Model Matematika Rantai Makanan Tiga Spesies

Yongki Sukma[#1], Media Rosha[*2], Arnellis[*3]

[#]Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia
[*]Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia

[1]yongkisukma@rocketmail.com
[2]mediarosha@gmail.com
[3]arnellis_unp@yahoo.co.id

Abstract — Predation interaction between two species have been described in Lotka-Volterra mathematical model. But in an ecosystem, predation interaction involving more than two species. In this study will be discussed predation interaction involving three species in a food chain. Obtained mathematical model will be analyzed by finding the stability of fixed point, the stability of fixed point will be analyzed with Routh-Hurwitz criterion. The model consists of three differential equations representing each species. The model has four fixed points, the fourth fixed point is stable, the first fixed point is not stable but the third and second fixed point are stable with certain conditions. The result of analisys show that three populations does not become extinct if product of species I growth rate with spesies III growth rate is greater than product of species I death rate with species III death rate.

Keywords — Food Chain, Fixed Point, Routh-Hurwitz

Abstrak — Interaksi pemangsaan antara dua spesies telah digambarkan dalam model matematika Lotka-Volterra. Namun dalam suatu ekosistem, interaksi pemangsaan melibatkan lebih dari dua spesies. Dalam penelitian ini akan dibahas interaksi pemangsaan yang melibatkan tiga spesies dalam suatu rantai makanan. Model matematika yang diperoleh akan dianalisis dengan mencari kestabilan titik tetapnya, kestabilan titik tetap model tersebut akan dicari dengan kriteria Routh-Hurwitz. Model yang diperoleh terdiri dari tiga persamaan diferensial yang mewakili masing-masing spesies. Model memiliki empat titik tetap, dimana titik tetap keempat stabil, titik tetap pertama tidak stabil sedangkan titik tetap kedua dan ketiga stabil dengan syarat tertentu. Hasil analisis menunjukkan ketiga populasi dalam rantai makanan tidak punah jika perkalian tingkat pertumbuhan spesies I dengan spesies III lebih besar dari perkalian tingkat kematian spesies I dengan tingkat kematian spesies III.

Kata Kunci — Rantai Makanan, Titik Tetap, Routh-Hurwitz

PENDAHULUAN

Dalam suatu ekosistem terdapat dua komponen yaitu komponen abiotik dan komponen biotik. Komponen-komponen penyusun ekosistem tersebut berinteraksi satu sama lain, terutama pada komponen biotiknya yang terdiri atas organisme-organisme yang hidup dengan interaksi yang beragam seperti pemangsaan, persaingan dan simbiosis, yang masing-masing interaksi tersebut mengakibatkan pengaruh positif atau negatif terhadap setiap populasi organisme yang terlibat.

Pada interaksi pemangsaan terjadi proses memakan oleh pemangsa terhadap mangsa [2]. Interaksi pemangsaan digambarkan dalam model matematika berikut yang disebut model Lotka Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = pxy - qy$$

dimana x menunjukkan jumlah populasi mangsa dan y menunjukkan jumlah populasi pemangsa, a adalah tingkat pertumbuhan mangsa, b tingkat kematian mangsa akibat interaksi dengan pemangsa, p adalah tingkat kelahiran pemangsa baru akibat interaksi dengan mangsa, q adalah tingkat kematian pemangsa.

Pada model Lotka Volterra interaksi pemangsaan melibatkan dua spesies. Namun dalam kenyataannya suatu ekosistem, interaksi pemangsaan tidak hanya melibatkan dua populasi spesies saja. Ada terdapat rangkaian proses pemangsaan yang melibatkan lebih dari dua spesies. Rangkaian pemangsaan ini terdapat dalam suatu rantai makanan. Dalam hal ini rantai makanan yang melibatkan tiga spesies sehingga model Lotka Volterra tidak bisa menjelaskan situasi ini.

Salah satu rantai makanan menjelaskan hubungan antara tiga spesies. Ketiga spesies tersebut dapat terdiri dari produsen, konsumen dan pengurai. Namun tidak menutup kemungkinan hanya terdiri dari produsen dan konsumen saja dimana konsumen terdiri atas konsumen pertama dan konsumen kedua. Konsumen memperoleh makanan dengan cara memakan produsen atau memakan spesies konsumen lain. Pengurai mengubah bahan organik dari produsen dan konsumen yang telah mati menjadi bahan anorganik.

