Metode Iteratif Bebas Turunan Tinggi Untuk Persamaan Nonlinear

Syafirna Fhadilah[1], Muhammad Subhan[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

ABSTRACT

To find the roots of nonlinear equations, numerical methods such as Newton-Raphson and Secant are often used when analytical approaches are difficult to apply. However, these methods are relatively slow due to their low convergence order. Iterative methods with higher convergence orders can speed up the process, but they often involve more complicated derivatives. To overcome this, a high derivative-free iterative method was developed using the predictor and corrector approach. This research aims to develop the method, analyze its convergence order, and develop its algorithm. This research is a theoretical research by reviewing the theories related to the problem at hand. The results show that the new method has a convergence order of six, is faster than the Newton-Raphson and Secant methods in solving nonlinear equations, and only involves the first derivative.

ABSTRAK

Untuk menemukan akar persamaan nonlinear, metode numerik seperti Newton-Raphson dan Secant sering digunakan saat pendekatan analitik sulit diterapkan. Namun, metode ini relatif lambat karena orde konvergensinya rendah. Metode iteratif dengan orde konvergensi lebih tinggi dapat mempercepat proses, tetapi sering melibatkan turunan yang lebih rumit. Untuk mengatasi hal ini, metode iteratif bebas turunan tinggi dikembangkan menggunakan pendekatan prediktor dan korektor. Penelitian ini bertujuan mengembangkan metode tersebut, menganalisis orde konvergensinya, dan menyusun algoritmanya. Penelitian ini adalah penelitian teoritis dengan mengkaji teori-teori yang berkaitan dengan masalah yang dihadapi. Hasilnya menunjukkan metode baru memiliki orde konvergensi enam, lebih cepat dari metode Newton-Raphson dan Secant dalam menyelesaikan persamaan nonlinear, serta hanya melibatkan turunan pertama.

Article Info

Article history:

Received August 12, 2024
Revised August 29, 2024
Accepted September 09, 2024

Keywords:

Nonlinear Equations
Order of Convergence
Iteratif Method

Kata Kunci:

Persamaan Nonlinear
Orde Konvergensi
Metode Iteratif

(Syafirna Fhadilah)
Program Studi Matematika,Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: syafirnafhadilah@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Menemukan akar dari persamaan nonlinear merupakan salah satu tantangan dalam analisis numerik. Kesulitan ini muncul ketika mencari akar dari persamaan nonlinear berbentuk $(f(x) = 0)$. Penyelesaiannya dapat dilakukan melalui pendekatan analitik atau numerik. Namun, jika bentuk persamaannya kompleks, pendekatan analitik menjadi kurang efektif. Oleh sebab itu, metode numerik sering digunakan sebagai alternatif untuk menentukan akar dari jenis persamaan ini [1].
Metode numerik untuk persamaan nonlinear terdiri dari dua kategori yaitu: metode langsung dan metode iteratif [2]. Metode langsung bertujuan untuk menghasilkan solusi yang tepat dalam satu langkah,

sedangkan pendekatan iteratif menggunakan pendekatan iteratif untuk menyelesaikan masalah yang mendekati solusi sebenarnya [3]. Di metode iteratif keefisienan menemukan akar persamaan nonlinear ditentukan oleh orde konvergensi dari suatu metode iteratif itu sendiri. Semakin tinggi orde konvergensi semakin cepat pula penemuan akar dari suatu persamaan nonlinear [4].

Banyak peneliti yang menggunakan metode iteratif sebagai alatnya. Salah satunya adalah penelitian tentang menyelesaikan sistem persamaan nonlinear dengan membandingkan metode iterasi orde delapan bebas turunan dengan metode Newton-Raphson. Kesimpulan yang didapat pada penelitian ini metode metode iterasi orde delapan bebas turunan lebih baik untuk penyelesaian sistem persamaan non linear daripada metode Newton-Raphson [5].

