Penentuan Akar Persamaan Polinomial Kuartik Dengan Pendekatan Perluasan Metode Cardano

Yepsi Susanti[1], Muhammad Subhan[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received November 16, 2024
Revised November 26, 2024
Accepted December 13, 2024

Keywords:

Polynomial Equations
Cardano Method
Cardano Method Expansion

Kata Kuncis:

Persamaan Polinomial
Metode Cardano
Perluasan Metode Cardano

ABSTRACT

Quartic polynomial equations are polynomial equations that have the highest power, namely four. One of the problems with quartic polynomial equations is finding the root solution of the quartic polynomial equation. The aim of this research is to form a formula and compile the steps for the Cardano Method Expansion. The method used in this research is literature study. Based on the research results, it was found that the form of the Cardano Method Expansion formula has a quadratic formula which produces four values which are then substituted into the root formula to produce four roots of the quartic polynomial equation, namely those which have real and twin roots in the discriminant equal to zero, real roots and different in the discriminant greater than zero, as well as complex roots on small discriminants of zero. Next, we obtain the steps for the extension of the Cardano Method, namely determining the value of k, l, m, n, determining the value of p, q, r, z, D, in $0 < z \leq 4$ based on the resolved cubic equation, and entering the z value in the formula Cardano Method Expansion obtained.

ABSTRAK

Persamaan Polinomial kuartik adalah persamaan polinomial yang memiliki pangkat tertinggi yaitu empat. Salah satu permasalahan persamaan polinomial kuartik adalah mencari solusi akar dari persamaan polinomial kuartik. Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk formula dan menyusun langkah-langkah dari Perluasan Metode Cardano. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa bentuk formula Perluasan Metode Cardano memiliki rumus kuadrat yang menghasilkan empat nilai kemudian disubstitusikan ke rumus akar sehingga menghasilkan empat akar persamaan polinomial kuartik yaitu yang memiliki akar rill dan kembar pada diskriminan sama dengan nol, akar rill dan berlainan pada diskriminan besar dari nol, serta akar kompleks pada diskriminan kecil dari nol. Selanjutnya diperoleh langkah-langkah dari Perluasan Metode Cardano yaitu tentukan nilai k, l, m, n, tentukan nilai p, q, r, z, D, dalam $0 < z \leq 4$ berdasarkan persamaan kubik resolven, dan masukkan nilai z dalam formula Perluasan Metode Cardano yang didapat.

Penulis pertama/ Corresponding Author:

(Yepsi Susanti)
Program Studi Matematika,Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: yepsisusanti07@gmail.com

1. PENDAHULUAN
Perluasan Metode Cardano merupakan salah satu pendekatan analitik dalam penyelesaian akar persamaan polinomial kuartik [1]. Persamaan polinomial kuartik adalah persamaan yang mempunyai pangkat tertinggi yaitu empat [2]. Bentuk lain dari persamaan kuartik adalah persamaan kuartik depressed atau disebut juga persamaan kuartik tereduksi yang diperoleh setelah menghilangkan suku pangkat tiga (x^3) melalui substitusi tertentu [3]. Selain itu, bentuk lainnya yaitu Persamaan kubik resolven adalah bentuk dari persamaan kubik yang terkait dengan sebuah persamaan kuartik. Persamaan kubik resolven digunakan dalam teori persamaan untuk membantu menemukan akar-akar dari persamaan polinomial kuartik tersebut. Konsep ini biasanya muncul dalam konteks metode analitik untuk menyelesaikan persamaan polinomial kuartik [4]. Persamaan kubik resolven dibentuk berdasarkan koefisien p, q, r dari persamaan kuartik depressed dengan menambah z tanpa menghilangkan suku linear [5].
Selain itu, metode sederhana dalam penyelesaian persamaan polinomial kuartik adalah perluasan metode cardano yang melibatkan persamaan polinomial kubik [6]. Persamaan polinomial kubik adalah persamaan yang mempunyai pangkat tertinggi yaitu tiga [7]. Solusi kubik dari persamaan kubik yang ditemukan oleh Cardano membantu menyelesaikan persamaan kuartik secara tidak langsung membantu mendefinisikan dengan tepat empat akar persamaan kuartik [8]. Perluasan Metode Cardano tidak hanya berfungsi untuk mencari solusi umum dari persamaan kubik, tetapi juga berguna dalam menentukan diskriminan serta menganalisis sifat-sifat akar persamaan [9]. Metode analitik merupakan pendekatan dalam menyelesaikan model matematika menggunakan rumus aljabar umum atau baku [10].
Metode analitik lain yang sering digunakan adalah metode horner. Karakteristik dari metode Horner terletak pada banyaknya operasi perkalian [11]. Metodenya sangat sederhana namun jumlah operasi perkalian yang diperlukan bertambah seiring dengan meningkatnya derajat polinomial. Metode analitik lainnya yang melibatkan persamaan kubik dalam menentukan diskriminan dan sifat-sifat akar persamaan polinomial kuartik adalah metode cardano [12].
Persamaan kuartik merupakan persamaan polinomial yang mempunyai persamaan kuadrat [13]. Dimana jika $b = 0$ maka persamaan kuadrat disebut persamaan kuadrat sempurna. Dalam menyelesaikan akar persamaan kuadrat dapat digunakan rumus abc. Jenis akar persamaan kuadrat adalah akarnya riil/nyata $(D \geq 0)$, akarnya riil dan berlainan $(D > 0)$, akarnya riil dan kembar $(D = 0)$, dan akarnya kompleks yang hanya memuat bagian imajiner saja, tidak rill dan berbeda $(D < 0)$ [14]. Sehingga persamaan kuartik adalah persamaan polinomial orde tertinggi yang dapat diselesaikan dengan radikal dalam kasus umum. [15].
Metode Cardano adalah metode yang mengubah persamaan polinomial kuartik menjadi persamaan kubik resolven yang diperoleh tiga nilai dalam bentuk z. Salah satu nilai z ini dimasukkan dalam persamaan kuadrat menggunakan rumus kuadrat untuk menghasilkan nilai baru dalam bentuk y yaitu

