Penentuan Akar Persamaan Non Linier Menggunakan Metode Iterasi Tanpa Menghitung Turunan yang Lebih Tinggi

Danisa Alzura Olpelda[1], Muhammad Subhan[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received August 07, 2024
Revised August 23, 2024
Accepted September 04, 2024

Keywords:

Non-linear equation
Thiele's continued fraction
Viscovatov algorithm
Iterative method
Order of convergence

Kata Kunci:

Persamaan non linier
Pecahan kontinu Thiele
Algoritma Viscovatov
Metode iterasi
Orde konvergensi

ABSTRACT

The iteration method without calculating higher derivatives is one of the numerical methods which is included in the group of open methods. This iteration method is derived based on the third truncated Thiele's continuous fraction. To avoid calculating higher derivatives, an approximation of the second and third derivatives is used in determining the roots. This research aims to determine the roots of non-linear equations using the iteration method without calculating higher derivatives. This type of research is basic research. Based on the discussion results, it was found that the iteration method without calculating higher derivatives uses two-step in determining the root. The convergence analysis shows that the iteration method without calculating higher derivatives has a convergence order of four. The algorithm of the iteration method without calculating higher derivatives is shown in the form of a flowchart.

ABSTRAK

Metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi merupakan salah satu metode numerik yang termasuk ke dalam kelompok metode terbuka. Metode iterasi ini diturunkan berdasarkan pada pecahan kontinu Thiele terpotong ketiga. Untuk menghilangkan penghitungan turunan yang lebih tinggi digunakan perkiraan turunan kedua dan ketiga dalam menentukan akarnya. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan akar persamaan non linier menggunakan metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi. Jenis penelitian ini adalah penelitian dasar. Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi menggunakan dua langkah penyelesaian untuk menentukan akar hampirannya. Hasil analisis kekonvergenan menunjukkan metode Iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi memiliki orde kekonvergenan empat. Algoritma dari metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi ditampilkan dalam bentuk diagram alir.

Penulis pertama/ Corresponding Author:

(Danisa Alzura Olpelda)
Program Studi Matematika,Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: daodanisaao@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Salah satu masalah yang umum dijumpai dalam bidang matematika adalah tentang penentuan akar dari persamaan non linier dalam bentuk $f(x) = 0$. Baik metode analitik maupun numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Namun, persamaan non linier yang memiliki bentuk rumit tidak bisa diselesaikan menggunakan metode analitik sehingga akan digunakan metode numerik dalam penyelesaiannya. Metode numerik merupakan metode di mana untuk menyelesaikan permasalahan numeriknya dilakukan perhitungan komputasi secara berulang hingga diperoleh hasil perkiraan yang mendekati hasil eksak [1]. Beberapa metode numerik yang ada di antaranya metode bagi dua, Newton, posisi palsu, Secant, dan lain-lain. Masing-masing metode tersebut memiliki karakteristik, kelebihan dan kekurangannya tersendiri [2].

Beberapa tahun terakhir ini, banyak metode numerik iteratif tingkat tinggi telah dikembangkan untuk memecahkan masalah pencarian akar persamaan non linier. Metode Newton yang berorde konvergensi dua atau kuadratik [3] merupakan salah satu metode iterasi yang sangat populer untuk digunakan, dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \ dengan \ f'(x_k) \neq 0 \ dan \ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Metode tersebut melakukan satu langkah iterasi untuk mendekati solusi. Namun, Traub [4] mendefinisikan metode iterasi dua langkah Newton untuk meningkatkan kecepatan konvergensinya seperti berikut:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

(3)

Metode dua langkah Newton memiliki orde konvergensi empat. Namun, metode iteratif tersebut bergantung pada turunan pertama di titik x_k dan titik lainnya y_k. Hal tersebut tentu dapat menghabiskan lebih banyak waktu untuk penerapan metode dua langkah Newton. Selain itu, metode dua langkah memerlukan dua evaluasi fungsi dan dua evaluasi turunan pertama per iterasinya [5]. Sehingga, untuk mengurangi jumlah total evaluasi fungsi baru (nilai f dan turunannya f') per iterasi dan tetap menjaga urutan konvergensinya diperlukan suatu metode iteratif baru yang lebih efisien [6].