Metode iteratif dengan orde konvergensi yang tinggi memang bagus dalam kecepatan penyelesaiannya. Tetapi semakin tinggi orde konvergensi dari suatu metode iteratif tidak jarang membuat metode tersebut memuat turunan yang tinggi pula [6]. Hal ini diperkuat dengan beberapa penelitian yang menggunakan iteratif orde tinggi seperti penelitian yang dilakukan oleh solaiman dan Hasyim dalam penelitiannya berjudul "*Two new efficient sixth order iterative methods for solving nonlinear equations".* Dalam penelitian ini mereka menemukan metode iteratif yang memiliki orde tinggi yaitu enam [7]. Dari segi orde konvergensi metode tersebut telah memiliki orde yang tinggi namun, metode tersebut memuat turunan tinggi yang dapat menimbulkan masalah dalam perhitungan terutama pada fungsi yang agak kompleks.

Untuk mengatasi masalah tersebut, dibutuhkan pendekatan metode yang baru yang bisa memiliki orde konvergensi tinggi namun tidak dengan turunannya seperti yang dilakukan oleh Qudsi dan Imron dalam penelitiannya yang berjudul *A sixth-order iterative method free from derivative for solving multiple roots of a nonlinear equation* [8] dan selain itu ada penelitian yang juga melakukan penelitian mengenai masalah yang sama yaitu penelitian yang dilakukan oleh Parki dan Gupta dalam penelitiannya yang berjudul *A sixth order method for nonlinear equations* [9] dalam penelitian mereka menggunakan metode iteratif orde enam yang memiliki orde konvergensi 6 tanpa turunan tinggi tetapi metode mereka melihatkan 3 langkah sehingga dianggap kurang efisien dalam waktu pengerjaan

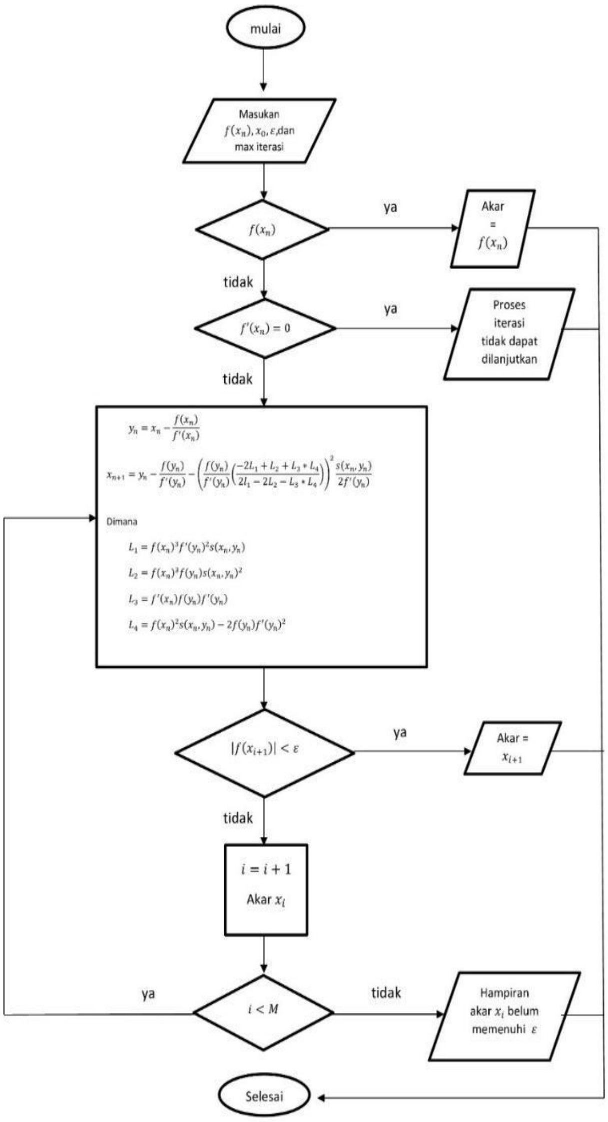
Sehingga pada penelitian kali ini ingin memodifikasi metode iteratif orde tinggi tanpa turunan dengan 2 langkah saja. Salah satu cara ialah membentuk metode prediktor dan korektor menjadi metode iterasi 2 langkah. Metode yang dipilih untuk prediktor adalah metode Newton-Raphson, sedangkan metode yang dipilih sebagai korektor adalah metode iterasi bebas turunan tinggi yang akan diciptakan [10].

