

Model Matematika Populasi Plankton dan Konsentrasi Nitrogen

Elvi Silvia^{1#}, Yarman^{2*}, Muhammad Subhan^{3*}

[#] Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia

^{*} Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia

¹elvisilvia92@gmail.com

²yarman_unp@yahoo.co.id

³13subhan@gmail.com

Abstract – Phytoplankton and zooplankton have a major impact on the marine ecosystem because plankton is the main food chain in the ecosystem. However, this plankton's concentration changes is influenced by nitrogen concentrations. This study began by making mathematical model based on the variables, parameters and assumptions that have been determined. Next step are finding and analyze an equilibrium point. Mathematical model in plankton populations and nitrogen concentration in the form of non-linear differential equation system. This dynamical system have two equilibrium points ie the points where nitrogen without plankton and the point where nitrogen and plankton. The stability of the system can be viewed from two condition, first when the system has one point where nitrogen without plankton then this point will be stable. Second, when the system have two equilibrium points then only point where nitrogen and plankton will be stable. This result show that population of phytoplankton, zooplankton and nitrogen concentration will not disappear in the long term.

Keywords – Nitrogen, plankton, mathematical model

Abstrak – Fitoplankton maupun zooplankton mempunyai pengaruh besar di ekosistem laut karena plankton merupakan rantai makanan utama dalam ekosistem. Namun perubahan konsentrasi plankton dipengaruhi oleh konsentrasi nitrogen. Penelitian ini dimulai dengan membentuk model matematika berdasarkan variabel, parameter dan asumsi yang telah ditentukan. Kemudian mencari titik kesetimbangan dan menganalisis titik kesetimbangan serta interpretasi dari hasil analisis model. Model matematika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen berupa sistem persamaan diferensial non linear, dimana terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik keberadaan nitrogen tanpa plankton atau E_1 dan titik keberadaan nitrogen dan plankton. Kestabilan sistem dapat dilihat dari dua situasi yaitu ketika sistem memiliki satu titik keberadaan nitrogen tanpa plankton maka titik ini akan stabil. Sedangkan ketika sistem memiliki dua titik kesetimbangan maka hanya titik keberadaan nitrogen dan plankton saja yang bersifat stabil. Dimana hal ini menunjukkan bahwa populasi fitoplankton, zooplankton dan konsentrasi nitrogen tidak akan musnah dalam jangka waktu yang lama.

Kata Kunci – Nitrogen, plankton, model matematika

PENDAHULUAN

Ekosistem merupakan kumpulan beberapa populasi yang saling berinteraksi baik interaksi dalam populasi, antar populasi maupun interaksi dengan lingkungan abiotik [1]. Ekosistem dapat dibedakan menjadi ekosistem darat dan ekosistem perairan. Dalam ekosistem perairan khususnya ekosistem laut, banyak sekali organisme yang dapat kita temukan, salah satunya plankton.

Fitoplankton maupun zooplankton berperan penting dalam kehidupan di ekosistem laut. Dimana fitoplankton membutuhkan nitrogen dalam pertumbuhan dan perkembangannya sehingga kepadatan populasi fitoplankton dipengaruhi oleh konsentrasi nitrogen. Sedangkan kepadatan populasi zooplankton dipengaruhi

oleh fitoplankton yang merupakan sumber makanan utamanya. Selanjutnya fitoplankton dan zooplankton yang mati akan diregenerasi dan menghasilkan nitrogen [2]. Nitrogen ini akan digunakan kembali oleh fitoplankton dan begitu seterusnya.

Berdasarkan kondisi di atas, dapat dilihat bahwa ketiga komponen yaitu nitrogen, fitoplankton dan zooplankton saling mempengaruhi satu dengan yang lainnya. Jika salah satu anggota rantai makanan itu terputus atau salah satu komponen itu musnah, maka akan mengganggu keseimbangan ekosistem laut. Jika ketidakseimbangan ini dibiarkan terus menerus maka pada akhirnya akan dapat mengancam kehidupan

manusia. Kondisi ini dapat dijelaskan dalam bentuk matematika yang dikenal dengan model matematika.