$$y_{1,2} = \frac{-\sqrt{2z_0} \pm \sqrt{\left(\sqrt{2z_0}\right)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}}{2}$$

$$y_{3,4} = \frac{\sqrt{2z_0} \pm \sqrt{\left(-\sqrt{2z_0}\right)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}}{2}$$

Nilai-nilai baru ini kemudian disubstitusikan ke rumus akar persamaan kuartik yaitu dalam x menggunakan rumus $x = y - \frac{a}{4}$ yang menghasilkan empat akar dalam bentuk x.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah membentuk formula dan menyusun langkah-langkah dari Perluasan Metode Cardano untuk menentukan akar persamaan polinomial kuartik. Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat dibentuk formula Perluasan Metode Cardano memiliki rumus kuadrat yang menghasilkan empat nilai kemudian disubstitusikan ke rumus akar sehingga menghasilkan empat akar persamaan polinomial kuartik yaitu yang memiliki akar rill dan kembar pada diskriminan sama dengan nol, akar rill dan berlainan pada diskriminan besar dari nol, serta akar kompleks pada diskriminan kecil dari nol. Selanjutnya diperoleh langkah-langkah dari Perluasan Metode Cardano yaitu tentukan nilai k, l, m, n, tentukan nilai p, q, r, hitung nilai z dalam rentang $0 < z \leq 4$ berdasarkan persamaan kubik resolven, dan masukkan nilai z dalam formula Perluasan Metode Cardano yang didapat. Sehingga penelitian ini diberi judul "Penentuan Akar Persamaan Polinomial Kuartik Dengan Pendekatan Perluasan Metode Cardano".

2. METODE

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis) yang hanya membahas secara teori perluasan Metode Cardano. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka yang berguna untuk mengumpulkan data dan berbagai informasi yang dibutuhkan baik berasal dari beberapa buku, jurnal, artikel, dan sumber lain yang tersedia di internet. Dalam meninjau permasalahan yang dihadapi, langkah-langkah kerja yang akan dilakukan adalah

a. Membaca dan mempelajari literatur tentang persamaan polinomial kuartik dan metode analitik
b. Mengkaji prinsip dan langkah-langkah dari metode cardano pada persamaan kuartik
c. Menelaah pembentukan formula Perluasan Metode Cardano untuk mencari akar dari persamaan polinomial kuartik
d. Menyusun langkah-langkah dari Perluasan Metode Cardano untuk mencari akar dari persamaan polinomial kuartik
e. Menarik kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pembentukan Formula Perluasan Metode Cardano

Perluasan Metode Cardano adalah metode analitik yang digunakan untuk menemukan akar persamaan polinomial kuartik. Dalam menentukan akar-akar persamaan polinomial kuartik dengan memperhatikan kondisi diskriminan yang akan diselesaikan. Langkah pertama dalam pembentukan metode baru ini adalah dimulai dari bentuk umum persamaan polinomial kuartik yaitu :

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,, \quad a_4 \neq 0 \tag{1}$$

Dari bentuk umum persamaan polinomial kuartik pada Persamaan (1) masing-masing ruas dibagi dengan a_4 agar Persamaan (1) nilai $x^4 \neq 0$, diperoleh :

$$\frac{a_4}{a_4}x^4 + \frac{a_3}{a_4}x^3 + \frac{a_2}{a_4}x^2 + \frac{a_1}{a_4}x + \frac{a_0}{a_4} = \frac{0}{a_4} \tag{2}$$

Dimisalkan $\frac{a_4}{a_4} = 1, \frac{a_3}{a_4} = k,\ \frac{a_2}{a_4} = l,\ \frac{a_1}{a_4} = m,$ dan $\frac{a_0}{a_4} = n,$ dengan demikian Persamaan (2) dapat dituliskan kembali:

$$x^4 + kx^3 + lx^2 + mx + n = 0 \tag{3}$$

Dengan $k, l, m,$ dan n yaitu konstanta rill. Persamaan (3) memiliki empat akar yang ditulis dalam x_1, x_2, x_3 dan x_4.