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji proses pengembangan metode iterasi bebas turunan tinggi yang hanya menggunakan 2 langkah dalam menyelesaikan persamaan nonlinear, membuat algoritmanya, dan menganalisis orde kekonvergenannya.

2. METODE

Penelitian ini adalah penelitian ini bersifat dasar (teoritis) dengan fokus pada pengumpulan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, dan referensi lainnya yang relevan dengan metode yang diteliti [11]. Adapun tahap–tahap yang dilakukan dalam langkah- langkah penelitian ini adalah sebagai berikut:

a) Mengkaji dan memahami literatur yang berkaitan dengan persamaan nonlinear,algoritma, dan metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.
b) Mengkaji pembentukan metode iteratif keenam bebas turunan tinggi untuk persamaan nonlinear.
c) Membuat algoritma yang dituangkan dalam bentuk diagram alir (*flowchart*) dari metode iteratif keenam bebas turunan tinggi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.
d) Menganalisis orde kekonvergenan metode iteratif keenam bebas turunan tinggi untuk menyelesaikan persamaan nonlinear
e) Menerapkan algoritma dari metode iteratif keenam bebas turunan tinggi kedalam program komputer yaitu MATLAB r2016b dengan membandingkan metode iteratif bebas turunan tinggi dengan metode Secant dan metode Newton-Raphson.
f) Menyimpulkan hasil yang diperoleh berdasarkan teori yang telah dipelajari.



Gambar 1. Diagram *Flowchart* Metode Iteratif Bebas Turunan Tinggi

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Proses Pembentukan Metode Iterasi Bebas Turunan Tinggi

Metode iteratif bebas turunan tinggi adalah metode 2 langkah yang digunakan dalam menentukan akar persamaan nonlinear. Metode ini menggunakan metode prediktor dan korektor. Disini metode yang dipakai dalam prediktor adalah Metode Newton-Raphson sedangkan metode yang digunakan di korektor adalah metode yang akan dikembangkan dengan menggunakan deret Taylor. Langkah pertama dalam pembentukan metode baru ini adalah melakukan pendekatan deret Taylor mendekati fungsi $f(x)$ di sekitar titik a.

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^n\,(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots} \tag{1}$$

Karena metode yang dipakai adalah metode iteratif maka fungsi $f(x_{n+1})$ akan menggunakan nilai dari fungsi sebelumnya $f(x_n)$ maka akan diperoleh

$$\boldsymbol{f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} f'''(x_n) + \cdots} \quad (2)$$

Setelah diperoleh bentuk pendekatan deret Taylor mendekati $f(x_{n+1})$di sekitar x_n pada persamaan (2) dapat dicari akar perkiraan berikutnya x_{n+1} dengan cara mengasumsikan $f(x_{n+1}) = 0$.

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (x_{n+1} - x_n)^2 \left(\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}\right)} \quad (3)$$

Setelah memperoleh nilai x_{n+1} pada persamaan (3) dilanjutkan dengan mensubstitusikan nilai $(x_{n+1} - x_n)$ dari persamaan metode iteratif yang memiliki tingkat konvergensi yang lebih tinggi daripada nilai x_{n+1}. Disini digunakan metode iteratif orde 4 [12], ke ruas kanan persamaan 3, sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \left(-\frac{f(x_n)\big(6J_1 - 3J_2 + 2J_3 f'''(x_n)\big)}{2f'(x_n)\big(3J_1 - 3J_2 + J_3 f'''(x_n)\big)}\right)^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}} \quad (4)$$

Dimana

$$J_1 = f'(x_n)^2 f''(x_n)$$
$$J_2 = f(x_n) f''(x_n)^2$$
$$J_3 = f(x_n) f'(x_n)$$

Karena kita ingin membuat metode iteratif bebas turunan tinggi dan dalam persamaan (4) masih ada turunan tinggi yaitu turunan 2 dan turunan 3 maka akan dilakukan reduksi orde pada $f'''(x_n)$ dan $f''(x_n)$. Disini akan digunakan pendekatan deret taylor untuk mereduksi $f'''(x_n)$ dan interpolasi hermite untuk mereduksi $f''(x_n)$.Untuk mempermudah perhitungan kita susun ulang terlebih dahulu dengan menggabungkan prediktor yang telah diketahui di awal.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} - \left(-\frac{f(y_n)\big(6J_1 - 3J_2 + 2J_3 f'''(y_n)\big)}{2f'(y_n)\big(3J_1 - 3J_2 + J_3 f'''(y_n)\big)}\right)^2 \frac{f''(y_n)}{2f'(y_n)}$$

