Analisis Bifurkasi Pada Model Risiko Keuangan

Afriana Yustika Sari[1], Rara Sandhy Winanda[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received November 06, 2024
Revised November 22, 2024
Accepted December 04, 2024

Keywords:

Bifurcation Analysis
Mathematical Modeling
Equilibrium Points

Kata Kunci:

Analisis Bifurkasi
Pemodelan Matematika
Titik Ekuilibrium

ABSTRACT

Bifurcation is a qualitative structural change that occurs in a system. The qualitative structure that changes can be a change that occurs at the stability of the equilibrium point. In this research, a bifurcation analysis was carried out on a mathematical model of financial risk with variables that influence interest rates, investment demand and price indexes. This study aims to examine the stability of the equilibrium point and the bifurcation that occurs in the mathematical model of financial risk. Based on the research results, three equilibrium points were obtained with the second equilibrium point not existing from an economic perspective, because interest rates were negative. The first equilibrium point describes a situation where there is only investment demand while interest rates and price indexes do not exist. The first equilibrium point can be asymptotically stable if several conditions are met. Meanwhile, the third equilibrium point describes the situation where inflation or deflation occurs. The third equilibrium point can be asymptotically stable using the Routh-Hurwitz stability criterion. Bifurcation occurs at the first equilibrium point which indicates a change in stability at that equilibrium point.

ABSTRAK

Bifurkasi adalah perubahan struktur kualitatif yang terjadi pada suatu sistem. Struktur kualitatif yang berubah dapat berupa perubahan yang terjadi pada kestabilan titik ekuilibrium. Pada penelitian ini dilakukan analisis bifurkasi pada model matematika risiko keuangan dengan variabel yang mempengaruhi suku bunga, permintaan investasi dan indeks harga. Penelitian ini bertujuan mengetahui kestabilan titik ekuilibrium dan bifurkasi yang terjadi pada model matematika risiko keuangan. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh tiga titik ekuilibrium dengan titik ekuilibrium kedua tidak eksis berdasarkan sudut pandang ekonomi, sebab suku bunga bernilai negatif. Titik ekuilibrium pertama menggambarkan keadaan hanya ada permintaan investasi sedangkan suku bunga dan indeks harga tidak ada. Titik ekuilibrium pertama dapat bersifat stabil asimtotik apabila memenuhi beberapa syarat. Sedangkan titik ekuilibrium ketiga menggambarkan keadaan terjadinya inflasi atau deflasi. Titik ekuilibrium ketiga dapat bersifat stabil asimtotik berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Bifurkasi terjadi pada titik ekuilibrium pertama yang menunjukkan adanya perubahan kestabilan pada titik ekuilibrium tersebut.

(Afriana Yustika Sari)
Program Studi Matematika,Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: afrianayustikasari3@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Matematika memiliki kontribusi yang signifikan dalam berbagai bidang ilmu tertentu, salah satunya dalam bidang ekonomi [1]. Ekonomi merupakan aspek yang tak terpisahkan dari kehidupan manusia. Dalam konteks bernegara, pertumbuhan ekonomi menjadi salah satu tolak ukur utama untuk mengukur kemajuan ekonomi [2]. Untuk mencapai pertumbuhan ekonomi yang pesat maka suatu negara sangat bergantung pada sistem keuangan dalam menjalankan pemerintahannya.

Sistem keuangan adalah jaringan yang melibatkan berbagai lembaga keuangan, pasar, infrastruktur, serta perusahaan non keuangan dan rumah tangga, yang saling terhubung dalam hal pembiayaan atau penyediaan dana untuk mendukung perkembangan ekonomi [3]. Salah satu tantangan utama yang dihadapi oleh negara dan lembaga keuangan adalah risiko keuangan [4]. Risiko adalah suatu peluang terjadinya kerugian [5]. Maka, risiko keuangan dapat diartikan sebagai kemungkinan terjadinya kejadian yang dapat menyebabkan kerugian finansial. Risiko keuangan dapat timbul dari berbagai faktor, seperti fluktuasi suku bunga, perubahan dalam permintaan investasi, dan pergerakan indeks harga.