Setelah diperoleh bentuk pada persamaan (3). Selanjutnya akan dibentuk persamaan kuartik depressed atau disebut juga persamaan kuartik tereduksi adalah bentuk persamaan kuartik yang diperoleh setelah menghilangkan suku x^3 dengan mensubstitusi nilai $x = y - \frac{k}{4}$.

$$\left(y - \frac{k}{4}\right)^4 + k\left(y - \frac{k}{4}\right)^3 + l\left(y - \frac{k}{4}\right)^2 + m\left(y - \frac{k}{4}\right) + n = 0 \tag{4}$$

Kemudian Persamaan (4) diselesaikan dan diperoleh

$$y^4 + \left(l - \frac{6k^2}{16}\right)y^2 + \left(m + \frac{2k^3}{16} - \frac{kl}{2}\right)y + \left(n - \frac{km}{4} + \frac{k^2l}{16} - \frac{3k^4}{256}\right) = 0 \tag{5}$$

Selanjutnya memisalkan setiap koefisien pada Persamaan (5) yaitu :

$$p = l - \frac{3k^2}{8},\ \ q = m + \frac{k^3}{8} - \frac{kl}{2},\ \ r = n - \frac{km}{4} + \frac{k^2l}{16} - \frac{3k^4}{256} \tag{6}$$

Berdasarkan Persamaan (6), maka Persamaan (5) diperoleh persamaan tereduksi atau persamaan kuartik depressed yaitu :

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{7}$$

Setelah diperoleh persamaan tereduksi pada Persamaan (7). Selanjutnya membentuk persamaan kuadrat sempurna dan menambahkan parameter z pada persamaan kuadrat sempurna yaitu yang didapat dari Persamaan (8),

$$y^4 + py^2 + qy + r = \left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left(2zy^2 - qy + \left(z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4}\right)\right) \quad (8)$$

Berdasarkan Persamaan (7) dan Persamaan (8) yaitu :

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left(2zy^2 - qy + \left(z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4}\right)\right) = 0 \quad (9)$$

Dimisalkan $\alpha = 2z,\ \beta = -q,\ \gamma = z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4}$ sehingga diperoleh :

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \quad (10)$$

Selanjutnya, menghitung diskriminan pada persamaan (10) yang menghasilkan bentuk kubik resolven. Sehingga diperoleh yaitu $D > 0$ yang menghasilkan akar rill dan berlainan, $D < 0$ yang menghasilkan akar kompleks, dan $D = 0$ yang menghasilkan akar rill dan kembar.

3.1.1 Untuk $D > 0$, menghasilkan akar rill dan berlainan

$$D > 0$$
$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$
$$q^2 - 8z^3 - 8pz^2 + 8rz - 2p^2z > 0$$

Pindahkan semua ke sisi kanan kecuali suku dengan z dan gabungkan suku yang mengandung z

$$8z^3 + 8pz^2 + (2p^2z - 8rz) > q^2$$
$$8z^3 + 8pz^2 + 8\left(\frac{p^2}{4} - r\right)z - q^2 > 0 \quad (11)$$

Sehingga diperoleh nilai z dari Persamaan (11). Selanjutnya membagi seluruh persamaan dengan 8 untuk menyederhanakan koefisien.

$$8z^3 + 8pz^2 + 8\left(\frac{p^2}{4} - r\right)z - q^2 > 0$$
$$z^3 + pz^2 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)z > \frac{q^2}{8}$$

Misalkan z_0 yaitu akar persamaan kubik dari Persamaan (11) adalah :

$${z_0}^3 + p{z_0}^2 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)z_0 > \frac{q^2}{8}$$

Selanjutnya membagi seluruh persamaan dengan 8 untuk menyederhanakan koefisien.

$$\frac{{z_0}^3 + p{z_0}^2 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)z_0}{z_0} > \frac{q^2}{8z_0}$$
$$q^2 - 8z_0\left({z_0}^2 + pz_0 - r + \frac{p^2}{4}\right) > 0$$

Jika diskriminan dari persamaan kuadrat dalam y adalah besar nol yang menyederhanakan persamaan kuadrat menjadi kuadrat sempurna. Maka persamaan kuadrat menjadi

$$2z_0y^2 - qy > 0$$

Maka

$$y^2 - \frac{q}{2z_0}y > 0$$

Kemudian bagi dua dan dikuadratkan

$$y^2 - \frac{q}{2z_0}y > \left(y - \frac{q}{4z_0}\right)^2 - \frac{q^2}{16{z_0}^2}$$

Sehingga

$$2z_0\left[\left(y - \frac{q}{4z_0}\right)^2 - \frac{q^2}{16{z_0}^2}\right] > 0$$

$$z_0\left(y-\frac{q}{2z_0}\right)>0 \tag{12}$$

Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (9). Maka persamaan (9) menjadi

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+z\right)^2-\left(2zy^2-qy+\left(z^2+pz-r+\frac{p^2}{4}\right)\right)>0$$