Setelah melakukan reduksi orde terhadap $f'''(y_n)$ dan $f''(y_n)$ akan diperoleh

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

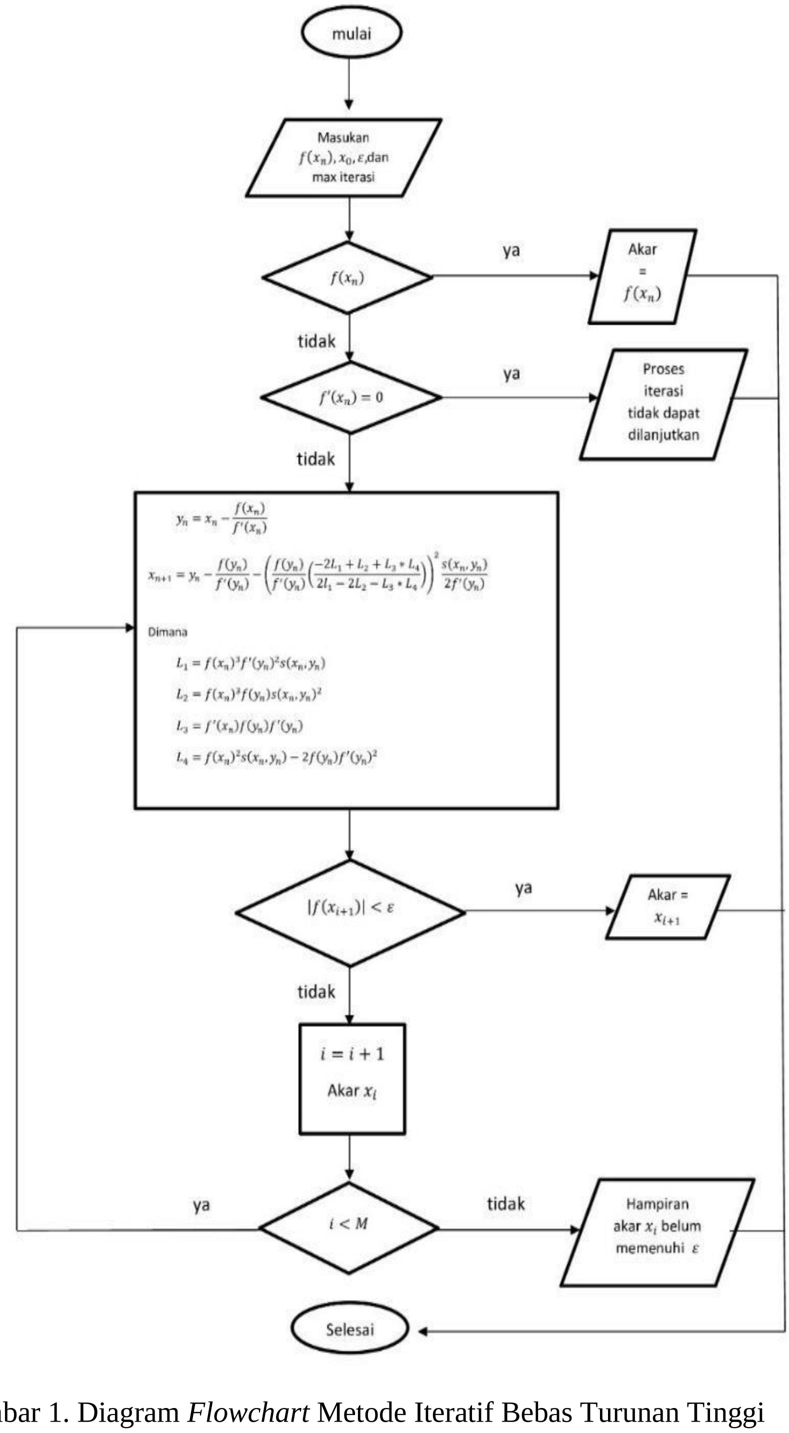
$$\boldsymbol{x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} - \left(\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}\left(\frac{-2L_1 + L_2 + L_3 * L_4}{2l_1 - 2L_2 - L_3 * L_4}\right)\right)^2 \frac{s(x_n, y_n)}{2f'(y_n)}} \quad (5)$$