Suku bunga merujuk pada persentase dari total pinjaman yang dibayarkan sebagai biaya dalam jangka waktu tertentu [6]. Permintaan Investasi merujuk pada total permintaan yang terkait dengan pengeluaran untuk kegiatan produksi atau usaha yang bertujuan untuk mendapatkan keuntungan di masa depan [7]. Indeks harga adalah rangkaian data harga yang disusun secara berurutan, yang digunakan untuk mengukur perubahan harga rata-rata dalam suatu periode waktu tertentu [8].

Dalam perekonomian makro, terdapat hubungan antara suku bunga, permintaan investasi dan indeks harga, dimana suku bunga memiliki hubungan positif dengan indeks harga, suku bunga berhubungan negatif dengan permintaan investasi dan indeks harga berhubungan negatif dengan permintaan investasi. Jika terjadi ketidaksesuaian antara faktor-faktor tersebut, hal ini dapat menimbulkan permasalahan yang bisa berdampak pada aktivitas ekonomi, seperti munculnya krisis keuangan yang akan menyebabkan kehidupan ekonomi masyarakat terganggu. Krisis keuangan global 2008-2009 adalah salah satu krisis keuangan paling parah yang terjadi dalam 80 tahun terakhir [9].

Untuk itu, permasalahan dalam penelitian ini akan dianalisis dengan pendekatan sistem dinamik melalui pemodelan matematis. Pemodelan matematika merupakan suatu metode yang menggunakan konsep matematika untuk menggambarkan permasalahan dunia nyata dalam bentuk matematis, sehingga menghasilkan pemahaman yang lebih tepat [10]. Model matematika keuangan yang diterapkan dalam penelitian ini berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Qin Gao dan Junhai Ma [11].

Analisis bifurkasi adalah alat yang bisa digunakan untuk mengetahui parameter kritis yang berperan dalam perubahan struktur kualitatif dari suatu sistem. Dengan kata lain, bifurkasi adalah perubahan kestabilan suatu titik ekuilibrium [12]. Titik ekuilibrium adalah keadaan suatu sistem yang tidak berubah terhadap waktu [13]. Analisis kestabilan titik ekuilibrium digunakan untuk mengetahui perilaku solusi di sekitar titik ekuilibrium dalam jangka waktu yang tidak terbatas ($t \to \infty$) [14]. Tujuan pada penelitian adalah untuk mengetahui kestabilan titik ekuilibrium pada model matematika risiko keuangan dan bifurkasi yang terjadi.

2. METODE

Penelitian ini merupakan dasar yang menggunakan metode studi pustaka dengan menganalisis berbagai teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas. Penelitian dasar merupakan penelitian yang bertujuan untuk mengembangkan pengetahuan dan teknologi dengan memperdalam teori-teori yang sudah ada serta menyarankan teori-teori baru [15]. Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini mencakup (a) Penentuan titik ekuilibrium dari model matematika keuangan, (b) Melakukan linearisasi terhadap model, karena model merupakan model nonlinear, (c) Melakukan analisis kestabilan lokal berdasarkan titik ekuilibrium yang diperoleh, (d) Menentukan bifurkasi yang terjadi berdasarkan hasil analisis kestabilan lokal, dan (e) Penarikan kesimpulan dari hasil penelitian.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

a. Titik Ekuilibrium Model Matematika Risiko Keuangan

Titik ekuilibrium pada model matematika risiko keuangan tercapai saat laju perubahan suku bunga, permintaan investasi, dan indeks harga berada pada nilai nol. Hal ini ditulis menjadi:

$$\{z + (y - a)x = 0 \tag{2}$$
$$1 - by - x^2 = 0 \tag{3}$$
$$-x - cz \quad = 0 \tag{4}$$

Selanjutnya, akan dicari himpunan solusi dari sistem persamaan (2), (3), (4):
Penyelesaian untuk persamaan (4),

$$-x - cz = 0$$
$$x = -cz \tag{5}$$

substitusi persamaan (5) pada persamaan (3),

$$1 - by - x^2 \quad = 0$$
$$1 - by - (cz)^2 = 0$$
$$-by = (cz)^2 - 1$$
$$y = \frac{(cz)^2 - 1}{-b} \tag{6}$$