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+z\right)^2-\left(z_0\left(y-\frac{q}{2z_0}\right)\right)^2>0 \tag{13}$$

Berdasarkan sifat rumus selisih kuadrat $M^2-N^2=(M+N)(M-N)$, persamaan (13) dapat ditulis sebagai :

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+z_0+z_0\left(y-\frac{q}{2z_0}\right)\right)\left(y^2+\frac{p}{2}+z_0-z_0\left(y-\frac{q}{2z_0}\right)\right)>0$$

$$\left(y^2+z_0y+\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2z_0}\right)\right)\left(y^2-z_0y+\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2z_0}\right)\right)>0 \tag{14}$$

Selanjutnya, setiap persamaan kuadrat dalam Persamaan (14) dapat ditentukan menggunakan rumus kuadrat yaitu :

$$y_{1,2}=\frac{-z_0\pm\sqrt{(z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$

$$y_{3,4}=\frac{z_0\pm\sqrt{(-z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2z_0}\right)}}{2} \tag{15}$$

Selanjutnya, masukkan hasil dari y_1, y_2, y_3 dan y_4 ke $x=y-\frac{k}{4}$. Dengan demikian, didapatkan akar persamaan polinomial kuartik yaitu

$$x_1=y_1-\frac{k}{4},\ x_2=y_2-\frac{k}{4},\ x_3=y_3-\frac{k}{4},\ x_4=y_4-\frac{k}{4} \tag{16}$$

3.1.2 Untuk $D<0$, menghasilkan akar kompleks

$$D<0$$
$$\beta^2-4\alpha\gamma<0$$
$$q^2-8z^3-8pz^2+8rz-2p^2z<0$$

Pindahkan semua ke sisi kanan kecuali suku dengan z dan gabungkan suku yang mengandung z

$$8z^3+8pz^2+8\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z-q^2<0 \tag{17}$$

Sehingga diperoleh nilai z dari Persamaan (17). Selanjutnya membagi seluruh persamaan dengan 8 untuk menyederhanakan koefisien.

$$z^3+pz^2+\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z<\frac{q^2}{8}$$

Misalkan z_0 yaitu akar persamaan kubik dari Persamaan (17) adalah :

$${z_0}^3+p{z_0}^2+\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z_0<\frac{q^2}{8}$$

Selanjutnya membagi seluruh persamaan dengan 8 untuk menyederhanakan koefisien.

$$\frac{{z_0}^3+p{z_0}^2+\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z_0}{z_0}<\frac{q^2}{8z_0}$$

$$q^2-8z_0\left({z_0}^2+pz_0-r+\frac{p^2}{4}\right)<0$$

Jika diskriminan dari persamaan kuadrat dalam y adalah kecil nol yang menyederhanakan persamaan kuadrat menjadi kuadrat sempurna. Maka persamaan kuadrat menjadi

$$2z_0y^2 - qy < 0$$

Maka

$$y^2 - \frac{q}{2z_0}y < 0$$

Kemudian bagi dua dan dikuadratkan

$$y^2 - \frac{q}{2z_0}y < \left(y - \frac{q}{4z_0}\right)^2 - \frac{q^2}{16{z_0}^2}$$

Sehingga

$$2z_0\left[\left(y - \frac{q}{4z_0}\right)^2 - \frac{q^2}{16{z_0}^2}\right] < 0$$

$$z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right) < 0 \qquad (18)$$

Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (9). Maka persamaan (9) menjadi

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left(2zy^2 - qy + \left(z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4}\right)\right) < 0$$

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left(z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right)\right)^2 < 0 \qquad (19)$$

Berdasarkan sifat rumus selisih kuadrat $M^2 - N^2 = (M+N)(M-N)$, persamaan (19) dapat ditulis sebagai :

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z_0 + z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right)\right)\left(y^2 + \frac{p}{2} + z_0 - z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right)\right) < 0$$

$$\left(y^2 + z_0y + \left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)\right)\left(y^2 - z_0y + \left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)\right) < 0 \qquad (20)$$

Selanjutnya, setiap persamaan kuadrat dalam Persamaan (20) dapat ditentukan menggunakan rumus kuadrat yaitu :

$$y_{1,2} = \frac{-z_0 \pm \sqrt{(z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$

$$y_{3,4} = \frac{z_0 \pm \sqrt{(-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$

(21)

Selanjutnya, masukkan hasil dari y_1, y_2, y_3 dan y_4 ke $x = y - \frac{k}{4}$. Dengan demikian, didapatkan akar persamaan polinomial kuartik yaitu

$$x_1 = y_1 - \tfrac{k}{4},\ x_2 = y_2 - \tfrac{k}{4},\ x_3 = y_3 - \tfrac{k}{4},\ x_4 = y_4 - \tfrac{k}{4} \qquad (22)$$

3.1.3 Untuk $D = 0$, menghasilkan akar rill dan kembar yaitu 1

$$D = 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$q^2 - 8z^3 - 8pz^2 + 8rz - 2p^2z = 0$$