Dimana

$$L_1 = f(x_n)^3 f'(y_n)^2 s(x_n, y_n)$$
$$L_2 = f(x_n)^3 f(y_n) s(x_n, y_n)^2$$
$$L_3 = f'(x_n) f(y_n) f'(y_n)$$
$$L_4 = f(x_n)^2 s(x_n, y_n) - 2f(y_n) f'(y_n)^2$$
$$s(x_n, y_n) = f''(y_n) = \frac{2}{(x_n - y_n)}\left[3\frac{f(x_n) - f(y_n)}{(x_n - y_n)} - 2f'(y_n) - f'(x_n)\right]$$

3.2 Algoritma Metode Iteratif Bebas Turunan Tinggi

Algoritma Metode Iteratif Bebas Turunan Tinggi dinotasikan ke dalam bentuk diagram alir (*flowchart)* pada Gambar 1. Dilihat dari Gambar 1 bahwa proses dalam mencari akar dari metode iteratif bebas turunan tinggi terdiri dari 3 tahapan yaitu: masukan/ *input*, proses dan keluaran/ *output.*



Gambar 1. Diagram *Flowchart* Metode Iteratif Bebas Turunan Tinggi

3.3 Analisis Kekonvergenan Metode Iterasi Bebas Turunan Tinggi

Untuk memperoleh orde kekonvergenan dari metode iteratif yang bebas turunan tinggi adalah dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar a. Dengan a adalah akar dari $f(x_n)$ sehingga

$f(a)=0$. Dengan $c_j=\frac{f^j(a)}{j!f'(a)}, j=2,3,4,5,\ldots$ dan $e_n=x_n-a$ [13]. Pada ekspansi deret Taylor yang akan dilakukan akan menggunakan orde tujuh. Hal ini akan ditandai dengan adanya notasi Big O yang menunjukan jika deret tersebut berbatas sampai orde tujuh.

$f(x_n)=f'(a)[e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+c_4e_n^4+c_5e_n^5+c_6e_n^6+c_7e_n^7+O(e_n^8)]$ dan $f'(x_n)=f'(a)[1+2c_2e_n^1+3c_3e_n^2+4c_4e_n^3+5c_5e_n^4+6c_6e_n^5+7c_7e_n^6+O(e_n^7)]$

Jika persamaan $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{f(x_n)}}{\boldsymbol{f'(x_n)}}=\boldsymbol{e_n}&-\left(\boldsymbol{2c_3+2c_2^2}\right)\boldsymbol{e_n^3}+\left(\boldsymbol{-3c_4+7c_2c_3-4c_2^3}\right)\boldsymbol{e_n^4}\\&+\left(\boldsymbol{8c_2^4-20c_2^2c_3-6c_3^2+10c_2c_4-4c_5}\right)\boldsymbol{e_n^5}\\&+\left(\boldsymbol{-16c_2^5+52c_2^3c_3-33c_2c_3^2-28c_2^2c_4+17c_3c_4+13c_2c_5-5c_6}\right)\boldsymbol{e_n^6}\\&+\boldsymbol{O}\left(\boldsymbol{e_n^7}\right)\end{aligned}\tag{6}$$

Substitusi persamaan (6) ke persamaan $y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, dengan memisalkan $y_n=x_n-e_n$ maka $x_n=y_n+e_n$ dan $e_n=x_n-a$ maka $e_n=y_n+e_n-a$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y_n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c_2e_n^2}&+\left(\boldsymbol{2c_3-2c_2^2}\right)\boldsymbol{e_n^3}+\left(\boldsymbol{3c_4-7c_2c_3+5c_2^3}\right)\boldsymbol{e_n^4}\\&+\left(\boldsymbol{12c_2^4-24c_2^2c_3+6c_3^2+10c_2c_4-4c_5}\right)\boldsymbol{e_n^5}\\&+\left(\boldsymbol{28c_2^5-73c_2^3c_3+37c_2c_3^2+34c_2^2c_4-17c_3c_4-13c_2c_5+5c_6}\right)\boldsymbol{e_n^6}\\&+\boldsymbol{O}\left(\boldsymbol{e_n^7}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