Pada artikel ini, akan dibahas tentang metode iterasi dua langkah tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi menggunakan pecahan kontinu Thiele yang bertujuan mendapatkan bentuk persamaan baru untuk menyelesaikan persamaan non linier. Untuk menghindari perhitungan turunan yang lebih tinggi digunakan perkiraan turunan tingkat tinggi dengan mengaproksimasikan deret Taylor sehingga metode ini hanya menghitung dua evaluasi fungsi dan satu evaluasi turunan pertama per iterasinya [6].

2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar dengan mengumpulkan berbagai informasi tentang subjek yang berkaitan dengan masalah menentukan akar-akar persamaan non linier. Informasi ini dikumpulkan dari berbagai sumber seperti literatur, jurnal, buku, dan lainnya yang dapat diakses dari internet. Berikut prosedur pada penelitian ini:

1) Mambaca dan menelaah literatur tentang persamaan non linier, algoritma, dan metode numerik dalam menemukan akar persamaan non linier.
2) Mempelajari prinsip-prinsip Metode Newton, Metode Halley, dan Modifikasi Metode Householder dalam menemukan akar persamaan non linier.
3) Meneliti proses dari pembentukan formula metode iterasi baru untuk menemukan akar persamaan non linier tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi.
4) Menganalisis orde kekonvergenan metode iterasi baru dalam penentuan akar persamaan non linier tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi.

5) Membuat algoritma dari metode iterasi baru untuk menemukan akar persamaan non linier ke dalam bentuk diagram alir.
6) Melakukan proses simulasi numerik pada persamaan non linier kemudian membandingkan hasil yang diperoleh dari metode iterasi tanpa turunan tinggi dengan Metode Newton, Metode Halley dan Modifikasi Metode Householder.
7) Menarik kesimpulan berdasarkan hasil penelitian yang telah didapatkan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Pembentukan Formula Metode Iterasi Tanpa Turunan Tinggi

Metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi ini diturunkan dengan mendefinisikan pecahan kontinu Thiele [9]. Langkah pertama, digunakan pecahan kontinu Thiele terpotong pertama dengan mengekspansikan $f(x)$ di sekitar x_k dimana merupakan tebakan awal yang cukup dekat dengan akar sebenarnya sehingga diperoleh:

$$f(x) = c_0 + \frac{x - x_k}{c_1}.$$

Substitusikan $f(x) = 0$, diperoleh:

$$0 = c_0 + \frac{x - x_k}{c_1} \tag{4}$$

dari persamaan (4) di atas diperoleh:

$$x - x_k = -c_0 c_1. \tag{5}$$

Selanjutnya, dengan mendefinisikan pecahan kontinu Thiele terpotong ketiga dan melakukan ekspansi $f(x)$ di sekitar x_k diperoleh:

$$f(x) = c_0 + \cfrac{x - x_k}{c_1 + \cfrac{x - x_k}{c_2 + \cfrac{x - x_k}{c_3}}}. \tag{6}$$

Substitusikan persamaan (5) ke persamaan (6) dengan nilai $f(x) = 0$, didapatkan:

$$0 = c_0 + \cfrac{x - x_k}{c_1 + \cfrac{x - x_k}{c_2 + \cfrac{-c_0 c_1}{c_3}}} \tag{7}$$

dengan menyelesaikan persamaan (7) didapatkan:

$$x = x_k - \frac{(c_0 c_1)^2 - c_0 c_1 c_2 c_3}{c_0 c_1 - (c_0 + c_2) c_3}. \tag{8}$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan nilai $c_0, c_1, c_2, dan\ c_3$ berdasarkan Algoritma Viscovatov [10] berikut:

$$c_0 = f(x_k), c_1 = \frac{1}{f'(x_k)}, c_2 = -\frac{2f'^2(x_k)}{f''(x_k)}, c_3 = \frac{3f''^2(x_k)}{2f'^2(x_k)\, f'''(x_k) - 3f'(x_k) f''^2(x_k)}. \tag{9}$$

ke dalam persamaan (8), maka diperoleh:

$$x = x_k - \frac{f(x_k)\big(6f'^2(x_k)f''(x_k) - 3f(x_k)f''^2(x_k) + 2f(x_k)f'(x_k)f'''(x_k)\big)}{2f'(x_k)(3f'^2(x_k)f''(x_k) - 3f(x_k)f''^2(x_k) + f(x_k)f'(x_k)f'''(x_k))}. \tag{10}$$