Pindahkan semua ke sisi kanan kecuali suku dengan z dan gabungkan suku yang mengandung z

$$8z^3 + 8pz^2 + 8\left(\tfrac{p^2}{4} - r\right)z - q^2 = 0 \qquad (23)$$

Sehingga diperoleh nilai z dari Persamaan (23). Selanjutnya membagi seluruh persamaan dengan 8 untuk menyederhanakan koefisien.

$$z^3 + pz^2 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)z = \frac{q^2}{8}$$

Misalkan z_0 yaitu akar persamaan kubik dari Persamaan (23) adalah :

$$z_0^{\,3} + pz_0^{\,2} + \left(\frac{p^2}{4} - r\right) z_0 = \frac{q^2}{8}$$

Selanjutnya membagi seluruh persamaan dengan 8 untuk menyederhanakan koefisien.

$$\frac{z_0^{\,3} + pz_0^{\,2} + \left(\frac{p^2}{4} - r\right) z_0}{z_0} = \frac{q^2}{8z_0}$$

$$q^2 - 8z_0\left(z_0^{\,2} + pz_0 - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

Jika diskriminan dari persamaan kuadrat dalam y adalah nol yang menyederhanakan persamaan kuadrat menjadi kuadrat sempurna. Maka persamaan kuadrat menjadi

$$2z_0 y^2 - qy = 0$$

$$y^2 - \frac{q}{2z_0} y = 0$$

Kemudian bagi dua dan dikuadratkan

$$y^2 - \frac{q}{2z_0} y = \left(y - \frac{q}{4z_0}\right)^2 - \frac{q^2}{16z_0^{\,2}}$$

Sehingga

$$2z_0 \left[\left(y - \frac{q}{4z_0}\right)^2 - \frac{q^2}{16z_0^{\,2}}\right] = 0$$

$$z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right) = 0 \qquad (24)$$

Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (9). Maka persamaan (9) menjadi

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left(2zy^2 - qy + \left(z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4}\right)\right) = 0$$

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - \left(z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right)\right)^2 = 0 \qquad (25)$$

Berdasarkan sifat rumus selisih kuadrat $M^2 - N^2 = (M + N)(M - N)$, persamaan (25) dapat ditulis sebagai :

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + z_0 + z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right)\right)\left(y^2 + \frac{p}{2} + z_0 - z_0\left(y - \frac{q}{2z_0}\right)\right) = 0$$

$$\left(y^2 + z_0 y + \left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)\right)\left(y^2 - z_0 y + \left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)\right) = 0 \qquad (26)$$

Selanjutnya, setiap persamaan kuadrat dalam Persamaan (26) dapat ditentukan menggunakan rumus kuadrat yaitu :

$$y_{1,2} = \frac{-z_0 \pm \sqrt{(z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$

$$y_{3,4} = \frac{z_0 \pm \sqrt{(-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$

$$(27)$$

Selanjutnya, masukkan hasil dari y_1, y_2, y_3 dan y_4 ke $x = y - \frac{k}{4}$. Dengan demikian, didapatkan akar persamaan polinomial kuartik yaitu

$$x_1 = y_1 - \frac{k}{4},\ x_2 = y_2 - \frac{k}{4},\ x_3 = y_3 - \frac{k}{4},\ x_4 = y_4 - \frac{k}{4} \qquad (28)$$

3.2. Langkah-langkah Perluasan Metode Cardano

Adapun langkah-langkah Perluasan Metode Cardano adalah sebagai berikut :

a. Tentukan nilai k, l, m, n pada $x^4 + kx^3 + lx^2 + mx + n = 0$ dimisalkan $\frac{a_4}{a_4} = 1, \frac{a_3}{a_4} = k,\ \frac{a_2}{a_4} = l,$ $\frac{a_1}{a_4} = m,$ dan $\frac{a_0}{a_4} = n.$
b. Hitung nilai p, q, r dimana nilainya harus bilangan rill dan bilangan bulat. Jika tidak maka proses gagal.
c. Jika rill, hitung

$$p = l - \frac{6k^2}{16} = l - \frac{3k^2}{8}$$
$$q = m + \frac{2k^3}{16} - \frac{kl}{2} = m + \frac{k^3}{8} - \frac{kl}{2}$$
$$r = n - \frac{km}{4} + \frac{k^2 l}{16} - \frac{3k^4}{256}$$

d. Hitung nilai z dimana nilainya harus bilangan rill yaitu $0 < z \leq 4$ dan bilangan bulat. Jika tidak maka proses gagal
e. Jika sesuai, hitung nilai z yaitu

$$8z^3 + 8pz^2 + 8\left(\frac{p^2}{4} - r\right)z - q^2 = 0$$

f. Menentukan diskriminan dengan menggunakan $D = b^2 - 4ac$
yang diperoleh berdasarkan nilai p, q, r, z, hitung

$$D = (z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)$$
$$D = (-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)$$

Sehingga menghasilkan $D = 0$ memiliki akar rill dan kembar, $D > 0$ memiliki akar rill dan berlainan, dan $D < 0$ memiliki akar kompleks.
g. Masukkan nilai z tersebut dalam rumus kuadrat sesuai diskriminan yang diperoleh yaitu

$$y_{1,2} = \frac{-z_0 \pm \sqrt{(z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$
$$y_{3,4} = \frac{z_0 \pm \sqrt{(-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)}}{2}$$

h. Kemudian substitusikan nilai y_1, y_2, y_3 dan y_4 ke $x = y - \frac{k}{4}$ sehingga diperoleh nilai akar persamaan polinomial kuartik dengan Perluasan Metode Cardano.