Substitusi persamaan (5) dan (6) pada persamaan (2),

$$z + (y - a)x = 0$$
$$z + \left(\frac{(cz)^2 - 1}{-b} - a\right)(-cz) = 0$$
$$z + \frac{(cz)^2 - 1}{b}cz + acz = 0$$
$$\frac{bz + (cz)^3 - cz + abcz}{b} = 0$$
$$bz + (cz)^3 - cz + abcz = 0 \; dan \; b \neq 0$$
$$(cz)^3 + bz - cz + abcz = 0$$
$$z(c^3z^2 + b - c + abc) \; = 0$$

sehingga diperoleh,

$z_1 = 0$ atau $c^3z^2 + b - c + abc = 0$

$$z^2 = \frac{c - b - abc}{c^3}$$
$$z = \pm\sqrt{\frac{c - b - abc}{c^3}}$$
$$z_{2,3} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$$

Berdasarkan perhitungan diatas, diperoleh titik ekuilibrium sebagai berikut:
Untuk $z_1 = 0$ maka:
$x = -cz = 0$

$$y = \frac{(cz)^2 - 1}{-b} = \frac{0 - 1}{-b} = \frac{1}{b}$$
$$(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$$
$$E_1\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$$
$$Untuk, z_{2,3} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$$

perhatikan parameter dibawah tanda akar.
Jika $c - b - abc \leq 0,$ maka $z_{2,3}$ akan bernilai imajiner $(Re(z) = 0)$. Karena z merupakan indeks harga maka nilai indeks harga tersebut tidak bisa bernilai imajiner, pada kondisi ini tidak ada titik ekuilibrium.

Jika $c - b - abc > 0$, maka

$$z_{2,3} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$$

diperoleh:

$$z_2 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$$

$$x_2 = -cz = -c\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}\right) = -\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$$

$$y_2 = \frac{(cz)^2 - 1}{-b} = \left(\frac{c - b - abc}{c} - 1\right)\left(-\frac{1}{b}\right) = \frac{1 + ac}{c}$$

Sehingga pada kondisi ini, diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu:

$$E_2\left(-\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{1 + ac}{c}, \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}\right)$$

$$E_3\left(\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{1 + ac}{c}, -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}\right)$$

Berdasarkan hasil perhitungan diatas, diperoleh titik ekuilibrium pada model matematika risiko keuangan sebagai berikut:

$$E_1\ \left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$$

$$E_2\left(-\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{1 + ac}{c}, \frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}\right)$$

$$E_3\left(\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}, \frac{1 + ac}{c}, -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}\right)$$

Titik ekuilibrium pertama menunjukkan kondisi ketika hanya ada permintaan investasi sedangkan suku bunga dan indeks harga tidak ada. Berdasarkan teori ekonomi kondisi ini diperbolehkan sehingga dapat dikatakan titik ekuilibrium pertama adalah eksis. Sedangkan untuk titik ekuilibrium kedua adalah kondisi dimana suku bunga bernilai negatif, permintaan investasi dan indeks harga ada. Namun, dalam ekonomi keadaan suku bunga negatif ini tidak ada sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium kedua tidak eksis. Untuk titik ekuilibrium ketiga adalah kondisi dimana ada suku bunga dan permintaan investasi tetapi indeks harga bernilai negatif. Dalam ekonomi, kondisi ini diperbolehkan sebab jika indeks harga bernilai negatif berarti sedang terjadi deflasi, maka titik ekuilibrium ketiga eksis. Maka dengan demikian, penelitian ini akan menganalisis dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium pertama dan ketiga.

b. Linearisasi Pada Model Matematika Risiko Keuangan

Model matematika risiko keuangan adalah model yang bersifat nonlinear, sehingga untuk mencari solusi pada model, harus dilakukan pelinearan dengan menggunakan matriks Jacobian. Berikut hasil pelinearan pada model matematika risiko keuangan:

$$J(E_i) = [(y-a)\ x\ 1\ \ -2x\ \ -b\ 0\ \ -1\ 0\ \ -c\,]$$

c. Analisis Kestabilan Lokal pada Model Matematika Risiko Keuangan

Untuk mencari analisis kestabilan lokal, maka diperlukan nilai eigen. Nilai eigen dapat dihitung dari matriks Jacobian $J(E_i)$. Berikut ini hasil analisis kestabilan lokal pada titik E_1 dan E_3.