Selanjutnya perluas $f(y_n)$ dan $f'(y_n)$ dengan menggunakan deret Taylor, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(y_n)}=\boldsymbol{f'(a)}\left[\boldsymbol{c_2e_n^2}+\left(\boldsymbol{2c_3-2c_2^2}\right)\boldsymbol{e_n^3}\right]&+\left(\boldsymbol{3c_4-7c_2c_3+5c_2^3}\right)\boldsymbol{e_n^4}\\&+\left(\boldsymbol{12c_2^4-24c_2^2c_3+6c_3^2+10c_2c_4-4c_5}\right)\boldsymbol{e_n^5}+(\boldsymbol{28c_2^5-73c_2^3c_3}\\&+\boldsymbol{37c_2c_3^2+34c_2^2c_4-17c_3c_4-13c_2c_5+5c_6})\boldsymbol{e_n^6}+\boldsymbol{O}(\boldsymbol{e_n^7})]\end{aligned}\tag{8}$$

Dan

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f'(y_n)}=\boldsymbol{f'(a)}\big[\boldsymbol{1}+\boldsymbol{2c_2^2e_n^2}&+\left(\boldsymbol{4c_2c_3-4c_2^3}\right)\boldsymbol{e_n^3}+\left(\boldsymbol{6c_2c_4-11c_2^2c_3+8c_2^4}\right)\boldsymbol{e_n^4}\\&+\boldsymbol{4c_2}\left(\boldsymbol{-4c_2^4+7c_2^2c_3-5c_2c_4+2c_5}\right)\boldsymbol{e_n^5}\\&+\boldsymbol{2}\left(\boldsymbol{16c_2^6-34c_2^4c_3+6c_3^3+30c_2^3c_4-8c_2c_3c_4-13c_2^2+5c_2c_6}\right)\boldsymbol{e_n^6}\\&+\boldsymbol{O}\left(\boldsymbol{e_n^7}\right)\big]\end{aligned}\tag{9}$$

Substitusikan persamaan $f(x_n)$, $f'(x_n)$, (7), (8), dan (9) ke $s(x_n,y_n)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f'(a)}[\boldsymbol{2c_2}+(\boldsymbol{6c_2c_3-2c_4})\boldsymbol{e_n^2}&-\boldsymbol{4}\left(\boldsymbol{3c_2^2-3c_3^2-c_2c_4+c_5}\right)\boldsymbol{e_n^3}\\&+\boldsymbol{2}\left(\boldsymbol{12c_2^3c_3+c_2^2c_4+13c_3c_4\mp c_2}\left(\boldsymbol{-21c_3^2+c_5}\right)-\boldsymbol{3c_6}\right)\boldsymbol{e_n^4}\\&+\boldsymbol{4}\left(\boldsymbol{12c_2^4c_3+9c_3^3+6c_2^3c_4+12c_2c_3c_4-3c_4^2-7c_3c_5-c_2^2}\left(\boldsymbol{30c_2^3+c_5}\right)\right.\\&\left.+\boldsymbol{2c_7}\right)\boldsymbol{e_n^5}\\&+\boldsymbol{2}\left(\boldsymbol{48c_2^5c_3+44c_2^4c_4-43c_3^2c_4+11c_4c_5-c_2^3}\left(\boldsymbol{156c_3^2+5c_5}\right)\right.\\&+\boldsymbol{15c_3c_6+c_2^2}(\boldsymbol{14c_3c_4+3c_6})+\boldsymbol{c_2}\left(\boldsymbol{99c_3^3+10c_4^2-30c_3c_5-c_7}\right)\\&\left.-\boldsymbol{5c_8}\right)\boldsymbol{e_n^6})+\boldsymbol{O}(\boldsymbol{e_n^7})]\end{aligned}\tag{10}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan $f'(x_n)$, (6), (9) dan (10) ke (5), sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x_{n+1}}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c_2^3c_3e_n^6}+\boldsymbol{O}(\boldsymbol{e_n})^{\boldsymbol{7}}\tag{11}$$

Dapat ditulis ulang

$$\boldsymbol{e_{n+1}}=-\boldsymbol{c_2^3c_3e_n^6}+\boldsymbol{O}(\boldsymbol{e_n})^{\boldsymbol{7}}\tag{12}$$

Dari persamaan (12) dapat dilihat bahwa metode memiliki konvergensi orde 6.