3.3 Contoh Permasalahan

Untuk melihat contoh permasalahan persamaan polinomial kuartik dengan Perluasan Metode Cardano adalah sebagai berikut :

1. Diberikan suatu persamaan kuartik yaitu
$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = 0$$
Tentukan semua akar-akar persamaan kuartik di atas
Penyelesaian
Berdasarkan Persamaan (3)
$$x^4 + kx^3 + lx^2 + mx + n = 0$$
Diperoleh
$$k = -8, l = 22, m = -24, n = 9$$
Selanjutnya substitusi ke Persamaan (6), diperoleh
$$p = -2, q = 0, r = 1$$
Setelah diperoleh nilai $p = -2, q = 0, r = 1$ akan disubstitusi ke salah satu Persamaan (11), (17) dan (23)

$$8z^3+8pz^2+8\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z-q^2=0$$
$$z=0, z=0, z=2$$

Selanjutnya akan menentukan diskriminan, ada dua cara yaitu

a. Menggunakan $D = b^2-4ac$

Ini digunakan diperoleh berdasarkan nilai p, q, r, z
$$D = b^2-4ac$$
$$D = (z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2z_0}\right)=0$$
$$D = (-z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2z_0}\right)=0$$

Jadi diskriminan adalah $D=0$ yang memiliki akar rill dan kembar (akar ganda).

b. Menggunakan perkalian akar yang dihasilkan dari persamaan pada soal

Ini diperoleh berdasarkan hasil akar yang kita pilih yaitu
$$(x-1)(x-1)(x-3)(x-3)=0$$
$$x^4-8x^3+22x^2-24x+9=0$$

Jadi dengan akar $x=1, x=1, x=3, x=3$ maka diskriminan adalah $D=0$ yang memiliki akar rill dan kembar (akar ganda).

Selanjutnya nilai $z=2$ disubstitusi ke Persamaan (27) yaitu
$$y_{1,2}=\frac{-z_0\pm\sqrt{(z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2z_0}\right)}}{2}=-1,-1$$
$$y_{3,4}=\frac{z_0\pm\sqrt{(-z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2z_0}\right)}}{2}=1,1$$

Kemudian nilai $y_{1,2}=-1,-1$ dan $y_{3,4}=1,1$ akan disubstitusi ke Persamaan (28) yaitu
$$x_1=y_1-\frac{k}{4}=1, x_2=y_2-\frac{k}{4}=1, x_3=y_3-\frac{k}{4}=3, x_4=y_4-\frac{k}{4}=3$$

Maka, didapatkan akar-akar persamaan kuartik yaitu $x_1=1, x_2=1, x_3=3,\ x_4=3$ yang merupakan akar rill dan kembar (akar ganda) yang berarti $D=0$.

2. Diberikan suatu persamaan kuartik yaitu
$$2x^4-8x^3+22x^2-28x+16=0$$

Tentukan semua akar-akar persamaan kuartik di atas

Penyelesaian

Berdasarkan Persamaan (3)
$$x^4+kx^3+lx^2+mx+n=0$$

Maka persamaan polinomial kuartik pada soal dibagi dengan 2 yaitu
$$\frac{2x^4-8x^3+22x^2-28x+16}{2}=0$$
$$x^4-4x^3+11x^2-14x+8=0$$

Diperoleh
$$k=-4, l=11, m=-14, n=8$$

Selanjutnya substitusi ke Persamaan (6), diperoleh
$$p=5, q=0, r=2$$

Setelah diperoleh nilai $p=5,\ q=0, r=2$ akan disubstitusi ke salah satu Persamaan (11), (17) dan (23)
$$8z^3+8pz^2+8\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z-q^2=0$$
$$z=0, z=\frac{-5\pm2\sqrt{2}}{2}$$

Selanjutnya akan menentukan diskriminan dengan menggunakan $D = b^2 - 4ac$. Ini digunakan diperoleh berdasarkan nilai p, q, r, z yaitu

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right) = \frac{33 - 36\sqrt{2}}{4} \approx -4{,}47792$$
$$D = (-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right) = \frac{33 + 4\sqrt{2}}{4} \approx 9{,}66421$$

Jadi diskriminan adalah $D > 0$ yang memiliki akar rill dan berlainan dan $D < 0$ yang memiliki akar kompleks. Artinya tidak benar, karena hasil akar yang diperoleh sesuai dengan $D < 0$ yang memiliki akar kompleks.