Sebagai salah satu contoh konkrit di alam nyata dapat dilihat hubungan dalam rantai makanan antara tiga spesies yaitu Phytoplankon sebagai produsen, Zooplankton sebagai konsumen pertama dan ikan Bay Anchovy (*Anchoa michilli*) sebagai konsumen kedua. Ikan Bay Anchovy hanya memakan Zooplankton sebagai makanannya [3] dan Zooplankton memakan Phyto-plankton sebagai makanannya [9].

Rantai makanan yang dibentuk oleh Phytoplankton, Zooplankton dan ikan Bay Anchovy merupakan rantai makanan tipe pemangsa. Landasan utama rantai makanan tipe pemangsa adalah organisme yang berfungsi sebagai produsen. Rantai makanan diawali dari hewan yang bersifat herbivora sebagai konsumen pertama, kemudian dilanjutkan hewan karnivora sebagai konsumen kedua yang memangsa konsumen pertama. Rantai makanan diakhiri oleh hewan karnivora berikutnya sebagai konsumen pada tingkat selanjutnya yang memangsa konsumen dibawahnya [12].

Rantai makanan mempunyai peranan penting dalam menjaga keseimbangan ekosistem. Jika salah satu mata rantai makanan hilang maka keseimbangan ekosistem akan terganggu. Spesies yang sebelumnya berada dalam rantai makanan akan ikut merasakan dampaknya. Rantai makanan ini terjadi karena setiap spesies dalam suatu ekosistem membutuhkan makanan sebagai sumber energi untuk dapat bertahan hidup. Sehingga setiap spesies yang tidak mampu membuat makanan sendiri berusaha memenuhi kebutuhan tersebut dengan mengkonsumsi spesies lain.

Untuk melihat dinamika populasi pada rantai makanan yang dibentuk oleh tiga spesies dapat dilakukan dengan memodelkan interaksi ketiga spesies tersebut ke dalam model matematika. Model matematika adalah gambaran perilaku suatu permasalahan atau objek di dunia nyata dalam bentuk matematika [4]. Model yang akan dibentuk terdiri dari tiga populasi spesies. Pada populasi spesies pertama pertumbuhannya dipengaruhi daya dukung lingkungan.

Adanya model matematika rantai makanan tiga spesies dan berdasarkan hasil analisis dari model tersebut dapat dijelaskan dan diprediksi perilaku atau dinamika populasi yang ada dalam rantai makanan di masa mendatang, sehingga permasalahan-permasalahan dapat diketahui dan diselesaikan dengan model matematika. Selain itu penggambaran interaksi pemangsaan antar organisme dalam suatu ekosistem lebih lengkap serta mendekati kondisi riil dari suatu ekosistem daripada model mangsa pemangsa yang melibatkan dua spesies.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1) menentukan bentuk model persamaan rantai makanan tiga spesies
2) menentukan hasil analisis dari model rantai makanan tiga spesies
3) menentukan interpretasi dari hasil analisis model rantai makanan tiga spesies tersebut.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis), dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap permasalahan yang dibahas dan berdasarkan pada kajian kepustakaan.

Dalam meninjau permasalahan yang dihadapi, langkah kerja yang dilakukan ialah; menelaah permasalahan yang akan diteliti, menentukan asumsi yang akan digunakan pada model, membentuk model dengan mengacu pada asumsi-asumsi yang telah ditentukan, menemukan titik tetap dari model yang telah didapatkan, menganalisis kesetimbangan titik tetap yang telah didapatkan dengan kriteria Routh-Hurwitz, terakhir memberikan interpretasi terhadap hasil analisis yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Matematika Rantai Makanan Tiga Spesies

Model matematika rantai makanan tiga spesies merupakan modifikasi dari model Lotka Volterra. Model rantai makanan tiga spesies diperoleh dengan menambahkan persamaan ketiga dan memberikan beberapa asumsi tambahan.

