32 & y(0) = 1660 & z(0) = 312738 \\
 x(0) = 56 & y(0) = 6600 & z(0) = 507774 \\
 x(0) = 19 & y(0) = 7775 & z(0) = 206636 \\
 x(0) = 23 & y(0) = 4803 & z(0) = 111604 \\
 x(0) = 44 & y(0) = 18380 & z(0) = 96006
 \end{array}$$

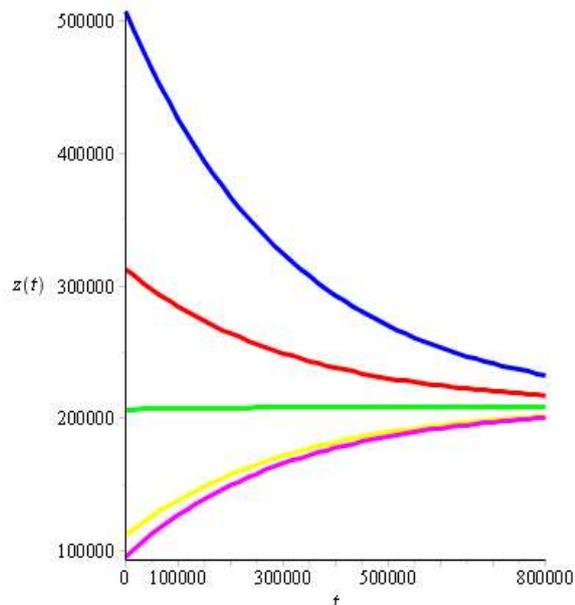
Simulasi kestabilan titik tetap pencemaran udara dilakukan untuk melihat trayektori di sekitar titik tetap tersebut dengan beberapa nilai parameter yang berbeda yang dimisalkan adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll}
 k = 1,057 \frac{\text{ppm}}{\text{hari}} & l = 0,0027 \frac{\text{ppm}}{\text{hari}} \\
 h = 0,93 \frac{\text{hari}}{\text{ppm}} & i = 0,83 \frac{\text{hari}}{\text{ppm}} \\
 f = 0,78 \frac{\text{hari}}{\text{ppm}} & g = 0,70 \frac{\text{hari}}{\text{ppm}} \\
 r = 0,69 \frac{\text{hari}}{\text{ppm}} & s = 0,03 \frac{\text{ppm}}{\text{hari}}
 \end{array}$$

Berdasarkan parameter dan nilai awal di atas di peroleh trayektori sebagai berikut:



Gambar 4. Trayektori dari Konsentrasi Karbon Dioksida



Gambar 5. Trayektori dari konsentrasi oksigen

Dapat dilihat dari gambar trayektori, untuk semua nilai awal, arah kurva menuju titik (30; 5000; 209.400). Nilai 30 menunjukkan nilai maksimum dari karbon monoksida, sedangkan 5.000 merupakan nilai maksimum dari karbon dioksida dan 209.400 merupakan nilai maksimum dari oksigen. Nilai-nilai tersebut berdasarkan SNI Nilai Ambang Batas udara di Indonesia.

SIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa model matematika penanggulangan pencemaran udara dengan penanaman pohon berbentuk sistem persamaan diferensial yang terdiri dari tiga persamaan.

. Hasil analisis model dari sistem persamaan diperoleh titik tetap yang bersifat stabil. Titik tetap yang diperoleh merupakan nilai maksimum dari masing-masing konsentrasi. Perilaku kestabilan titik tetap sangat dipengaruhi oleh kondisi nilai parameter model yaitu laju perubahan dari masing-masing faktor. Adapun faktor yang mempengaruhi kenaikan karbon monoksida diudara yaitu sumber penghasil karbon monoksida yang berasal dari kendaraan bermotor, dengan begitu sumber tersebut harus dikontrol agar peningkatan karbon monoksida diudara dapat dibatasi. Apabila sumber penambahan karbon monoksida dikontrol maka pencemaran udara dapat ditanggulangi dan tingginya kekhawatiran masyarakat di daerah perkotaan dapat diturunkan.

REFERENSI

- [1] Santi, D. N. 2001. *Pencemaran Udara oleh Timbal serta Penanggulangannya*. Diakses tanggal 3 September 2017. [Http://library.usu.ac.id](http://library.usu.ac.id)
- [2] Nowak, David J and Gordon M. Heisler. 2010. *Air Quality Effects of Urban Trees and Parks*. United states Department of Agriculture.
- [3] Cooper, John and Andrea Geiger. 2010. *Over of Airborne Metals Regulations, Exposure Limits, Health Effects, and Contemporary Research*. Waveland Press Inc. USA.
- [4] Crosby, Donald G. 1998. *Environmental Toxicologi and Chemistry*. New York: Oxford University Press.
- [5] Dewata, Indang dan Tarmizi. 2015. *Kimia Lingkungan*. Padang: UNP Press.
- [6] Raub, J. 2004. *Environmental Health Criteria for Carbon Monoxide*. USA: North Carolina.
- [7] Prodjosantoso, A.K dan Regina Tutik. 2011. *Kimia Lingkungan*. Yogyakarta: KANISIUS.
- [8] Widowati & Sitimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Jurusan Matematika Universitas Diponegoro
- [9] Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling*. Malang : UIN pres
- [10] Cain, John W., dan Reynold. 2010. *Angela M. Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical Systemd*. Virginia Commonwealth University.
- [11] Johnson, Richard. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. United States of America : Prentice Hall.