1) Analisis Kestabilan titik ekuilibrium E_1

Hasil matriks Jacobian dari titik ekuilibrium E_1adalah sebagai berikut:

$$J(E_1) = \left[\left(\frac{1}{b} - a\right)\ 0\ 1\ 0\ \ -b\ 0\ \ -1\ 0\ \ -c\right]$$

Persamaan karakteristik $J(E_1)$ yaitu:

$$|\lambda I - JE_1| \quad = 0$$

$$\left|\lambda - \left(\frac{1}{b} - a\right)\ 0\ \ -1\ 0\ \lambda + b\ 0\ 1\ 0\ \lambda + c\right| = 0$$

dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama maka diperoleh,

$$\lambda - \left(\frac{1}{b} - a\right)|\lambda + b\ 0\ 0\ \lambda + c\,| - |0\ \lambda + b\ 1\ 0\,| = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{b} + a\right)(\lambda + b)(\lambda + c)(\lambda + b) = 0$$

$$(\lambda + b)\left(\lambda^2 + \lambda c - \frac{\lambda}{b} - \frac{c}{b} + a\lambda + ac\right) + (\lambda + b) = 0$$

$$(\lambda + b)\left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + ac - \frac{c}{b}\right) + (\lambda + b) = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$(\lambda + b)\left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + ac - \frac{c}{b} + 1\right) = 0 \tag{7}$$

Berdasarkan persamaan (6) diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -b$. kemudian pada persamaan polinomial pangkat dua dari persamaan (6), yaitu:

$$\left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + ac - \frac{c}{b} + 1\right) = 0$$

Misalkan,

$$R = 1, S = c + a - \frac{1}{b}, T = ac - \frac{c}{b} + 1$$

Maka persamaannya menjadi

$$R\lambda^2 + S\lambda + T = 0,$$

sehingga nilai eigennya diperoleh

$$\lambda_{2,3} = \frac{-S \pm \sqrt{S^2 - 4T}}{2}$$

Dengan syarat

$$S^2 - 4T > 0$$

1.1) Jika $S > 0$ **maka**,

Untuk $T < 0$, perhatikan $\sqrt{S^2 - 4T} > \sqrt{S^2} = S$ maka,

$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 > 0$$
$$-S - \sqrt{S^2 - 4T} < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_3 < 0$$

Karena $\lambda_2 > 0$ dengan demikian kestabilan E_1 tidak stabil.

Untuk $T = 0$, perhatikan $\sqrt{S^2 - 4T} = \sqrt{S^2} = S$

$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} = -S + S = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 0$$
$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} = -S - S < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_3 < 0$$

Karena $\lambda_2 = 0$ dengan demikian kestabilan E_1 tidak dapat ditentukan.

Untuk $T > 0$, perhatikan $\sqrt{S^2 - 4T} > 0$ dan $\sqrt{S^2 - 4T} < \sqrt{S^2} = S$ maka,

$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 < 0$$
$$-S - \sqrt{S^2 - 4T} < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_3 < 0$$

Karena $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ dengan demikian kestabilan E_1 stabil asimtotik.

1.2) Jika $S < 0$ **maka**,

Untuk $T < 0$, perhatikan $\sqrt{S^2 - 4T} > \sqrt{S^2} = S$ maka,

$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 > 0$$
$$-S - \sqrt{S^2 - 4T} > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_3 > 0$$

Karena $\lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 > 0$ maka kestabilan titik ekuilibrium E_1 bersifat tidak stabil.

Untuk $T = 0$, perhatikan $\sqrt{S^2 - 4T} = \sqrt{S^2} = S$

Jadi karena $S < 0$ maka $-S > 0$ sehingga,

$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} = -S + S = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = 0$$
$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} = -S - S = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_3 = 0$$

Karena $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = 0$ maka kestabilan titik ekuilibrium E_1 tidak dapat ditentukan.

Untuk $T > 0$, pandang $\sqrt{S^2 - 4T} < \sqrt{S^2} = S$ maka,

$$-S + \sqrt{S^2 - 4T} > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_2 > 0$$
$$-S - \sqrt{S^2 - 4T} > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_3 > 0$$

Karena $\lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 > 0$ maka kestabilan titik ekuilibrium E_1 bersifat tidak stabil.

1.3) Jika $S = 0$ **maka**,

Perhatikan, jika $S = 0$ maka $-S \pm \sqrt{S^2 - 4T} = \pm\sqrt{-4T}$ dan kondisi ini akan menghasilkan bilangan imajiner sehingga untuk $S = 0$ tidak eksis.