Ada tiga variabel yang digunakan dalam pembentukan model matematika rantai makanan tiga spesies yaitu sebagai berikut:

X : adalah jumlah populasi spesies I
Y : adalah jumlah populasi spesies II
Z : adalah jumlah populasi spesies III

dan parameter yang digunakan yaitu sebagai berikut:

a : tingkat pertumbuhan alami spesies I
b : tingkat kematian spesies I akibat interaksi dengan spesies II
c : tingkat kematian alami spesies II
e : tingkat kematian spesies II akibat interaksi dengan spesies III
f : tingkat perkembangan spesies II akibat interaksi dengan spesies I
g : tingkat kematian spesies III
h : tingkat pertumbuhan spesies III akibat interaksi dengan spesies II
K : daya dukung lingkungan untuk spesies I.

Adapun asumsi yang digunakan dalam pembentukan model ialah sebagai berikut:

1) Model rantai makanan tiga spesies terdiri dari spesies I, spesies II dan spesies III dimana spesies I merupakan satu-satunya sumber makanan bagi spesies II dan spesies II merupakan satu-satunya sumber makanan bagi spesies III.

2) Faktor pendukung pertumbuhan spesies I (Phyto-plankton) jumlahnya terbatas, sehingga populasi spesies I akan tumbuh dengan rata-rata alami dan dipengaruhi oleh daya dukung lingkungannya.
3) Spesies II dan III bergantung hanya kepada makanannya untuk bertahan hidup.
4) Dianggap kematian spesies I karena faktor alam tidak diperhitungkan, spesies I mati hanya akibat dimakan oleh spesies II.
5) Kerapatan spesies I tidak mempengaruhi peluang pemangsaan spesies II dan kerapatan spesies II tidak mempengaruhi peluang pemangsaan spesies III.
6) Tidak ada kompetisi sesama spesies I, tidak ada kompetisi sesama spesies II dan tidak ada kompetisi sesama spesies III.

Pembentukan model didasarkan pada asumsi di atas yaitu sebagai berikut:

1) Laju perubahan jumlah populasi spesies I akan berkurang seiring adanya interaksi dengan spesies II sehingga diperoleh:
$$\frac{dX}{dt} = -bXY$$
Laju perubahan jumlah populasi spesies I akan bertambah dengan lahirnya spesies baru dimana besarnya merupakan hasil kali antara tingkat pertumbuhan alami spesies I dengan jumlah populasi spesies I dan daya dukung lingkungan untuk populasi spesies I sehingga diperoleh $a\left(1-\frac{X}{K}\right)X$. Dengan demikian diperoleh laju perubahan jumlah populasi spesies I adalah:
$$\frac{dX}{dt} = a\left(1-\frac{X}{K}\right)X - bXY$$
2) Laju perubahan populasi spesies II akan berkurang seiring dengan adanya interaksi pemangsaan oleh spesies III sehingga diperoleh:
$$\frac{dY}{dt} = -eYZ$$
Laju perubahan populasi spesies II juga akan berkurang karena adanya kematian alami dari spesies II sebesar cY, sehingga diperoleh:
$$\frac{dY}{dt} = -eYZ - cY$$
Laju perubahan populasi spesies II akan bertambah dengan adanya interaksi dengan spesies I sebesar fXY. Sehingga diperoleh laju perubahan populasi spesies II yaitu:
$$\frac{dY}{dt} = fXY - eYZ - cY$$
3) Laju perubahan populasi spesies III akan berkurang dengan adanya kematian alami sebesar gZ, sehingga diperoleh:
$$\frac{dZ}{dt} = -gZ$$
Laju perubahan populasi spesies III akan bertambah akibat adanya interaksi dengan spesies II sebesar hYZ. Sehingga diperoleh laju perubahan populasi spesies III yaitu:
$$\frac{dZ}{dt} = hYZ - gZ$$

Diperoleh model matematika rantai makanan tiga spesies sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= a\left(1-\frac{X}{K}\right)X - bXY \\ \frac{dY}{dt} &= fXY - eYZ - cY \\ \frac{dZ}{dt} &= hYZ - gZ\end{aligned} \qquad (1)$$

B. Analisis Model Matematika Rantai Makanan Tiga Spesies

Dengan menganalisis model di atas diperoleh empat titik tetap model yaitu $E_1 = (0,0,0)$ dimana ketiga spesies tidak ada pada sistem, $E_2 = (K,0,0)$ dimana jumlah spesies I sama dengan daya dukung lingkungan ketika tidak ada spesies II dan III, $E_3 = \left(\frac{c}{f}, \frac{a}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right), 0\right)$ dimana terdapat spesies I dan II sedangkan spesies III

tidak ada, $E_4 = \left(\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K,\ \frac{g}{h},\ \frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)$ dimana ketiga spesies dalam lingkungannya ada [11].