METODE

Metode yang digunakan adalah analisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan kepada kajian kepustakaan. Langkah kerja yang akan dilakukan adalah meninjau masalah yang dihadapi, mengumpulkan dan mengaitkan teori-teori yang diperoleh dengan permasalahan model matematika dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen, membentuk model matematika dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen, melakukan analisis terhadap model yang diperoleh, dan memberikan interpretasi terhadap model.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Pembentukan Model

Model matematika dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen dipengaruhi oleh banyak faktor antara lain suhu, musim, tingkat konsumsi nitrogen oleh fitoplankton, tingkat kematian plankton, dan tingkat produksi nitrogen oleh plankton. Namun tidak semua faktor ini yang digunakan. Adapun variabel yang digunakan yaitu:

- N : konsentrasi nitrogen
- P : kepadatan populasi fitoplankton
- Z : kepadatan populasi zooplankton

Sedangkan parameter yang digunakan yaitu:

- a : tingkat kematian fitoplankton
- b : tingkat kematian zooplankton
- c : tingkat konsumsi nitrogen oleh fitoplankton
- d : efisiensi pengkonversian nitrogen yang dicerna oleh fitoplankton
- e : tingkat pemangsaan fitoplankton oleh zooplankton
- f : efisiensi pengkonversian fitoplankton yang dicerna oleh zooplankton.
- g : rata-rata penambahan nitrogen oleh fitoplankton yang mati.
- h : rata-rata penambahan nitrogen oleh zooplankton yang mati.

Asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Penambahan konsentrasi nitrogen di laut hanya berasal dari fitoplankton dan zooplankton yang telah mati.
2. Fitoplankton hanya dimakan oleh zooplankton.
3. Kepadatan populasi fitoplankton dipengaruhi oleh banyaknya nitrogen yang dikonsumsi dan efisiensi pengkonversian nitrogen yang dicerna oleh fitoplankton.
4. Kepadatan populasi zooplankton dipengaruhi oleh banyaknya fitoplankton yang dikonsumsi dan

efisiensi pengkonversian fitoplankton yang dicerna oleh zooplankton.

5. Rata-rata penambahan nitrogen oleh fitoplankton dan zooplankton konstan.
6. Tingkat kematian fitoplankton dan zooplankton konstan.

Berdasarkan hubungan antar variabel, parameter dan asumsi yang digunakan maka dapat dibuat model matematika dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen sebagai berikut:

Laju perubahan konsentrasi nitrogen bertambah sebesar banyaknya nitrogen yang dihasilkan oleh fitoplankton dan zooplankton yang telah mati yaitu sebesar $gaP + hbZ$. Karena nitrogen dikonsumsi oleh fitoplankton, maka konsentrasi nitrogen akan berkurang sebanyak yang dikonsumsi oleh fitoplankton tersebut yaitu cPN . Sehingga laju perubahan konsentrasi nitrogen pada waktu t adalah:

$$\frac{dN}{dt} = gaP + hbZ - cNP \quad (1)$$

Berdasarkan asumsi 1 maka laju perubahan kepadatan populasi fitoplankton sebanding pertambahan kepadatan populasi fitoplankton karena mengkonsumsi nitrogen yaitu sebesar $dcPN$. Dengan adanya pengkonsumsian fitoplankton oleh zooplankton maka laju perubahan kepadatan populasi fitoplankton akan berkurang sebesar fitoplankton yang dikonsumsi oleh zooplankton yaitu sebesar ePZ . Dan juga berkurang sebanyak fitoplankton yang mengalami kematian alami yaitu sebesar aP . Sehingga laju perubahan kepadatan populasi fitoplankton dalam waktu t adalah:

$$\frac{dP}{dt} = cdPN - ePZ - aP \quad (2)$$

Berdasarkan asumsi 2 kelangsungan hidup zooplankton bergantung kepada fitoplankton, sehingga laju perubahan kepadatan populasi zooplankton sebanding dengan pertambahan kepadatan populasi zooplankton karena mengkonsumsi fitoplankton yaitu $efPZ$, dan berkurang sebanyak zooplankton yang mengalami kematian alami yaitu sebesar bZ . Sehingga laju perubahan kepadatan populasi zooplankton dalam waktu t adalah:

$$\frac{dZ}{dt} = efPZ - bZ \quad (3)$$

Dari ke tiga persamaan di atas maka diperoleh model dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= gaP + hbZ - cNP \\ \frac{dP}{dt} &= cdPN - ePZ - aP \\ \frac{dZ}{dt} &= efPZ - bZ \end{aligned} \quad (4)$$

