Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR

Shelvia Mandasari[#1], M. Subhan[*2], Meira Parma Dewi[*3]

[#]*Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*
[*]*Lecturers of Mathematics Departement State University of Padang, Indonesia*
Jl. Prof. Dr. Hamka Air Tawar, Padang, 25131, Telp (0751) 444648, Indonesia

[1]shelviamandasari@gmail.com
[2]13subhan@gmail.com
[3]meira.pd@fmipa.unp.ac.id

Abstract – QR decomposition is a numerical method to solves a System Linear Equations with *n* equations and *n* variables. This decomposition obtained by Gram Schimdt process and inner product space. From that method make an algorithm, that has been made a computer program to solve that System Linear Equations with *n* equations and *n* variables. The solution that obtained by this decomposition more accurate with small errors because this method only use two process so this decomposition more effective than that other numerical method.

Keywords -- Inner Product Space, Gram Schmidt Process, QR Decomposition

Abstrak **–** Dekomposisi QR merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan suatu Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan *n* persamaan dan *n* variabel. Dekomposisi ini diperoleh dari proses Gram Schmidt dan ruang hasil kali dalam . Dari kedua metode tersebut dibuat sebuah algoritma. Kemudian dari algoritma tersebut, dibuat sebuah program komputer untuk menyelesaikan suatu Sistem Persamaan Linier dengan *n* persamaan dan *n* variabel. Hasil yang didapat dari dekomposisi tersebut lebih akurat dengan galat yang dihasilkan kecil karena dekomposisi ini hanya melibatkan kedua proses tersebut sehingga dekomposisi ini lebih efektif dari metode numerik lainnya.

Kata kunci **--** Ruang Hasil Kali Dalam , Proses Gram Schmidt, Dekomposisi QR.

PENDAHULUAN

Pada umumnya, penyelesaian suatu masalah Matematika dapat diklasifikasikan atas penyelesaian analitik dan numerik [1]. Penyelesaian analitik diterapkan pada persoalan yang sederhana dan terbatas. Penyelesaian ini memiliki keunggulan yaitu solusi yang dihasilkan adalah solusi eksak. Namun, dalam dunia nyata persoalan yang muncul melibatkan persoalan yang rumit dan dengan persamaan yang kompleks sehingga penyelesaian analitik tidak lagi dapat diterapkan sehingga solusinya digunakan penyelesaian numerik [6].

Tak terkecuali dalam penyelesaian suatu Sistem Persamaan Linear (SPL). Permasalahan yang sering muncul melibatkan *n* persamaan dan *n* variabel sehingga sulit diselesaiakan dengan metode analitik. Akibatnya metode numerik menjadi alternatif lain untuk digunakan. Metode numerik akan menghasilkan solusi yang memiliki galat (error). Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan SPL adalah dekomposisi matriks. Ada beberapa dekomposisi matriks yang dapat digunakan diantaranya dekomposisi Schur, Cholesky, LU dan sebagainya. Diantara dekomposisi tersebut, dekomposisi yang dinilai cukup efektif adalah dekomposisi QR. Metode ini cukup efektif dari metode lainnya karena dalam penyelesaiannnya hanya melibatkan proses Gram Schmidt dan hasil kali dalam sehingga tingkat kesalahan yang dihasilkan lebih sedikit. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaiakan SPL yang matriks koefisiennya berukuran *nxn* yang mempunyai rank penuh dengan Dekomposisi QR sehingga solusi hampiran yang diperoleh mendekati solusi eksaknya.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan analisis teori–teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan kepada kajian kepustakaan.

Langkah kerja yang akan dilakukan adalah mempelajari studi literatur yang mengkaji tentang matriks, Sistem Persamaan Linear, vektor, hasil kali dalam, proses Gram Schmidt, algoritma dan metode numerik. Selanjutnya menelaah proses Gram Schmidt untuk mendapatkan sebuah algoritma proses Gram Schmidt, kemudian mengembangkan algoritma tersebut untuk mendapatkan sebuah dekomposisi matriks. Selanjutnya algoritma itu dituangkan dalam sebuah program komputer sehingga dapat menyelesaikan suatu SPL yang berukuran besar dengan dekomposisi QR dan langkah terakhir menyimpulkan hasil dari penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Penyelesaian SPL dengan Dekomposisi QR

Misalkan terdapat sebuah Sistem Persamaan Linear (SPL),

$$AX=B \tag{1}$$

dimana A adalah matriks berukuran *n*x*n*, X adalah matriks variabel yang berukuran *n*x1 dan B adalah matriks konstanta yang berukuran *n*x1. Matriks A dapat ditulis menjadi matriks yang dibentuk oleh vektor-vektor kolom $[u_1 \vdots u_2 \vdots \cdots \vdots u_n]$, dimana u_1 adalah kolom pertama dari matriks A, u_2 adalah kolom kedua dari matriks A, dan begitu seterusnya.