Langkah selanjutnya tidak bisa kita lakukan karena jika di substitusi nilai $z = 0$ maka rumus kuadrat menjadi tidak terdefinisi. Jika nilai $z = \frac{-5+2\sqrt{2}}{2}$ disubstitusi ke Persamaan (21) yaitu

$$y_{1,2} = \frac{-z_0 \pm \sqrt{(z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right)}}{2} = \frac{5 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{-33 + 36\sqrt{2}}\, i}{2}$$
$$y_{3,4} = \frac{z_0 \pm \sqrt{(-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right)}}{2} = \frac{-5 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{33 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

Yang menghasilkan bilangan kompleks dan bilangan rill tidak sesuai dengan akar persamaan polinomial pada soal yang hanya menghasilkan bilangan kompleks. Dimana nilai z harus bilangan rill yaitu $0 < z \leq 4$ dan bilangan bulat. Kemudian menggunakan rumus bikuadratik juga tidak bisa, maka persamaan ini tidak bisa diterapkan Perluasan Metode Cardano.

3. Diberikan suatu persamaan kuartik yaitu
$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$
Tentukan semua akar-akar persamaan kuartik di atas
Penyelesaian
Berdasarkan Persamaan (3)
$$x^4 + kx^3 + lx^2 + mx + n = 0$$
diperoleh
$$k = 0, l = -6, m = 0, n = 5$$
Selanjutnya substitusi ke Persamaan (6), diperoleh
$$p = -6, q = 0, r = 5$$
Setelah diperoleh nilai $p = -6, q = 0, r = 5$ akan disubstitusi ke salah satu Persamaan (11), (17) dan (23)
$$8z^3 + 8pz^2 + 8\left(\frac{p^2}{4} - r\right)z - q^2 = 0$$
$$z = 0, z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$$
Selanjutnya akan menentukan diskriminan, ada dua cara yaitu
a. Menggunakan $D = b^2 - 4ac$
Ini digunakan diperoleh berdasarkan nilai p, q, r, z
$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right) = 14 + 2\sqrt{5} \approx 18{,}47214$$
$$D = (-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right) = 14 - 10\sqrt{5} \approx -8{,}36068$$
Jadi diskriminan yang diperoleh yaitu $D > 0$ yang memiliki akar rill dan berlainan dan $D < 0$ yang memiliki akar kompleks. Artinya tidak benar, karena hasil akar yang diperoleh sesuai dengan $D > 0$ yang memiliki akar rill dan berlainan
b. Menggunakan perkalian akar yang dihasilkan dari persamaan pada soal
Ini diperoleh berdasarkan hasil akar yang kita pilih yaitu

$$\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)(x-1)(x+1)=0$$
$$x^4-6x^2+5=0$$

Jadi dengan akar $x=+\sqrt{5}, x=-\sqrt{5}, x=1, x=-1$ maka diskriminan adalah $D>0$ yang memiliki akar rill dan berlainan.

Langkah selanjutnya tidak bisa kita lakukan karena jika di substitusi nilai $z=0$ maka rumus kuadrat menjadi tidak terdefinisi. Jika nilai $z=3+\sqrt{5}$ disubstitusi ke Persamaan (15) yaitu

$$y_{1,2}=\frac{-z_0\pm\sqrt{(z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2z_0}\right)}}{2}=\frac{-3-\sqrt{5}\pm\sqrt{14+2\sqrt{5}}}{2}$$
$$y_{3,4}=\frac{z_0\pm\sqrt{(-z_0)^2-4\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2z_0}\right)}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}\pm\sqrt{-14+10\sqrt{5}}\,i}{2}$$

Yang menghasilkan bilangan rill dan bilangan kompleks tidak sesuai dengan akar persamaan polinomial pada soal yang hanya menghasilkan bilangan rill. Dimana nilai z harus bilangan rill yaitu $0<z\leq 4$ dan bilangan bulat. Namun persamaan ini masih dapat diselesaikan menggunakan rumus bikuadratik yaitu substitusi $y=x^2$ menghasilkan

$$y^2-6y+5=0$$

Selanjutnya dapat di faktorisasi

$$(y-5)(y-1)=0$$

Sehingga
$y=5$ atau $y=1$
Kembali ke $x^2=y$
Untuk $y=5$

$$x^2=\sqrt{5}$$
$$x^2=\pm\sqrt{5}$$

Untuk $y=1$

$$x^2=1$$
$$x^2=\pm 1$$

Maka, didapatkan akar-akar persamaan kuartik yaitu $x_1=+\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5}, x_3=1,\ x_4=-1$ yang merupakan akar rill dan berlainan yang berarti $D>0$.