B. Hasil Analisis Model

Titik kesetimbangan dari model (4) dapat ditentukan pada saat turunan pertama masing-masing variabel terhadap waktu bernilai nol [3]. Model (4) mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu:

$$E_1 = (n, 0, 0) \text{ dan } E_2 = \left(\frac{a(g-hf)}{c(1-hfd)}, \frac{b}{ef}, \frac{a(gd-1)}{e(1-hfd)} \right)$$

Dimana titik E_1 akan selalu ada sedangkan titik E_2 ada jika memenuhi $hfd < 1$, $g > hf$ dan $gd > 1$.

Untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan ini digunakan matriks Jacobi. Dimana matriks Jacobi dari model (1) adalah:

$$J(E_i) = \begin{bmatrix} -cP & ag - cn & hb \\ cdP & cdN - eZ - a & -eP \\ 0 & efZ & efP - b \end{bmatrix} \quad (5)$$

Matriks Jacobi untuk titik $E_1 = (n, 0, 0)$ adalah:

$$J(E_1) = J_1 = \begin{bmatrix} 0 & ag - cn & hb \\ 0 & cnd - a & -b \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\lambda^3 + \frac{cb}{ef}\lambda^2 + \left(\frac{(abe + cdbah)(gd-1)}{e(1-hfd)} \right)\lambda + \left(\frac{ab^2c(gd-1)}{ef} \right) = 0 \quad (8)$$

Untuk menentukan kestabilan disekitar titik E_2 digunakan kriteria Routh-Hurwitz. Dimana,

$$A = \frac{cb}{ef} > 0,$$

$$C = \frac{ab^2c(gd-1)}{ef} > 0, \text{ dan}$$

$$AB - C = \frac{cb}{ef} \left(\frac{(abe + cdbah)(gd-1)}{e(1-hfd)} \right) - \left(\frac{ab^2c(gd-1)}{ef} \right) > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz ini diketahui bahwa titik kesetimbangan E_2 stabil. Artinya fitoplankton, zooplankton dan nitrogen tidak akan musnah dalam jangka waktu yang lama.

C. Interpretasi

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan E_1 selalu ada. Sedangkan titik kesetimbangan E_2 tidak selalu ada, titik ini ada jika memenuhi $hfd < 1$, $g > hf$ dan $gd > 1$. Kestabilan titik kesetimbangan E_1 belum dapat ditentukan, sedangkan titik kesetimbangan E_2 selalu stabil. Ada dua kasus yang mungkin terjadi pada sistem dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen yaitu:

Kasus I

Pada saat syarat keberadaan titik E_2 tidak terpenuhi maka sistem dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen hanya memiliki satu titik kesetimbangan yaitu titik E_1 . Disini titik kesetimbangan kesetimbangan E_1 akan bersifat stabil.

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(-\lambda)(cdn - a - \lambda)(-b - \lambda) = 0$$

Maka diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -b$. Dalam hal ini kestabilan di sekitar titik E_1 belum dapat ditentukan.