Pandang matriks A adalah matriks yang memiliki rank penuh sehingga SPL AX=B mempunyai solusi yaitu tepat satu solusi. Karena A mempunyai rank penuh, ini berarti banyaknya satu utama yang terbentuk ketika matriks A dijadikan matriks eselon baris tereduksi adalah sebanyak *n* sehingga A tidak mempunyai vektor-vektor kolom dan vektor-vektor baris nol. Ini berarti vektor-vektor kolom dari A adalah bebas linear. Selanjutnya matriks A dapat dibentuk menjadi matriks eselon baris tereduksi, maka matriks A adalah matriks identitas dimana entri-entri diagonal utama dari vektor-vektor $[u_1 \vdots u_2 \vdots \cdots \vdots u_n]$ adalah 1 sehingga panjang u_i adalah 1. Hal ini mengakibatkan, matriks A dapat dibentuk menjadi basis ortonormal. Misalkan basis ortonormal tersebut dengan q_i.

Berdasarkan teorema mengenai basis ortonormal [2] diperoleh suatu persamaan

$$u_1 = \langle u_1, q_1\rangle q_1 + \langle u_1, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_1, q_n\rangle q_n$$

$$u_2 = \langle u_2, q_1\rangle q_1 + \langle u_2, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_2, q_n\rangle q_n$$

$$\vdots$$

$$u_n = \langle u_n, q_1\rangle q_1 + \langle u_n, q_2\rangle q_2 + \cdots + \langle u_n, q_n\rangle q_n \tag{2}$$

Persamaan di atas dapat kita tulis menjadi

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_1, q_2\rangle & \dots & \langle u_1, q_n\rangle \\ \langle u_2, q_1\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_2, q_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, q_1\rangle & \langle u_n, q_2\rangle & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Jika bentuk matriks di atas ditansposkan maka akan menghasilkan

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_1, q_2\rangle & \dots & \langle u_1, q_n\rangle \\ \langle u_2, q_1\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_2, q_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, q_1\rangle & \langle u_n, q_2\rangle & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \right)^T$$

Berdasarkan definisi matriks transpose [2] diperoleh

$$[u_1 \vdots u_2 \vdots \cdots \vdots u_n] = [q_1 \vdots q_2 \vdots \cdots \vdots q_n] \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \dots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix} \tag{4}$$

Karena $[u_1 \vdots u_2 \vdots \cdots \vdots u_n]$ merupakan vektor-vektor kolom dari A maka secara ringkas dapat ditulis

A=QQ* dimana

$$Q^* = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle & \langle u_2, q_1\rangle & \dots & \langle u_n, q_1\rangle \\ \langle u_1, q_2\rangle & \langle u_2, q_2\rangle & & \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle u_1, q_n\rangle & \langle u_2, q_n\rangle & \dots & \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} \langle q_1, u_1\rangle & \langle q_1, u_2\rangle & \dots & \langle q_1, u_n\rangle \\ \langle q_2, u_1\rangle & \langle q_2, u_2\rangle & & \langle q_2, u_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle q_n, u_1\rangle & \langle q_n, u_2\rangle & \dots & \langle q_n, u_n\rangle \end{bmatrix}$$

akan setara dengan Q^TA melalui proses yang terdapat pada referensi [3]

Sebelumnya telah disebutkan bahwa q_i adalah basis ortonormal sehingga untuk menentukan q_i digunakan proses Gram Schmidt [2]. Proses Gram Schmidt menggariskan bahwa $i \geq 2$, vektor q_i orthogonal terhadap $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$ sehingga semua entri yang terletak dibawah diagonal utama matriks Q* adalah nol sehingga matriks Q* adalah matriks segitiga atas.

Selanjutnya matriks Q* ini dinamakan matriks R oleh H. Rutishauser [4] sehingga A=QR. Akibatnya SPL AX=B akan menjadi QRX=B. Solusi dari SPL ini adalah nilai x_1, x_2, x_3,…,x_n yang memenuhi SPL tersebut. Untuk menyelesaikan solusi dari SPL tersebut maka dapat dilakukan langkah berikut

1. Lakukan langkah QY=B, dimana Y adalah matriks kolom yang berbentuk Y=$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
   QY=B
   $$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & & q_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & , q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$
   sehingga diperoleh nilai $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2. Lakukan langkah RX=Y, dimana X adalah matriks kolom yang berbentuk X=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.
   RX=Y
   $$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$ sehingga diperoleh nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang merupakan solusi dari SPL AX=B.