2) Analisis Kestabilan titik ekuilibrium E_3

Hasil matriks Jacobian dari titik ekuilibrium E_3 adalah:

$$J(E_3) = \left[\frac{1}{c} \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \ 1 \ -2\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} - b \ 0 \ -1 \ 0 \ -c \right]$$

Persamaan karakteristik $J(E_3)$ yaitu:

$$|\lambda I - JE_3| \quad = 0$$

$$\left| \lambda - \frac{1}{c} - \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} - 1 \ 2\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \ \lambda + b \ 0 \ 1 \ 0 \ \lambda + c \right| = 0$$

menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga maka diperoleh,

$$\left|-\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \quad -1 \; \lambda+b \; 0\right| + (\lambda+c)\left|\lambda-\frac{1}{c} - \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \; 2\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \; \lambda+b\right| = 0$$

$$(\lambda+b)(\lambda+c)\left[\left(\lambda-\frac{1}{c}\right)(\lambda+b)-\left(-\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}\right)\left(2\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}\right)\right]=0$$

$$(\lambda+b)+(\lambda+c)\left[\left(\lambda^2+b\lambda-\frac{\lambda}{c}-\frac{b}{c}\right)-\left(-2\left(\frac{c-b-abc}{c}\right)\right)\right]=0$$

$$(\lambda+b)+(\lambda+c)\left[\left(\lambda^2+b\lambda-\frac{\lambda}{c}-\frac{b}{c}\right)-\left(-2\left(1-\frac{b}{c}-ab\right)\right)\right]=0$$

$$(\lambda+b)+(\lambda+c)\left[\left(\lambda^2+b\lambda-\frac{\lambda}{c}-\frac{b}{c}\right)-\left(-2+\frac{2b}{c}+2ab\right)\right]=0$$

$$(\lambda+b)+(\lambda+c)\left(\lambda^2+b\lambda-\frac{\lambda}{c}-\frac{b}{c}+2-\frac{2b}{c}-2ab\right)=0$$

$$(\lambda+b)+(\lambda+c)\left(\lambda^2+b\lambda-\frac{\lambda}{c}-\frac{3b}{c}+2-2ab\right)=0$$

$$(\lambda+b)+\left(\lambda^3+b\lambda^2-\frac{\lambda^2}{c}-\frac{\lambda 3b}{c}+2\lambda-2ab\lambda+c\lambda^2+bc\lambda-\frac{c\lambda}{\lambda}-\frac{3bc}{c}+2c-2abc\right)=0$$

$$(\lambda+b)+\left(\lambda^3+b\lambda^2-\frac{\lambda^2}{c}-\frac{\lambda 3b}{c}+2\lambda-2ab\lambda+c\lambda^2+bc\lambda-\lambda-3b+2c-2abc\right)=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2\left(b-\frac{1}{c}+c\right)+\lambda\left(-\frac{3b}{c}+2-2ab+bc\right)+b-3b+2c-2abc=0$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$\lambda^3+\lambda^2\left(b-\frac{1}{c}+c\right)+\lambda\left(-\frac{3b}{c}+2-2ab+bc\right)+(-2b+2c-2abc)=0 \tag{8}$$

persamaan diatas sulit difaktorkan dengan pemfaktoran biasa, maka digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Sehingga diperoleh:

Tabel 1. Routh Hurwitz dari (8)

1	$-\frac{3b}{c}+2-2ab+bc$
$b-\frac{1}{c}+c$	$-2b+2c-2abc$
$\frac{b^2c(2ac-c^2+3)-b(2ac+c^4+3)+2c}{bc^2-c+c^3}$	0
$-2b+2c-2abc$	0

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah semua nilai pada kolom pertama harus bernilai positif agar titik ekuilibrium bersifat stabil asimtotik. Maka dalam hal ini perhatikan kolom pertama sehingga diperoleh:

$$1>0$$

Misalkan,

$$b-\frac{1}{c}+c=H_{21}$$
$$H_{21}>0$$
$$b-\frac{1}{c}+c>0$$
$$b+c>\frac{1}{c}$$
$$c(b+c)>1$$
$$bc+c^2>1,$$