Sedangkan Matriks Jacobi untuk titik $E_2 = \left(\frac{a(g-hf)}{c(1-hfd)}, \frac{b}{ef}, \frac{a(gd-1)}{e(1-hfd)} \right)$ adalah

$$J(E_2) = J_2 = \begin{bmatrix} -cb & hfa(1-gd) & hb \\ ef & 1-hfd & -b \\ cdb & 0 & f \\ ef & 0 & -b \\ 0 & af(gd-1) & f \\ 0 & 1-hfd & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

Kasus II

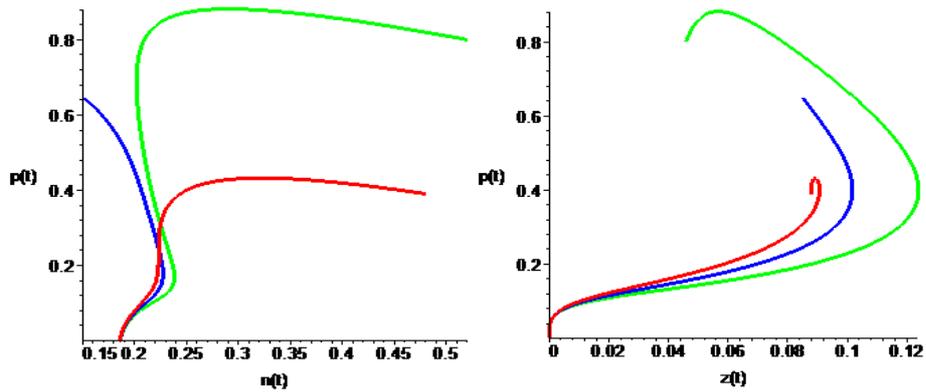
Ketika titik E_2 ada maka sistem akan memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik E_1 dan E_2 . Disini titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil dan titik kesetimbangan E_2 bersifat stabil. Pada kasus ini fitoplankton, zooplankton dan nitrogen tidak akan musnah dalam jangka waktu yang lama.

D. Simulasi

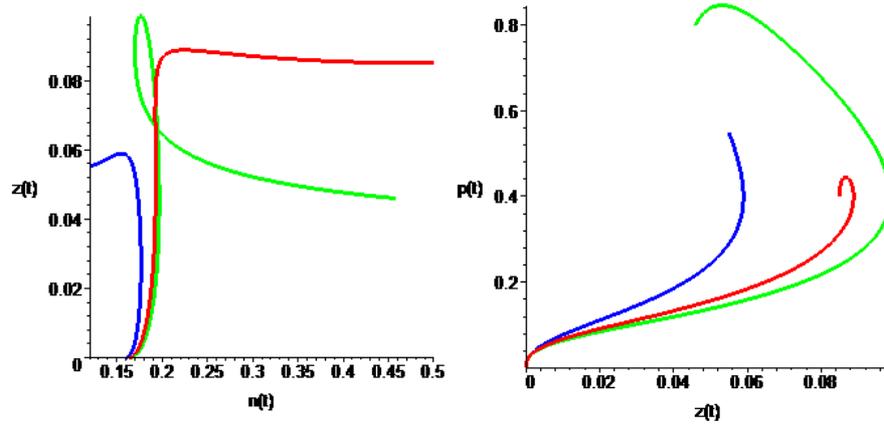
Simulasi untuk kasus I dapat dilihat pada gambar 1 dan 2. Dimana Parameter yang digunakan adalah, $a = 0,1$; $b = 0,08$, $c = 0,67$, $d = 0,7$, $e = 0,4$, $f = 0,5$, $g = 1,1$, dan $h = 1$. Titik awal untuk gambar 1 adalah $A=(0,48; 0,39; 0,088)$, $B=(0,15; 0,65; 0,085)$, dan $C=(0,52; 0,8; 0,046)$. Sedangkan untuk gambar 2 titik awal yang dipakai adalah $A=(0,5; 0,4; 0,085)$, $B=(0,12; 0,55; 0,055)$, dan $C=(0,457; 0,8; 0,046)$

Dari gambar 1 dan 2 dapat dilihat bahwa ketiga titik awal yang diberikan menuju ke titik $E_1 = (0,18; 0; 0)$. Artinya titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil, dimana dalam jangka waktu yang lama pada sistem dinamika hanya terdapat nitrogen saja.