B. Penyusunan Algoritma

Akan diselesaikan solusi dari SPL yang berbentuk AX=B dimana A_{nxn} telah didekomposisi menjadi A=QR, Q adalah vektor-vektor ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas. Berikut ini akan diperlihatkan algoritma untuk menentukan solusi dari SPL dengan dekomposisi QR sehingga dapat digunakan dalam pembuatan program.

Algoritma Dekomposisi QR pada SPL dengan *n* persamaan dan *n* variabel.

Deklarasi Variabel:
1. *n* (ukuran matriks koefisien dari SPL)
2. a_{ij}, i=1,2,3,…,n, j=1,2,3,…,n (entri-entri matriks koefisien yaitu matriks A)
3. b_{i1}, i=1,2,3,…,n (entri-entri matriks konstanta yaitu matriks B)
4. u_i, i=1,2,3,…,n (matriks kolom ke-i pada matriks koefisien)
5. v_i, i=1,2,3,…,n (proyeksi ortogonal)
6. Q (matriks yang dibentuk oleh v_i)
7. R (matriks segitiga atas)
8. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ {Penyelesaian SPL}

Masukan
1. n
2. a_{ij}
3. b_{i1}

Keluaran

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

Proses
1. Masukkan nilai *n*.
2. Masukkan $a_{ij}\ dan\ b_{i1}$
3. Membentuk vektor-vektor kolom dari A
   Untuk i=1,2,3,…,n lakukan
   u_i:= matriks kolom ke-i dari A
4. Proses Ortogonalisasi
   $v_1 := u_1$
   Untuk i=2,3,4,…n lakukan
   $v_i := u_i - proy_{\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}} u_i$
5. Proses Normalisasi
   Untuk i=1,2,3,…,n lakukan
   $q_i := \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$
6. Membentuk matriks Q
   Q := matriks yang dibentuk oleh q_i
7. Membentuk matriks R
   $R=Q^TA$
8. Pencarian solusi
   $Y=Q^{-1}B$ sehingga diperoleh nilai $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dan lakukan
   $X=R^{-1}Y$ sehingga diperoleh nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang merupakan solusi dari SPL yang diselesaikan.

Algoritma yang telah dibuat, dipindahkan ke dalam sebuah program komputer, dimana program yang digunakan adalah program Maple dan dapat dilihat pada referensi [3]. Perintah-perintah yang digunakan berpodoman pada referensi [5].

Selanjutnya program tersebut akan dicobakan untuk menyelesaikan suatu SPL berikut:

$2x_1+2x_2+x_3=-3$
$6x_1+x_2+x_3=4$
$3x_2-2x_3=-11$

Karena SPL tersebut masih berukuran kecil secara analitik akan mudah diselesaikan. Salah satunya metode yang dapat digunakan adalah dengan cara eliminasi Gauss-Jordan [2]. Langkah awal untuk menyelesaikannya adalah bentuk SPL tersebut menjadi AX=B sehingga SPL tersebut dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya SPL yang telah dibentuk menjadi AX=B , dibentuk lagi menjadi matriks yang diperbesar sehingga

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -11 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bentuk matriks tersebut menjadi matriks eselon baris tereduksi [2] dengan proses OBE [2] sehingga didapatkan matriks eselon baris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks tersebut diperoleh solusinya x_1=1, x_2=-3, dan x_3=1.

Lalu akan diselidiki apakah algoritma dan program yang telah dibuat tepat dan benar dengan menyelidiki hasil yang diperoleh dengan program yang dibuat [3].

Berdasarkan program yang dibuat diperoleh solusinya dengan menerapkan langkah-langkah berikut

1. Terapkan proses Gram Schmidt [2] pada matriks, sehingga diperoleh matriks Q yang kolom-kolomnya disusun oleh hasil proses Gram Schmidt pada masing-masing kolom matriks.

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}31622776600000 \\ 0{,}948683298000000 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}442325868450000 \\ -0{,}147441956150000 \\ 0{,}884651736900000 \end{bmatrix},$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} 0{,}839254327517415 \\ -0{,}279751442505805 \\ -0{,}466252404165171 \end{bmatrix}.$$

2. Temukan matriks R dengan cara Q^TA sehingga diperoleh :

$$R = \begin{bmatrix} 6{,}32455532000000 & 1{,}58113883000000 & 1{,}26491106400000 \\ 0 & 3{,}392264991450 & -1{,}47441956150000 \\ -0{,}666133814775094.10^{-15} & 0{,}335120819983104.10^{-10} & 1{,}49200769334195 \end{bmatrix}$$

3. Sehingga matriks A telah didekomposisi menjadi perkalian matriks Q dan R.
4. Selanjutnya lakukan langkah-langkah sesuai dengan referensi [3] untuk mendapatkan solusi dari SPL tersebut sehingga solusi yang diperoleh adalah

   x_1=1,00000000015342,
   x_2=-3,00000000029923,
   x_3=0,999999999846561.