3.4 Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan dilakukan perbandingan jumlah iterasi dari metode iteratif bebas turunan tinggi (MIBTT) dengan Metode Newton-Raphson (MNR) yang memiliki orde konvergensi dua [14] dan Metode Secant (MS) yang memiliki orde konvergensi kurang dari dua [15]. Untuk membuktikan kecepatan dalam menentukan nilai akarnya. Perbandingan simulasi numerik ini menggunakan software MATLAB r2016b dengan kriteria pemberhentian saat $f'(x_n) = 0$ dan $\left|f(x_{n+1)}\right| < \varepsilon$ dimana batas galat toleransi $\varepsilon = 10^{-6}$ dan maksimal iterasi (M)=100.

Berikut beberapa persamaan nonlinear yang akan digunakan untuk simulasi numerik;

1) $f_1(x) = (3x - 2)^7 - 1 = 0$
2) $f_2(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + sin\ sin\ x - 1 = 0$
3) $f_3(x) = e^{x^2} - 3x^2 + cos\ cos\ x\ - x^{\frac{1}{3}}$

Persamaan dari fungsi $f_1(x) = (3x - 2)^7 - 1 = 0$ akan dibandingkan untuk melihat jumlah iterasinya apabila menggunakan MIBTT, MS,dan MNR. Hasil perbandingannya akan dijelaskan dalam tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan beberapa metode penghitungan menggunakan fungsi $f_1\ (x)$

Tebakan awal x_0	x_1	Jumlah iterasi			Akar	Sisa
		MIBTT	MNR	MS		
3,3	2,3	8	17	21	1	0
1,5	1,3	5	10	12	1	0
1,2	1,6	4	7	10	1	0

Pada Tabel 1 dapat dilihat jika MIBTT memiliki lebih sedikit jumlah iterasi daripada MNR dan MS di 3 nilai x_0 dan x_1 yang berbeda dengan nilai akar yang sama. Ini membuktikan jika MIBTT memiliki kecepatan yang lebih dibandingkan dengan MNR dan MS.

Persamaan dari fungsi $f_2(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + sin\ sin\ x - 1 = 0$ akan dibandingkan untuk melihat jumlah iterasinya apabila menggunakan MIBTT, MS dan MNR. Hasil perbandingannya akan dijelaskan dalam tabel 2.

Tabel 2. Perbandingan beberapa metode penghitungan menggunakan fungsi $f_2\ (x)$

Tebakan awal x_0	x_1	Jumlah iterasi			Akar	Sisa
		MIBTT	MNR	MS		
3,3	2,3	3	6	7	1,33	0
1,5	1,3	2	3	4	1,33	0
1,2	1,6	2	3	4	1,33	0

Pada Tabel 2 juga dapat dilihat jika MIBTT memiliki lebih sedikit jumlah iterasi daripada MNR dan MS di 3 nilai x_0 dan x_1 yang berbeda dengan nilai akar yang sama. Ini membuktikan jika MIBTT memiliki kecepatan yang lebih dibandingkan dengan MNR dan MS.

Persamaan dari fungsi $f_3(x) = e^{x^2} - 3x^2 + cos\ cos\ x\ - x^{\frac{1}{3}}$ akan dibandingkan untuk melihat jumlah iterasinya apabila menggunakan MIBTT, MS,dan MNR. Hasil perbandingannya akan dijelaskan dalam tabel 3.

Tabel 3. Perbandingan beberapa metode penghitungan menggunakan fungsi $f_3(x)$

Tebakan awal x_0	x_1	Jumlah iterasi			Akar	Sisa
		MIBTT	MNR	MS		

3,3	2,3	7	14	14	1,37	0
1,5	1,3	3	4	5	1,37	0
1,2	1,6	4	6	8	1,37	0

Pada Tabel 3 juga dapat dilihat jika MIBTT memiliki lebih sedikit jumlah iterasi daripada MNR dan MS di 3 nilai x_0 dan x_1 yang berbeda dengan nilai akar yang sama. Hal ini membuktikan jika kecepatan konvergensi dari MIBTT lebih cepat dari pada metode MNR dan MS.