Lalu, dengan memisalkan $R_0 = bc + c^2$, maka $R_0 > 1$.
Selanjutnya misalkan,

$$\frac{b^2c(2ac - c^2 + 3) - b(2ac + c^4 + 3) + 2c}{bc^2 - c + c^3} = H_{31}$$

$$\frac{b^2c(2ac - c^2 + 3) - b(2ac + c^4 + 3) + 2c}{bc^2 - c + c^3} > 0$$

$$\frac{b^2c(2ac - c^2 + 3)}{bc^2 - c + c^3} - \frac{b(2ac + c^4 + 3) + 2c}{bc^2 - c + c^3} > 0$$

$$\frac{b^2c(2ac - c^2 + 3)}{bc^2 - c + c^3} > \frac{b(2ac + c^4 + 3) + 2c}{bc^2 - c + c^3}$$

Perhatikan $bc^2 - c + c^3$, syarat agar $bc^2 - c + c^3 > 0$ yaitu:

$$bc^2 - c + c^3 > 0$$

$$b > \frac{c - c^3}{c^2}$$

$$b > \frac{1}{c} - c$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{b^2c(2ac - c^2 + 3)}{b(2ac + c^4 + 3) + 2c} > 1$$

dengan memisalkan,

$$\frac{b^2c(2ac - c^2 + 3)}{b(2ac + c^4 + 3) + 2c} = R_1$$

Maka $R_1 > 1$.
terakhir dimisalkan $-2b + 2c - 2abc = H_{41}$ maka,

$$-2b + 2c - 2abc > 0$$

$$2c - 2abc - 2b > 0$$

$$c(2 - 2ab) > 2b$$

$$\frac{c(2 - 2ab)}{2b} > 1$$

dengan memisalkan,

$$\frac{c(2 - 2ab)}{2b} = R_2$$

maka $R_2 > 1$.
Sehingga, berdasarkan hasil yang didapat menunjukkan bahwa semua nilai pada kolom pertama dalam tabel Routh hurwizt bernilai positif, sehingga titik ekuilibrium ketiga bersifat stabil asimtotik.

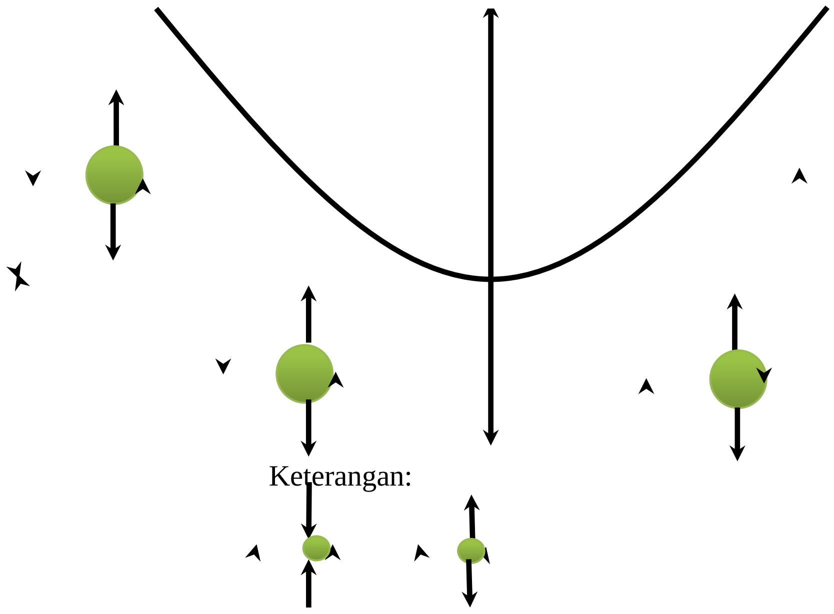
d. Analisis Bifurkasi pada Model Matematika Risiko Keuangan

Berdasarkan dari hasil analisis kestabilan lokal pada titik ekuilibrium E_1 dapat dilihat bahwa λ_2 dan λ_3 mengubah kestabilan karena perubahan parameter S dan T. Perubahan yang terjadi dijelaskan dalam Tabel 2.