Analisis kestabilan titik tetap ditentukan dengan cara menentukan nilai eigen matriks Jacobi dari sistem [7]. Diperoleh matriks Jacobi dari sistem (1) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a-\frac{2aX}{K}-bY & -bX & 0 \\ fY & fX-eZ-c & -eY \\ 0 & hZ & hY-g \end{bmatrix}$$

Berikut analisis kestabilan keempat titik tetap model yang telah diperoleh:

1) Kestabilan titik $E_1 = (0,0,0)$

Diperoleh matriks Jacobi dari model sistem persamaan diferensial linier pada titik E_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi A_1 didapatkan dari $|A_1 - \lambda I| = 0$.
Sehingga diperoleh:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -c-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -g-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau $(a-\lambda)(-c-\lambda)(-g-\lambda) = 0$.

Dengan demikian diperoleh $\lambda_1 = a$ atau $\lambda_2 = -c$ atau $\lambda_3 = -g$. Berdasarkan kriteria kestabilan titik tetap E_1 tidak stabil karena terdapat nilai eigen yang positif.

2) *Kestabilan titik* $E_2 = (K, 0{,}0)$

Diperoleh matriks Jacobi dari model sistem persamaan diferensial linier pada titik E_2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a & -bK & 0 \\ 0 & fK-c & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{bmatrix}$$

.

Nilai eigen dari matriks Jacobi A_2 diperoleh dari $|A_2 - \lambda I| = 0$.
Sehingga diperoleh:

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & -bK & 0 \\ 0 & fK-c-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -g-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Atau $(-a-\lambda)((fK-c)-\lambda)(-g-\lambda) = 0$.

Dengan demikian diperoleh $\lambda_1 = -a$ atau $\lambda_2 = fK - c$ atau $\lambda_3 = -g$. Titik tetap E_2 stabil jika $fK < c$.

3) *Kestabilan titik* $E_3 = \left(\frac{c}{f}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{c}{fK}\right), 0\right)$

Titik E_3 ada jika $fK > c$. Selanjutnya diperoleh matriks Jacobi dari model sistem persamaan diferensial linear pada titik E_3:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\frac{ac}{fK} & -\frac{bc}{f} & 0 \\ \frac{faK-ac}{bK} & 0 & -\frac{ea}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right) \\ 0 & 0 & \frac{ha}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right)-g \end{bmatrix}$$

.

Nilai eigen dari matriks Jacobi A_3 diperoleh dari $|A_3 - \lambda I| = 0$.
Sehingga diperoleh:

$$\begin{vmatrix} -\frac{ac}{fK}-\lambda & -\frac{bc}{f} & 0 \\ \frac{faK-ac}{bK} & -\lambda & -\frac{ea}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right) \\ 0 & 0 & \frac{ha}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right)-g-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobi diatas diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^3 - \left[\left(\frac{ha}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right)-g\right)-\frac{ac}{fK}\right]\lambda^2 - \left[\frac{ac}{fK}\left(\frac{ha}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right)-g\right)+\left(\frac{afK-ac}{bK}\right)\left(-\frac{bc}{f}\right)\right]\lambda + \left(\frac{ha}{b}\left(1-\frac{c}{fK}\right)-g\right)\left(\frac{afK-ac}{bK}\right)\left(-\frac{bc}{f}\right) = 0$$

Berdasarkan hasil analisis dengan Routh Hurwitz diperoleh bahwa titik tetap E_3 stabil jika $ha \le bg$.

4) *Kestabilan titik* $E_4 = \left(\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K,\ \frac{g}{h},\ \frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)$

Titik E_4 ada jika $ha > bg$ dan $f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K > c$. Selanjutnya diperoleh matriks Jacobi dari model sistem persamaan diferensial linier pada titik E_4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix}$$

Dimana nilai entri matriks Jacobi A_4 sebagai berikut:

$$j_{11} = a - \frac{2a\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K}{K} - \frac{bg}{h}$$
$$j_{12} = -b\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K$$
$$j_{13} = 0$$
$$j_{21} = \frac{fg}{h}$$
$$j_{22} = f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K - e\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right) - c$$
$$j_{23} = -\frac{eg}{h}$$
$$j_{31} = 0$$
$$j_{32} = h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)$$
$$j_{33} = \frac{hg}{h} - g$$