Persamaan (10) dapat ditulis ke dalam bentuk iterasi dengan kembali memisalkan $x = x_{k+1}$, sehingga didapatkan:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\big(6f'^2(x_k)f''(x_k) - 3f(x_k)f''^2(x_k) + 2f(x_k)f'(x_k)f'''(x_k)\big)}{2f'(x_k)\big(3f'^2(x_k)f''(x_k) - 3f(x_k)f''^2(x_k) + f(x_k)f'(x_k)f'''(x_k)\big)} \tag{11}$$

untuk setiap nilai $k \geq 1$.

Untuk mengurangi perhitungan turunan fungsi metode iterasi pada persamaan (11), akan digunakan deret Taylor [11] yang akan mengaproksimasi nilai $f''(x_k)$ dan $f'''(x_k)$.

Misalkan $y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, kemudian $f(y_k)$ diperluas disekitar titik x_k ke dalam deret Taylor orde tiga:

$$f(y_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)(y_k - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(y_k - x_k)^2 + \frac{f'''(x_k)}{3!}(y_k - x_k)^3.$$

Sehingga didapatkan:

$$f'''(x_k) \approx \frac{3f^2(x_k)f'(x_k)f''(x_k) - 6f(y_k)f'^3(x_k)}{f^3(x_k)}. \tag{12}$$

Setelah itu , substitusikan persamaan (12) ke dalam persamaan (11) diperoleh:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4f(x_k)f(y_k)f'^4(x_k) - 4f^3(x_k)f'^2(x_k)f''(x_k) + f^4(x_k)f''^2(x_k)}{4f(y_k)f'^5(x_k) + 2f^2(x_k)f'^{(x_k)}f''^{(x_k)\left(f(x_k)f''(x_k)-2f'^2(x_k)\right)}} \tag{13}$$

Di mana $y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ untuk setiap nilai $k \geq 1$.

Untuk menghilangkan turunan kedua fungsi pada persamaan (13), digunakan deret Taylor orde kedua dengan mengasumsikan $y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, kemudian $f(y_k)$ diperluas disekitar titik x_k.

$$f(y_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)(y_k - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(y_k - x_k)^2.$$

Sehingga didapatkan:

$$f''(x_k) \approx \frac{2f(y_k)f'^2(x_k)}{f^2(x_k)}. \tag{14}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan (14) ke dalam persamaan (13), diperoleh metode iteratif yang bebas turunan kedua:

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} x_{k+1} = x_k - \frac{\big(f(x_k) - f(y_k)\big)f(x_k)}{\big(f(x_k) - 2f(y_k)\big)f'(x_k)} \qquad (15) \quad (16)$$

untuk setiap nilai $k \geq 1$.

Persamaan (15) dan persamaan (16) merupakan bentuk metode iterasi dua langkah. Untuk persamaan (16) tidak perlu menghitung turunan tinggi dalam menemukan solusi dari persamaan non linier. Karakteristik dari metode ini yaitu setiap iterasinya memerlukan dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_k), f(y_k)$ dan satu turunan pertama fungsi yaitu $f'(x_k)$.

3.2. Analisis Kekonvergenan Metode Iterasi Tanpa Turunan Tinggi

Analisis orde kekonvergenan digunakan untuk mengetahui tingkat percepatan yang dimiliki metode iterasi untuk menghampiri akar persamaan pada suatu fungsi. Orde kekonvergenan dari metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi ditunjukkan oleh Teorema 1 berikut:

Teorema 1 Misalkan $p \in [a, b]$ adalah solusi dari persamaan $f(x) = 0$. Sebagai tambahan bahwa $f(x)$ adalah fungsi yang memiliki turunan hingga tingkat tertentu yang dibutuhkan di sekitar titik p. Jika perkiraan awal x_0 cukup dekat dengan p, maka orde konvergensi metode iterasi dua langkah yang didefinisikan pada persamaan (15) dan (16) adalah empat [6].