4. KESIMPULAN

Pada penelitian ini memperkenalkan metode iterasi orde keenam yang efisien untuk menyelesaikan persamaan non-linear tanpa memerlukan evaluasi derivatif orde tinggi, dengan memanfaatkan kombinasi deret Taylor dan teknik komposisi. Metode ini memiliki orde konvergensi enam dan terbukti lebih cepat, sederhana, serta menghasilkan estimasi akar dengan error residu yang lebih kecil dibandingkan metode sebelumnya seperti MNR dan MS. Penghapusan kebutuhan derivatif orde tinggi menjadikannya signifikan untuk aplikasi komputasi yang kompleks dan praktis. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan memperluas metode ini agar dapat menangani kondisi awal yang jauh dari akar, sistem persamaan non-linear, serta pengujian pada aplikasi dunia nyata untuk mengukur stabilitas dan kinerjanya.

REFERENSI

[1] J. . Rice, *Numerical Methods in Software and Analysis*, Second. Academic Press, 1993. doi: 10.1016/C2009-0-22414-7.
[2] S. . Chapra and R. . Canale, *Numerical Methods for Engineers*, no. November. bandung: New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1990.
[3] R. Munir, *Metode Numerik*, Lima. Bandung: Informatika Bandung, 2021.
[4] R. L.Burden and J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*, Ninth. 2010.
[5] M. N. Muhaijir and L. L. Nanda, "Metode Iterasi Tiga Langkah Bebas Turunan Orde Konvergensi Delapan untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear," vol. 2, no. 2, pp. 74–80, 2017.
[6] C. Chun and B. Neta, "A new sixth-order scheme for nonlinear equations," *Appl. Math. Lett.*, vol. 25, no. 2, pp. 185–189, 2012, doi: 10.1016/j.aml.2011.08.012.
[7] O. . Solaiman and I. Hashim, "Two new efficient sixth order iterative methods for solving nonlinear equations," *J. King Saud Univ. - Sci.*, vol. 31, no. 4, pp. 701–705, 2019, doi: 10.1016/j.jksus.2018.03.021.
[8] R. Qudsi and M. Imran, "A sixth-order iterative method free from derivative for solving multiple roots of a nonlinear equation," *Appl. Math. Sci.*, vol. 8, no. 113–116, pp. 5721–5730, 2014, doi: 10.12988/ams.2014.47567.
[9] S. K. Parhi and D. K. Gupta, "A sixth order method for nonlinear equations," *Appl. Math. Comput.*, vol. 203, no. 1, pp. 50–55, 2008, doi: 10.1016/j.amc.2008.03.037.
[10] E. Sharma and S. Panday, "Efficient sixth order iterative method free from higher derivatives for nonlinear equations," *J. Math. Comput. Sci.*, pp. 1–13, 2022, doi: 10.28919/jmcs/6950.
[11] M. Nazir, *Metode Penelitian*. Jakarta: Galia Indonesia, 2014.
[12] S. Li, "Fourth-order iterative method without calculating the higher derivatives for nonlinear equation," *J. Algorithms Comput. Technol.*, vol. 13, 2019, doi: 10.1177/1748302619887686.
[13] J. Stewart, *calculus Early Transcendentals*, 8th ed. Cengage Learning, 2015.
[14] S. Hanzely, D. Kamzolov, D. Pasechnyuk, A. Gasnikov, P. Richtárik, and M. Takáč, "A Damped Newton-Raphson Method Achieves Global O(1/K2) and Local Quadratic Convergence Rate," *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, vol. 35, no. NeurIPS, pp. 1–15, 2022.
[15] W. Zhou, X. Wei, L. Wang, and G. Wu, "A superlinear iteration method for calculation of finite length journal bearing's static equilibrium position," *R. Soc. Open Sci.*, vol. 4, no. 5, 2017, doi: 10.1098/rsos.161059.