Matriks A_4 dapat disederhanakan menjadi:

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{bg-ha}{h} & -b\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K & 0 \\ \frac{fg}{h} & 0 & -\frac{eg}{h} \\ 0 & h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks Jacobi A_4 didapatkan dari $|A_4 - \lambda I| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \frac{bg-ha}{h} - \lambda & -b\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K & 0 \\ \frac{fg}{h} & -\lambda & -\frac{eg}{h} \\ 0 & h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobi diatas diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^3 - \left[\frac{bg-ha}{h}\right]\lambda^2 - \left[h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)\left(-\frac{eg}{h}\right) + \left(-b\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K\right)\left(\frac{fg}{h}\right)\right]\lambda + h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)\left(-\frac{eg}{h}\right)\left(\frac{bg-ha}{h}\right) = 0$$

Berdasarkan hasil analisis dengan Routh Hurwitz diperoleh $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$, dimana:

$$a_1 = -\left[\frac{bg-ha}{h}\right]$$
$$a_2 = -\left[h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)\left(-\frac{eg}{h}\right) + \left(-b\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K\right)\left(\frac{fg}{h}\right)\right]$$
$$a_3 = h\left(\frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)\left(-\frac{eg}{h}\right)\left(\frac{bg-ha}{h}\right)$$

sehingga titik tetap E_4 stabil.

C. Pengujian Model

Pengujian model digunakan untuk menguji kecocokan model dengan situasi nyata. Model yang diperoleh terdiri dari tiga variabel yaitu X, Y dan Z dimana X menggambarkan jumlah populasi spesies I, Y merupakan jumlah spesies II dan Z mewakili jumlah populasi spesies III. Pengujian dilakukan dengan mengumpamakan setiap variabel sama dengan nol, kemudian dilihat apa akibat yang terjadi pada sistem.

1) Jika $X = 0$,
   Model menjadi:

$$\frac{dX}{dt} = 0$$
$$\frac{dY}{dt} = -eYZ - cY$$
$$\frac{dZ}{dt} = hYZ - gZ$$

Persamaan $\frac{dY}{dt} = -eYZ - cY$ menggambarkan populasi spesies II terus berkurang seiring berjalannya waktu. Hal ini disebabkan karena ketiadaan populasi spesies I sebagai makanannya sehingga populasi spesies II tidak dapat berkembang, sementara populasi spesies II terus mengalami kematian alami sebesar cY dan spesies III terus melakukan pemangsaan terhadap spesies II sebesar eYZ. Berkurangnya populasi spesies II juga berdampak pada berkurangnya populasi spesies III karena pertumbuhan populasi spesies III bergantung pada tersedianya populasi spesies II. Hal ini terlihat pada persamaan $\frac{dZ}{dt} = hYZ - gZ$. Jika Y terus bergerak menuju nol seiring berjalannya waktu maka akhirnya $\frac{dZ}{dt} = -gZ$. Hal ini sesuai dengan kondisi real yang ada pada suatu ekosistem.

2) Jika $Y = 0$
   Model menjadi:

$$\frac{dX}{dt} = a\left(1-\frac{X}{K}\right)X$$
$$\frac{dY}{dt} = 0$$
$$\frac{dZ}{dt} = -gZ$$

Ketika populasi spesies II tidak ada, hal ini menyebabkan populasi I terus tumbuh seiring berjalannya waktu sampai batas daya dukungnya tanpa ada yang memangsa sebagaimana yang ditunjukkan persamaan $\frac{dX}{dt} = a\left(1-\frac{X}{K}\right)X$. Sedangkan populasi spesies III berkurang seiring berjalannya waktu karena ketiadaan spesies II sebagai makanannya untuk berkembang sebagaimana yang ditunjukkan persamaan $\frac{dZ}{dt} = -gZ$. Hal ini sesuai dengan kondisi real yang ada pada suatu ekosistem.

3) Jika $Z = 0$
   Model menjadi:

$$\frac{dX}{dt} = a\left(1-\frac{X}{K}\right)X - bXY$$
$$\frac{dY}{dt} = fXY - cY$$
$$\frac{dZ}{dt} = 0$$

Karena ketiadaan spesies III interaksi hanya terjadi antara dua populasi spesies yaitu populasi spesies I dan populasi spesies II. Pengurangan populasi spesies II terjadi hanya karena kematian alaminya tanpa ada lagi spesies III yang memangsa. Hal ini sesuai dengan kondisi real yang ada pada suatu ekosistem.