Bukti. Dengan mengasumsikan p adalah akar dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(p) = 0$. Misalkan e_k adalah galat pada iterasi ke-k, sehingga $e_k = x_k - p$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor dari fungsi $f(x)$ di sekitar titik $x = p$ dan dievaluasi pada titik $x = x_k$ sampai orde empat dan mengabaikan orde yang lebih tinggi, didapatkan:

$$f(x_k) = f'(p)\left(e_k + C_2 e_k^2 + C_3 e_k^3 + C_4 e_k^4 + O(e_k^5)\right) \tag{17}$$

dengan $C_i = \frac{f^{(i)}(p)}{i! f'(p)}\ dengan\ i = 1, 2, 3, \ldots.$

Selanjutnya dengan langkah yang sama, menggunakan ekspansi Taylor dari fungsi $f'(x_k)$ di sekitar titik $x = p$ dan dievaluasi pada titik $x = x_k$, diperoleh:

$$f'(x_k) = f'(p)\left(1 + 2C_2 e_k + 3C_3 e_k^2 + 4C_4 e_k^3 + O\left(e_k^4\right)\right). \tag{18}$$

Bagikan persamaan (17) dengan persamaan (18), diperoleh:

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - C_2 e_k^2 + (2C_2^2 - 2C_3)e_k^3 + (-4C_2^3 + 7C_2C_3 - 3C_4)e_k^4 + O\left(e_k^5\right). \tag{19}$$

Substitusikan persamaan (19) dan $x_k = e_k + p$ ke dalam persamaan (15), diperoleh:

$$y_k = p + C_2 e_k^2 + (-2C_2^2 + 2C_3)e_k^3 + (4C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_k^4 + O\left(e_k^5\right). \tag{20}$$

Kemudian untuk mendapatkan $f(y_k)$, akan dilakukan langkah yang sama seperti saat mendapatkan $f(x_k)$ dan $f'(x_k)$, yaitu dengan menggunakan ekspansi Taylor yang dievaluasi di sekitar titik $x = y_k$. Sehingga diperoleh:

$$f(y_k) = f'(p)\left(C_2 e_k^2 + (-2C_2^2 + 2C_3)e_k^3 + (5C_2^3 - 7C_2C_3 + 3C_4)e_k^4 + O\left(e_k^5\right)\right). \tag{21}$$

Untuk mendapatkan nilai $\left(f(x_k) - f(y_k)\right)f(x_k)$ digunakan persamaan (17) dan (21), diperoleh:

$$\left(f(x_k) - f(y_k)\right)f(x_k) = f'^2(p)\left(e_k^2 + C_2 e_k^3 + 2C_2^2 e_k^4 + (-3C_2^3 + 6C_2C_3 - C_4)e_k^5 + O(e_k^6)\right) \tag{22}$$

dengan cara yang sama akan dicari $(f(x_k) - 2f(y_k))f'(x_k)$ menggunakan persamaan (17), (18), dan (21), didapatkan:

$$\begin{aligned} f(x_k) - 2f(y_k))f'(x_k) = f'^2(p)\Big(&e_k + C_2 e_k^2 + 2C_2^2 e_k^3 + (-2C_2^3 + 5C_2C_3 - C_4)e_k^4 + \\ &(4C_2^4 - 8C_2^2C_3 + 6C_2C_4 + 3C_3^2 - 2C_5)e_k^5 + O\left(e_k^6\right)\Big). \end{aligned} \tag{23}$$

Kemudian bagikan persamaan (19) dan persamaan (20), diperoleh:

$$\frac{\left(f(x_k) - f(y_k)\right)f(x_k)}{\left(f(x_k) - 2f(y_k)\right)f'(x_k)} = e_k + (-C_2^3 + C_2C_3)e_k^4 + O\left(e_k^5\right). \tag{24}$$