Terlihat galat yang dihasilkan oleh Dekomposisi QR adalah kecil yaitu 0,00000000015342 sehingga dapat disimpulkan algoritma dan program yang dibuat adalah tepat dan benar.

Selanjutnya ketepatan dan keefektifan program tersebut akan dicobakan pada SPL yang berukuran lebih besar misalnya berukuran 9x9.

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 8x_8 + x_9 = 92 \\ &x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 7x_6 - 2x_7 - 9x_9 = -78 \\ &x_1 - x_2 - 2x_5 + 4x_6 + 6x_7 - 7x_8 = -74 \\ &2x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 - 4x_5 + x_9 = -50 \\ &6x_1 - x_2 + 4x_5 - 3x_6 - 3x_7 + x_8 = 68 \\ &x_1 - x_2 + 4x_5 - 3x_6 - 3x_8 + x_9 = 32 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_5 - 2x_6 - x_7 + 2x_8 + 4x_9 = 88 \\ &x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 8x_8 - x_9 = 84 \\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 3x_7 - 4x_9 = -36 \end{aligned}$$

Berdasarkan proses dan langkah-langkah yang sama dengan SPL yang telah diselesaikan di atas diperoleh solusinya yaitu

x_1=3,00000001290931,
x_2=-0.999999931041,
x_3=−4,00000000343191,
x_4=6,00000002146075,
x_5=7,00000000372271,
x_6=−4,99999999989372,
x_7=2,00000000282784,
x_8=7,9999999942482
x_9=9,00000000934642

Jika SPL tersebut diselesaikan secara analitik solusi yang diperoleh adalah :

$x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = -4, x_4 = 6, x_5 = 7, x_6 = -5,$
$x_7 = 2, x_8 = 8,\ x_9 = 9.$

Dari proses di atas terlihat walaupun SPL yang diselesaikan berukuran besar, namun galat yang dihasilkan tetap kecil sehingga dapat disimpulkan algoritma dan program yang dibuat cukup tepat dan efektif.

Keefektifan dan keakuratan Dekomposisi QR dibandingkan dengan Dekomposisi lain misalkan Dekomposisi LU dalam menyelesaikan suatu SPL dapat dilihat pada Tabel 1. Dari Tabel 1 terlihat, dekomposisi LU hanya efektif untuk SPL yang berukuran kecil. Namun ketika SPL yang diselesaikan dengan Dekomposisi LU berukuran besar, galat yang dihasilkan lebih besar dibandingkan galat yang dihasilkan oleh Dekomposisi QR. Hal ini terlihat ketika SPL yang diselesaikan berukuran 5x5, Dekomposisi LU lebih efektif dengan solusi yang dihasilkan sangat mendekati solusi eksaknya. Tetapi jika SPL yang diselesaikan berukuran besar yakni 9x9 Dekomposisi QR lebih efektif dari Dekomposisi LU. Hal ini terlihat dari galat yang dihasilkan oleh Dekomposisi QR lebih kecil daripada galat yang dihasilkan Dekomposisi LU.