Tabel 2. Perubahan Kestabilan pada Titik E_1

No	Kondisi	Kestabilan	Jenis Kestabilan
1	Jika $S > 0$ dan $T < 0$	Tidak stabil	*Saddle*
2	Jika $S > 0$ dan $T = 0$	Tidak dapat ditentukan	-
3	Jika $S > 0$ dan $T > 0$	Stabil asimtotik	*Sink*
4	Jika $S < 0$ dan $T < 0$	Tidak stabil	*Source*
5	Jika $S < 0$ dan $T = 0$	Tidak dapat ditentukan	-
6	Jika $S < 0$ dan $T > 0$	Tidak stabil	*Source*

Berdasarkan tabel 2, maka dapat digambarkan bentuk diagram bifurkasi pada titik ekuilibrium E_1 yang ditunjukkan pac nbar.



Gambar 1. Diagram Bifurkasi Titik E_1

Berdasarkan gambar, dapat dilihat bahwa kestabilan titik ekuilibrium E_1 berubah tergantung pada parameter S dan T. Perubahan kestabilan terlihat ketika kondisi $S > 0$ dan $T < 0$ yang menunjukkan kondisi tidak stabil berubah menjadi stabil asimtotik ketika $S > 0$ dan $T > 0$.

4. KESIMPULAN

Dalam hasil analisis terhadap model matematika risiko keuangan, didapat tiga titik ekuilibrium yaitu E_1, E_2, dan E_3. Titik ekuilibrium E_1 menunjukkan hanya ada permintaan investasi dengan kestabilan titik memiliki beberapa syarat dan bifurkasi yang terjadi berupa perubahan kestabilan titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium E_2 menunjukkan keadaan suku bunga bernilai negatif, sehingga kondisi ini tidak eksis dalam sudut pandang ekonomi. Titik ekuilibrium E_3 menunjukkan keadaan indeks harga bernilai negatif yang berarti bahwa dapat terjadi kondisi inflasi atau deflasi dengan kestabilan titik bersifat stabil asimtotik berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

REFERENSI

[1] A. M. Ahmad,"Konsep-Konsep Dasar Matematika Dalam Ekonomi," vol. 2, no. 1, 2021.
[2] E.A.V. Tarigan dan Y.M. Rangkuti, "Solusi Numerik dari Sistem Keuangan Kacau Menggunakan Metode Improved Runge Kutta Order Tiga," vol. 6, hal. 43-52, 2023.
[3] A. D. Saputri, Hariyanto, dan M. S. Winarko, "Analisi Bifurkasi Hopf Pada Sistem Keuangan dengan Kontrol Input," vol. 7, no. 2, 2018.
[4] S. N. Karina, "Pengaruh Risiko Keuangan, Dividen, Kepemilikan Manajerial dan Reputasi Auditor Terhadap Perataan Laba," vol. 18, no. 1, 2020.
[5] S. Hasan, Elpisah, J. Sabtohadi, Nurwahidah, Abdullah, dan Fachrurazi, Manajemen Keuangan. Jawa Tengah: Pena Persada, 2022.
[6] J. Zakaria, Pengantar Teori Ekonomi Makro. Makassar, 2008.
[7] E. Tandelilin,"Dasar-Dasar Manajemen Investasi," hal. 1-34, 2012.
[8] D. Darmawan, Pengantar Teori Ekonomi Makro. Surabaya: PT. Revka Petra Media, 2018.
[9] I. Sugema,"Kritis Keuangan Global 2008-2009 dan Implikasinya pada Perekonomian Indonesia," vol. 17, hal. 145-152, 2012.
[10] Widowati dan Sutimin, Buku Ajar Pemodelan Matematika. Semarang, 2007.
[11] Q. Gao dan J. Ma,"*Chaos and Hopf bifurcation of a finance system*," vol. 58, hal. 209-216, 2009, doi: 10.1007/s11071-009-9472-5.
[12] J. K. Hale dan H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations*. Drid Hills, 1991.

[13] S. Ross, *Introduction To Ordinary Differensial Equation*. Jhon Wiley and Sons Inc: New York, 1989.
[14] G. J. Olsder dan J. W. Van Der Woude, *Mathematical Systems Theory*. Netherland: Delft University Press, 1994.
[15] M. R. Adryan dan R.S. Winanda,"Analisis Bifurkasi Dinamika Populasi Songket dalam Menjaga Eksistensi Kerajinan Sonket Pandai Sikek," vol. 5, no. 3, hal. 1451-1464, 2024.