Lalu dengan mensubstitusikan persamaan (24) dan $x_k = e_k + p$ ke dalam persamaan (16) diperoleh:

$$x_{k+1} = p + (C_2^3 - C_2C_3)e_k^4 + O\left(e_k^5\right). \tag{25}$$

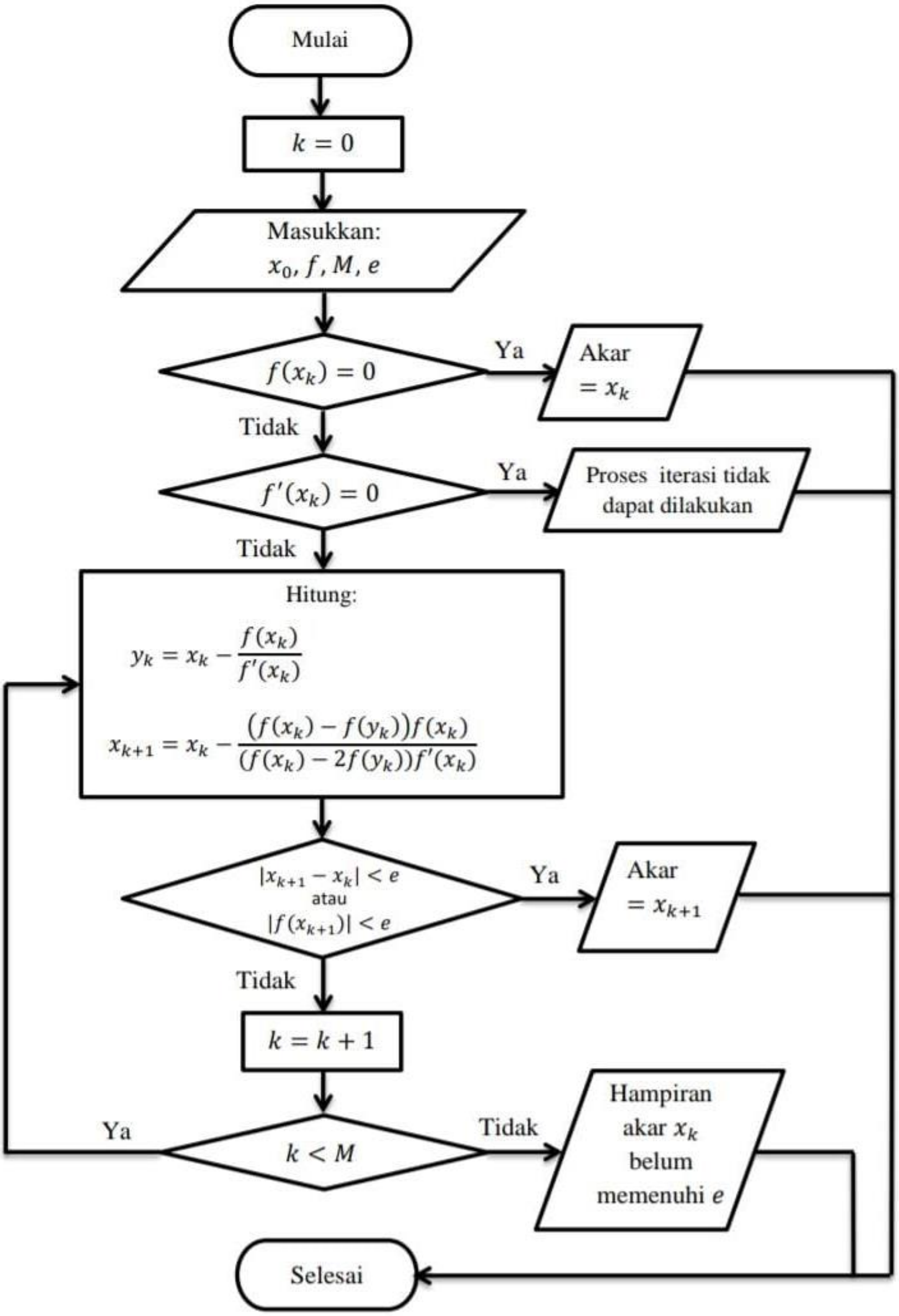
Karena $e_{k+1} = x_{k+1} - p$, maka diperoleh persamaan (22) menjadi:

$$e_{k+1} = (C_3^2 - C_2C_3)e_k^4 + O\left(e_k^5\right). \tag{26}$$

Berdasarkan persamaan (26) terlihat bahwa metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi pada persamaan (16) memiliki orde konvergensi empat.