D. Interpretasi

Berdasarkan pembahasan dan analisis titik tetap diatas dapat diinterpretasikan sebagai berikut:

1) Titik E_2 stabil jika $fK < c$. Hal ini menunjukkan jika perbandingan tingkat kematian dengan tingkat pertumbuhan spesies II lebih besar dari daya dukung untuk pertumbuhan spesies I atau dengan kata lain tingkat kematian spesies II lebih besar dari tingkat perkembangannya maka suatu saat populasi spesies II dan III akan punah sedangkan spesies I tetap ada sebesar daya dukungnya.
2) Titik E_3 stabil jika $ha \leq bg$. Hal ini menunjukkan jika perkalian tingkat kematian spesies I dengan spesies III lebih besar atau sama dengan perkalian tingkat pertumbuhan kedua spesies tersebut, maka suatu saat spesies III akan punah.
3) Titik E_4 stabil. Dari kondisi ini dapat disimpulkan bahwa ketiga populasi spesies dalam rantai makanan tidak akan pernah punah jika perkalian tingkat pertumbuhan spesies I dengan spesies III lebih besar dari perkalian tingkat kematian kedua spesies tersebut.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, diperoleh model matematika rantai makanan tiga spesies berupa sistem persamaan diferensial non linier yang terdiri dari tiga persamaan.

Persamaan pertama merupakan laju perubahan jumlah populasi spesies I, persamaan kedua merupakan laju perubahan jumlah populasi spesies II dan persamaan ketiga merupakan laju perubahan jumlah populasi spesies III. Dimana spesies I disimbolkan dengan X, spesies II disimbolkan dengan Y dan spesies III disimbolkan dengan Z.

Model tersebut memiliki empat titik tetap yaitu $E_1 = (0,0,0)$, $E_2 = (K, 0,0)$, $E_3 = \left(\frac{c}{f}, \frac{a}{b}\left(1 - \frac{c}{fK}\right), 0\right)$ dan $E_4 = \left(\left(1 - \frac{bg}{ha}\right)K,\ \frac{g}{h},\ \frac{f\left(1-\frac{bg}{ha}\right)K-c}{e}\right)$. Titik E_1 tidak stabil, titik E_2 stabil jika $fK < c$, titik E_3 stabil jika $ha \leq bg$ dan titik E_4 stabil.

Berdasarkan analisis terhadap titik tetap tersebut diketahui bahwa ketiga populasi dalam rantai makanan tidak punah jika perkalian tingkat pertumbuhan spesies I dengan spesies III lebih besar dari perkalian tingkat kematian kedua spesies tersebut.

REFERENSI

[1] Brauer, Fred & Castillo-Chávez, Carlos. 2001. *Mathematical Model in population Biology and Epidemiology*. New York: Springer Verlag.

[2] Champbell, Neil A., Reece, Jane B., & Mitchell, Lawrence G. 2004. *Biologi edisi kelima jilid III.* Jakarta: Erlangga.

[3] Davis, Christopher D. 2009. *A generalized Food Web for Lake Pontchartrain in Southestearn Lousiana.* Lake Pontchartrain Basin Fondation.

[4] Dym, Clive L. 2004. *Principles of Mathematical Modelling Second Edition*. San Diego: Elsevier Academic Press.

[5] Edelstein, Leah & Keshet. 2005. *Mathematical Model in Biology.* Philadelphia: SIAM.

[6] Finizio, N. & Ladas, G. 1988. *Persamaan diferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Jakarta: Erlangga.

[7] Kohler, Werner & Johnson, Lee. 2006. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems Second Edition.* Boston: Pearson Education, Inc.

[8] Ross, Shepley L. 1989. Introduction to ordinary Differential Equations. USA: John Willey & Sons.

[9] Solway, Andrew. 2007. *Food Chains and Webs What are They and How Do They Work?.*Rourke Publishing.

[10] Widowati & Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro.

[11] Sukma, Yongki. 2014. Model Matematika Rantai Makanan Tiga Spesies. UNP. Padang.

[12] Ramli, Dzaki. 1989. *Ekologi*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi : Jakarta.