TABEL I
HASIL PERHITUNGAN SPL DENGAN DEKOMPOSISI LU DAN DEKOMPOSISI QR

Ukuran Matriks Koefisien	Xn	Solusi			Galat	
		Eksak	Dekomposisi LU	Dekomposisi QR	Dekomposisi LU	Dekomposisi QR
5X5	x_1	1	0,9999999998673	1,00000000181589	$1,3.10^{-10}$	$1,81.10^{-9}$
	x_2	1	1,00000000011028	1,00000000025339	$1,1.10^{-10}$	$2,53.10^{-10}$
	x_3	1	0,999999999964852	0,999999999627918	$3,5.10^{-11}$	$3,7.10^{-10}$
	x_4	1	1,00000000008709	0,999999999544299	$8,7.10^{-11}$	$4,5.10^{-10}$
	x_5	1	0,999999999972679	1,00000000065335	$2,7.\ 10^{-11}$	$6,53.10^{-10}$
7x7	x_1	1	0,999999882199427	1,00000001137832	$1,17.10^{-7}$	$1,13.10^{-8}$
	x_2	2	1,99999966530685	2,00000003395057	$3,35.10^{-7}$	$3,39.10^{-8}$
	x_3	3	2,99999944136711	3,00000005524243	$5,59.10^{-7}$	$5,52.10^{-8}$
	x_4	4	3,99999987765166	4,00000001824053	$1,23.10^{-7}$	$1,82.10^{-8}$
	x_5	5	4,99999977241780	5,00000002677505	$2,28.10^{-7}$	$2,67.10^{-8}$
	x_6	6	5,99999980448625	6,00000002648188	$1,96.10^{-7}$	$2,64.10^{-8}$
	x_7	7	6,99999999943153	7,00000000381238	$5,6.10^{-10}$	$3,81.10^{-9}$
9X9	x_1	3	2,99999988525807	3,00000001290931	$1,14.10^{-7}$	$1,29.10^{-8}$
	x_2	-1	-1,00000030149700	-0,999999960931042	$3,01.10^{-7}$	$3,908.10^{-8}$
	x_3	-4	-3,99999997875311	-4,00000000343191	$2,1246.10^{-8}$	$3,43.10^{-9}$
	x_4	6	5,99999998636870	6,00000002146075	$1,401.10^{-7}$	$2,146.10^{-8}$
	x_5	7	6,99999998636870	7,00000000372271	$1.363.10^{-8}$	$3,722.10^{-9}$
	x_6	-5	-4,99999986755143	-4,99999999989372	$1,32.10^{-7}$	$1,062.10^{-10}$
	x_7	2	1,99999992801313	2,00000000282784	$7,198.10^{-8}$	$2,82.10^{-9}$
	x_8	8	8,00000004455580	7,99999999424824	$4,45558.10^{-8}$	$5,75.10^{-9}$
	x_9	9	9,00000006858313	9,00000000934642	$6,85.10^{-9}$	$9,346.10^{-9}$

Dimana pada Tabel 1, matriks diperbesar yang digunakan adalah

$$,\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & -4 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 8 & 53 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 13 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & -3 & -35 \\ 5 & -1 & -3 & 0 & 8 & -2 & -5 & -13 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 4 & -9 & -40 \\ 1 & -3 & 0 & 16 & -3 & -4 & 0 & 20 \\ 1 & 3 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 & -48 \end{bmatrix} dan \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 92 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & -2 & 0 & -9 & -78 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 6 & -7 & 0 & -74 \\ 2 & 1 & 6 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -50 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 4 & 6 & 7 & 8 & -3 & 68 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -3 & 1 & 32 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 2 & 4 & 88 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & -1 & 84 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -4 & -36 \end{bmatrix}$$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dalam mencari solusi hampiran suatu SPL dengan *n* persamaan dan *n* variabel yang matriks koefisiennya mempunyai rank penuh, dengan dekomposisi QR adalah dengan langkah-langkah berikut: masukkan ukuran matriks A kemudian masukkan entri-entri dari matriks A dan B. Selanjutnya bentuk matriks A menjadi matriks-matriks kolom dari A itu sendiri yang dilambangkan dengan u_i, dimana u_i menunjukkan kolom ke-*i* dari A. Lakukan proses ortogonalisasi dan normalisasi terhadap matriks A dengan proses Gram Schmidt sehingga diperoleh basis ortonormal q_i yang dibentuk menjadi matriks Q. Selanjutnya bentuk sebuah matriks R dengan cara $R=Q^TA$. Dengan proses tersebut akan diperoleh matriks Q dan R sehingga A=QR. Selanjutnya SPL QRX=B diselesaikan dengan cara $Y=R^{-1}B$ sehingga diperoleh nilai $y_1, y_2, \dots, y_n$ dan lakukan $X=Q^{-1}Y$ sehingga diperoleh nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang merupakan solusi dari SPL yang diselesaikan.
2. Solusi yang dihasilkan oleh Dekomposisi QR cukup akurat karena galat yang dihasilkan kecil.

REFERENSI

[1] Susila, I Nyoman. 1992. *Dasar-Dasar Metode Numerik.* Bandung: FMIPA UNP.

[2] Anton, Howard dan Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer,* Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1. Jakarta: Erlangga

[3] Shelvia Mandasari. *Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) Dengan Dekomposisi QR.* FMIPA UNP.

[4] Kreyszig, Erwin. 1993. Matematika Teknik Lanjutan. Edisi ke-6 Buku I. Jakarta: Gramedia.

[5] L. Abell, Martha dan James B. Braselton. 2004. *Maple by Example 3rd Edition.* Georgia. British Library.

[6] Munir, Rinaldi. 2006. Metode Numerik. red. Rev. Bandung. Informatika.