3.3. Algoritma Metode Iterasi Tanpa Turunan Tinggi

Algoritma metode iterasi tanpa turunan tinggi dalam menemukan akar persamaan non linier ditampilkan ke dalam bentuk diagram alir, seperti yang ditampilkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Flowchart Metode Iterasi Tanpa Menghitung Turunan yang Lebih Tinggi

3.4. Simulasi Numerik

Tujuan dari bagian ini adalah untuk membuktikan kecepatan metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi (MTT) dalam menemukan akar persamaan. Untuk mencapai tujuan ini, akan dilakukan perbandingan antara metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi (MTT), Metode Newton (MN) [3], Metode Halley (MH) [7], dan Modifikasi Metode Householder (MMH) [8] dengan melihat metode mana yang memiliki jumlah iterasi lebih sedikit. Perbandingan tersebut akan dilakukan menggunakan bantuan dari perangkat lunak MAPLE 17 dengan kriteria pemberhentian jalannya proses komputasi sebagai berikut:

(1) $|x_{k+1} - x_k| < e$
(2) $|f(x_{k+1})| < e$

Diberikan contoh persamaan berikut:

$$f(x) = (3x + 5)^3 - 8$$

Persamaan ini dapat diselesaikan secara analitik, akar dari persamaan ini adalah $x = -1$.

Tabel 1. Perbandingan kecepatan konvergensi dari beberapa metode

Metode	Tebakan Awal (x_0)	Iterasi ke-	Akar Persamaan	Galat
Metode Newton	5.3	1	2.979812733220	3.979812733220
		2	1.435560906720	2.435560906720
		3	0.411747655040	1.411747655040
		4	-0.258193724074	0.741806275926
		5	-0.677898622797	0.322101377203
		6	-0.906465933085	0.093534066915
		7	-0.988963684033	0.011036315967
		8	-0.999821250451	0.000178749549
		9	-0.999999952091	0.000000047909
		10	-1.000000000000	0
Metode Halley	5.3	1	1.821243311180	2.821243311180
		2	0.095491335870	1.095491335870
		3	-0.715909643376	0.284090356624
		4	-0.981597105102	0.018402894898
		5	-0.999991031247	0.000008968753
		6	-1.000000000000	0
Modifikasi Metode Householder	5.3	1	-0.233619179280	0.766380820720
		2	-1.097311865690	0.097311865690
		3	-0.997390530197	0.002609469803
		4	-1.000000039720	0.000000039720
		5	-1.000000000000	0
Metode iterasi tanpa turunan tinggi	5.3	1	1.295576452030	2.295576452030
		2	-0.373356795620	0.626643204380
		3	-0.947090670380	0.052909329620
		4	-0.999985321861	0.000014678139
		5	-1.000000000000	0

Dari Tabel 1, didapatkan kesimpulan bahwa metode iterasi tanpa turunan tinggi dapat menemukan akar persamaan dengan benar dan lebih cepat daripada Metode Newton yang berorde konvergensi dua dan Metode Halley yang berorde konvergensi tiga. Sedangkan metode iterasi tanpa turunan tinggi mempunyai jumlah iterasi yang sama dengan Modifikasi Metode Householder yang berorde konvergensi sama yaitu empat.

Contoh lainnya, menggunakan beberapa persamaan non linier sebagai berikut:

$$f_1(x) = x^3 - 10$$
$$f_2(x) = ln\, ln\, (x^2 + x + 2)\ - x + 1$$
$$f_3(x) = e^x - 1 - cos\, (x)$$
$$f_4(x) = x^2 + sin\, sin\, \frac{x}{5} - \frac{1}{4}$$
$$f_5(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 2\, sin\, sin\, (x)\ - x^2 + 3$$