Sedangkan simulasi untuk kasus II dapat dilihat pada Gambar 3. Parameter yang digunakan pada Gambar 3 adalah, $a = 0,1$; $b = 0,08$, $c = 0,6$, $d = 0,7$, $e = 0,4$, $f = 0,5$, $g = 1,6$, dan $h = 1$, tiga titik awal yang diberikan yaitu: $A=(0,3, 0,4, 0,05)$, titik $B=(0,28, 0,38, 0,055)$, dan titik $C=(0,27, 0,44, 0,046)$



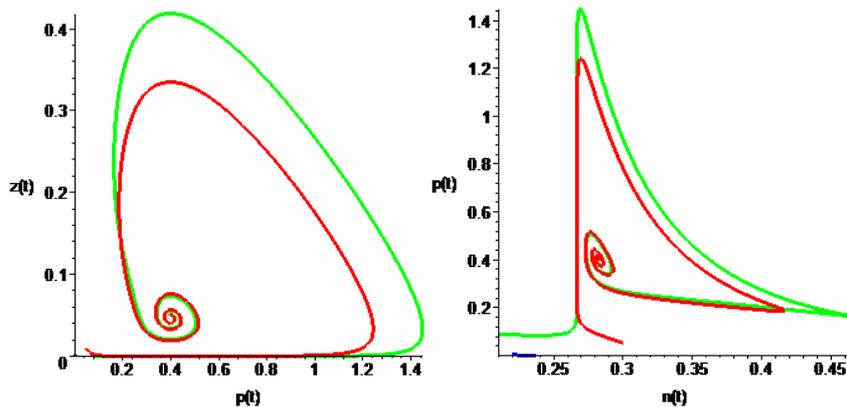
Gambar 1. Potret fase kepadatan fitoplankton, zooplankton dan nitrogen dimana ketiga titik awal menuju ke titik $E_1 = (0,18; 0; 0)$



Gambar 2. Potret fase kepadatan fitoplankton, zooplankton dan nitrogen dimana ketiga titik awal menuju ke titik $E_1 = (0,18; 0; 0)$

Dari gambar 3 dapat dilihat bahwa ketiga titik awal yang diberikan menuju ke titik kesetimbangan $E_2 = (0,282; 0,4; 0,0462)$. Artinya titik kesetimbangan E_2

bersifat stabil, dimana dalam jangka waktu yang lama fitoplankton, zooplankton dan nitrogen tidak akan musnah.



Gambar 3. Potret fase kepadatan fitoplankton, zooplankton dan nitrogen dengan titik $E_1 = (0,238; 0; 0)$ dan titik $E_2 = (0,282; 0,4; 0,0462)$

SIMPULAN

Model matematika dinamika populasi plankton dan konsentrasi nitrogen berbentuk persamaan diferensial non linear yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = gaP + hbZ - cNP$$

$$\frac{dP}{dt} = cdPN - ePZ - aP$$

$$\frac{dZ}{dt} = efPZ - bZ$$

Sistem dinamika ini bisa memiliki dua titik kesetimbangan atau hanya satu titik kesetimbangan saja yaitu $E_1 = (n, 0, 0)$ dan $E_2 = \left(\frac{a(g-hf)}{c(1-hfd)}, \frac{b}{ef}, \frac{a(gd-1)}{e(1-hfd)} \right)$. Pada saat sistem ini memiliki satu titik kesetimbangan E_1 maka titik ini akan stabil. Sedangkan ketika sistem memiliki dua titik kesetimbangan E_1 dan E_2 maka hanya titik E_2 yang bersifat stabil, dan titik E_1 akan menuju ke titik E_2 . Dengan kata lain, fitoplankton, zooplankton dan

nitrogen tidak akan musnah dalam jangka waktu yang lama.

REFERENSI

- [1] Irwan. 2007. Dasar-Dasar Ekologi. Jakarta: Gramedia.
- [2] Mulya, Miswar Budi. 2002. Bahan Organik Terlarut dan Tidak Terlarut Dalam Air Laut. Tesis Tidak Diterbitkan. Universitas Sumatera Utara.
- [3] Ross, S. 1989. Introduction to Ordinary Differential Equation. New York: Jhon Wiley & Sons.
- [4] Silvia, Elvi. 2013. Model Matematika Populasi Plankton dan Konsentrasi Nitrogen. UNP. Padang.