4. Diberikan suatu persamaan kuartik yaitu

$$2x^4-10x^2+20x-16=0$$

Tentukan semua akar-akar persamaan kuartik di atas
Penyelesaian
Berdasarkan Persamaan (3)

$$x^4+kx^3+lx^2+mx+n=0$$

Maka persamaan polinomial kuartik pada soal dibagi dengan 2 yaitu

$$\frac{2x^4-10x^2+20x-16=0}{2}=0$$
$$x^4-5x^2+10x-8=0$$

Diperoleh

$$k=\ 0, l=\ -5, m=10, n=-8$$

Selanjutnya substitusi ke Persamaan (6), diperoleh

$$p=-5, q=10\ , r=-8$$

Setelah diperoleh nilai $p=-5,\ q=10\ , r=-8$ akan disubstitusi ke salah satu Persamaan (11), (17) dan (23)

$$8z^3+8pz^2+8\left(\frac{p^2}{4}-r\right)z-q^2=0$$
$$z=1{,}3363, z=1{,}8319\pm 2{,}4492i$$

Selanjutnya akan menentukan diskriminan dengan menggunakan $D = b^2 - 4ac$. Ini digunakan diperoleh berdasarkan nilai p, q, r, z yaitu

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = (z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 - \frac{q}{2z_0}\right) \approx 21{,}4072$$
$$D = (-z_0)^2 - 4\left(\frac{p}{2} + z_0 + \frac{q}{2z_0}\right) \approx -12{,}0976$$

Jadi diskriminan adalah $D > 0$ yang memiliki akar rill dan berlainan dan $D < 0$ yang memiliki akar kompleks. Artinya tidak benar, karena hasil akar yang diperoleh sesuai dengan $D < 0$ yang memiliki akar kompleks. Dimana nilai z harus bilangan rill yaitu $0 < z \leq 4$ dan bilangan bulat. Kemudian menggunakan rumus bikuadratik juga tidak bisa, maka persamaan ini tidak bisa diterapkan Perluasan Metode Cardano.

4. KESIMPULAN

Dari hasil yang telah dibahas, kesimpulan yang dapat diambil adalah bentuk formula Perluasan Metode Cardano memiliki rumus kuadrat yang menghasilkan empat nilai kemudian disubstitusikan ke rumus akar sehingga menghasilkan empat akar persamaan polinomial kuartik yaitu yang memiliki akar rill dan kembar pada diskriminan sama dengan nol, akar rill dan berlainan pada diskriminan besar dari nol, serta akar kompleks pada diskriminan kecil dari nol. Selanjutnya diperoleh langkah-langkah dari Perluasan Metode Cardano yaitu tentukan nilai k, l, m, n, tentukan nilai p, q, r, hitung nilai z dalam rentang $0 < z \leq 4$ berdasarkan persamaan kubik resolven, dan masukkan nilai z dalam formula Perluasan Metode Cardano yang didapat.

REFERENSI

[1] R. Al-Alawiyah, H. Helmi, and Y. Yudhi, “Penentuan Akar-Akar Persamaan Kuartik Dengan Metode Cardano dan Metode Ferrari,” *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 11, no. 3, pp. 469–476, 2022.

[2] F. Ayres and P. A. Schmidt, “Matematika Universitas (Edisi Keti).” Erlangga, 2004.

[3] D. M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill, 2011. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=B6uUCgAAQBAJ

[4] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract algebra*, vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.

[5] H. A. Farea, “Solving polynomial equations from 2000 BC through 20th century,” 1994.

[6] A. Fathi, P. Mobadersany, and R. Fathi, “A simple method to solve quartic equations,” vol. 6, no. 6, pp. 331–336, Jun. 2012.

[7] J. W. Harris and H. Stöcker, *Handbook of mathematics and computational science*. Springer Science & Business Media, 1998.

[8] Y. Larbaoui, “New Theorems and Formulas to Solve Fourth Degree Polynomial Equation in General Forms by Calculating the Four Roots Nearly Simultaneously,” *Am. J. Appl. Math.*, vol. 11, pp. 95–105, Nov. 2023, doi: 10.11648/j.ajam.20231106.11.

[9] K. E. Lestari, U. S. Pasaribu, S. W. Indratno, and H. Garminia, “Generating roots of cubic polynomials by Cardano’s approach on correspondence analysis,” *Heliyon*, vol. 6, no. 6, 2020.

[10] S. Maharani and E. Suprapto, “Analisis Numerik Berbasis Group Investigation untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis,” 2018.

[11] T. A. Nurman, “Analisis Perbandingan Metode Muller dan Metode Birge-Vieta Dalam Menyelesaikan Persamaan Polinomial,” *J. MSA (Matematika dan Stat. serta Apl.*, vol. 9, no. 1, pp. 81–88, 2021.

[12] I. Nurtaniyahya, N. Kusumastuti, and Y. Yudhi, “Analisis Akar-Akar Persamaan Kubik Berdasarkan Koefisien Persamaan Cardano,” *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 12, no. 6, pp. 553–560, 2023.

[13] Y. Rahmah, S. Palgunadi, and E. Suryani, “Development of Calculator for Finding Complex Roots of n-th Degree Polynomials,” *ITSMART J. Teknol. dan Inf.*, vol. 5, no. 2, pp. 57–66, 2016.

[14] N. Shafira, "Metode Untuk Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat." Medan: Researhgate. net, pp. 1–9, 2020.
[15] S. L. Shmakov, "A universal method of solving quartic equations," *Int. J. Pure Appl. Math*, vol. 71, no. 2, pp. 251–259, 2011.