Tabel 2. Perbandingan jumlah iterasi dari beberapa metode

Fungsi $f(x)$	Tebakan Awal (x_0)	Jumlah Iterasi MN	MH	MMH	MTT	Akar Hampiran
	-0.5	11	7	4	4	
$f_1(x)$	1.0	8	4	4	3	2.154434690030
	4.5	7	4	4	3	
	-1.5	6	5	4	3	
$f_2(x)$	0.8	6	4	3	3	4.152590736760
	6.5	4	3	2	2	
	-0.2	8	4	4	3	
$f_3(x)$	1.1	6	3	3	2	0.601346767724
	2.9	7	4	4	3	
	0.2	5	3	3	2	
$f_4(x)$	1.7	6	4	3	3	0.409992017990
	3.6	8	4	3	3	
	-0.1	6	4	3	3	
$f_5(x)$	1.3	4	3	2	2	2.331967655880
	3.5	5	3	3	2	

Dari Tabel 2, didapatkan kesimpulan bahwa metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi (MTT) lebih cepat menemukan akar hampirannya dibandingan dengan Metode Newton (MN) yang berorde kekonvergenan dua dan Metode Halley (MH) yang berorde kekonvergenan tiga. Sedangkan metode iterasi tanpa turunan tinggi (MTT) memiliki jumlah iterasi yang sama dengan Modifikasi Metode Householder (MMH) yang berorde konvergensi sama yaitu empat. Namun, metode iterasi tanpa turunan tinggi (MTT) lebih efisien jika dibandingkan dengan Modifikasi Metode Householder (MMH) karena memiliki jumlah evaluasi fungsi yang lebih sedikit.

4. KESIMPULAN

Metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi didapat dari rumus aproksimasi pecahan kontinu Thiele deret ketiga. Untuk menghindari perhitungan turunan yang lebih tinggi digunakan perkiran turunan kedua dan ketiga dengan memanfaatkan aproksimasi deret Taylor. Metode iterasi ini memiliki orde kekonvergenan empat. Algoritma dari metode iterasi tanpa menghitung turunan yang lebih tinggi ditampilkan ke dalam bentuk diagram alir yang dapat dilihat pada Gambar 1.

REFERENSI

[1] Santoso, F. G. I. (2011). Analisis Perbandingan Metode Numerik Dalam Menyelesaikan Persamaan-Persamaan Serentak. Widya Warta, 35(1), 19–39.

[2] Munir, R. (2021). Metode Numerik Revisi Kelima. Bandung: Informatika Bandung.

[3] Khandani, H., & Khojasteh, F. (2021). A new method for estimating the real roots of real differentiable functions. 2, 1–13.

[4] Traub, J. (1964). Iterative Methods for the Solution of Equations. New York: Prentice-Hall.

[5] Khan, W. A., Noor, K. I., Bhatti, K., & Ansari, F. A. (2015). A new fourth order Newton-type method for solution of system of nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 724-730.

[6] Li, S. (2019). Fourth-order iterative method without calculating the higher derivatives for nonlinear equation. Journal of Algorithms and Computational Technology, 13.

[7] Ahmad, N., & Singh, V. P. (2016). Some New Three Step Iteration Methods for Solving Nonlinear Equation Using Steffensen's and Halley Method. British Journal of Mathematics and Computer Science, 1-9.

[8] Ogbereyivwe, O., Umar, S., & Izevbizua, O. (2023). Some High-Order Convergence Modifications of the Householder Method for Nonlinear Equations.

[9] Pahirya, M. M. (2020). Application of a Continuant to the Estimation of a Remainder Term of Thiele's Interpolation Continued Fraction . Journal of Mathematical Sciences, 687-700.

[10] Li, S., & Dong, Y. (2019). Viscovatov-Like Algorithm of Thiele-Newton's Blending Expansion of a bivariate function. Mathematics, 7(8), 1-15.

[11] Gunawan, H. (2016). Pengantar Analisis Real. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

[12] Argyros, I. K., & Magreñán, Á. A. (2015). On the convergence of an optimal fourth-order family of methods and its dynamics. Applied Mathematics and Computation, 252, 336-346.

[13] Susanto, W. E., & Syukron, A. (2020). *Logika & Algorilma untuk Pemula*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

[14] Zakaria, L., & Muharramah, U. (2023). *Metode Numerik (Solusi Masalah Dengan Matematika)*. Bandar Lampung: Anugrah Utama Raharja.

[15] Argyros, I. K., & Magreñán, Á. A. (2016). A study on the local convergence and the dynamics of Chebyshev–Halley–type methods free from second derivative. Numerical Algorithms, 71(1), 1-23.