

# Model Matematika Penyakit Busuk Buah Kakao dengan Pengaruh Pengendalian Fungisida Nabati Lengkuas

Yohanes Mangasitua Pangaribuan<sup>1</sup>, Rara Sandhy Winanda<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Prodi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

## Article Info

### Article history:

Received February 01, 2024

Revised February 23, 2024

Accepted June 20, 2024

### Keywords:

Mathematical model

Black pod disease

Galangal botanical fungicide

### Kata Kunci:

Model matematika

Penyakit busuk buah kakao

Fungisida nabati lengkuas

## ABSTRACT

Cocoa black pod disease is caused by the fungi *Phytophthora palmivora*. One way to prevent this disease is by using the galangal based botanical fungicide. This research aims to understand the dynamics of cocoa black pod disease spread in a cocoa plant population with the influence of galangal based botanical fungicide application. The acquired model identifies equilibrium points and conducts a local stability analysis around these points. The study also identifies critical points, represented by parameters that play a crucial role in stability changes within the given system. Analytical results are supported by numerical simulations, using parameter values obtained from relevant journals. According to the analysis, there exist two points of equilibrium: one representing the absence of disease, and the other representing the presence of endemic disease. The disease spread analysis is influenced by the parameter value  $D$ . If  $D < 1$ , the cocoa population remains free from disease spread, and conversely, if  $D > 1$ , the disease will spread in the population.

## ABSTRAK

Penyakit yang penyebab busuk pada buah kakao bisa dipicu oleh jamur *Phytophthora palmivora*. Salah satu cara untuk mencegah masalah ini yaitu dengan menggunakan fungisida nabati yang berasal dari lengkuas. Penelitian ini bertujuan untuk memahami dinamika perbanyakan penyakit busuk buah pada populasi pohon kakao dipengaruhi oleh pemberian fungisida nabati lengkuas. Dalam model yang dikembangkan, titik keseimbangan ditentukan dan dilakukan analisis stabilitas lokal di sekitar titik keseimbangan tersebut. Penelitian ini juga mengidentifikasi titik kritis berupa parameter yang berperan penting pada perubahan kestabilan dalam sistem yang diberikan. Analisis yang telah dilakukan juga diperkuat oleh data numerik dari simulasi numerik. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi ini berasal dari jurnal yang relevan. Dari hasil analisis tersebut, teridentifikasi adanya dua titik ekuilibrium, yakni titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Hasil analisis penyebaran penyakit dipengaruhi oleh nilai parameter  $D$ . Jika  $D < 1$  maka populasi kakao bebas dari penyebaran penyakit dan sebaliknya jika  $D > 1$  maka penyakit akan menyebar pada populasi.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



## Penulis pertama:

(Yohanes Mangasitua Pangaribuan)

Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, 25171

Email: [yohanesmangasitua12@gmail.com](mailto:yohanesmangasitua12@gmail.com)

Padang, Sumatera Barat

## 1. PENDAHULUAN

Kakao merupakan salah satu hasil perkebunan yang memiliki signifikansi ekonomi bagi Indonesia [1]. Tanaman kakao ini juga cukup terkenal karena buahnya yang diolah menjadi produk coklat yang populer di industri. Cokelat sendiri merupakan produk hasil olahan dari biji kakao. Pada tahun 2021-2022, ekspor kakao Indonesia mencapai 180.000 ton, angka ini lebih rendah dibandingkan dengan Kamerun dan Brasil yang masing-masing menghasilkan 280.000 ton dan 210.000 ton, sehingga menempatkan Indonesia sebagai pengekspor biji kakao terbesar ketujuh di dunia [2]. Tersedia beberapa tantangan dalam budidaya kakao di tingkat nasional, termasuk rendahnya produktivitas dan kualitas [3]. Salah satu alasan menurunnya produktivitas petani kakao adalah serangan penyakit Busuk Buah Kakao (BBK) yang dikarenakan oleh *Phytophthora palmivora* [4]. Penyakit ini bisa mengakibatkan penurunan hasil panen sebesar 10 hingga 30%, terutama di wilayah yang lembap selama musim hujan [5]. Penyakit Busuk Buah Kakao (BBK) yang diinduksi oleh *Phytophthora palmivora* menjadi permasalahan utama yang mengganggu sistem produksi kakao. [6]. Penyakit ini bisa menyebar melalui berbagai cara, termasuk bantuan dari hewan (seperti serangga pengganggu dan hewan yang merayap, tikus, dan kelelawar), serta melalui penggunaan peralatan pertanian dan media tanah yang terkontaminasi [7]. Kerugian paling besar terjadi ketika patogen menyerang buah muda yang berusia sekitar dua bulan sebelum panen [8]. Buah yang terinfeksi dan kulit buah yang telah membusuk dapat menjadi sumber penularan penyakit [9].

Salah satu cara untuk mencegah penyebaran penyakit busuk buah kakao adalah dengan menggunakan fungisida nabati [10]. Pilihan ini dipilih karena ramah lingkungan dan aman bagi kesehatan manusia. Salah satu tanaman yang potensial sebagai fungisida nabati adalah minyak lengkuas [11]. Lengkuas, sebuah jenis rempah-rempah, mengandung komponen bioaktif yang berperan sebagai zat anti jamur. [12]. Salah satu solusi yang bisa diterapkan adalah memanfaatkan potensi bahan aktif anti jamur yang terkandung dalam lengkuas untuk mengendalikan penyebaran penyakit yang disebabkan oleh jamur [13].

Model matematika dinamika penyakit tersebut dapat memberikan kerangka kerja untuk memahami penularan penyakit dan untuk mendapatkan intervensi dan tindakan pencegahan yang efektif. Dalam paper ini, akan dikembangkan dan dianalisis sistem persamaan diferensial yang menggambarkan transmisi busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian menggunakan fungisida nabati lengkuas. Model matematika berbentuk  $S, I, T$  yaitu,  $S_i$ ,  $i = 1, 2$  menyatakan masing-masingnya pohon kakao tanpa fungisida dan dengan fungisida,  $I$  menyatakan pohon infeksi, dan  $T$  menyatakan pohon terinfeksi yang diberi treatment penyemprotan fungisida.

## 2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar berupa studi literatur dimana modelnya diperoleh dari jurnal yang telah ada. Simulasi numerik menggunakan nilai parameter dari jurnal lain. Penelitian ini diawali dengan mengidentifikasi masalah penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas. Kemudian mengumpulkan teori-teori dengan relavan dengan masalah penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas. Lalu membuat asumsi, variabel dan parameter yang akan menolong dalam membentuk dan menganalisis model matematika penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas. Setelah itu membentuk model matematika penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas berdasarkan asumsi, variabel dan parameter yang telah ditentukan. Selanjutnya, akan dilakukan analisis dan kestabilan titik ekuilibrium dari model matematika penyebaran penyakit busuk buah kakao. Lalu dilakukan simulasi numerik unuk memverifikasi hasil dari analisis. Diakhiri dengan menginterpretasikan model matematika penyebaran penyakit busuk buah kakao.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1. Deskripsi Data

Berdasarkan langkah-langkah penelitian, langkah awal dalam pembentukan model yaitu mengidentifikasi masalah yang akan diselesaikan. Proses ini terdiri dari mengidentifikasi variabel, parameter, dan membentuk hubungan antara variabel dan parameter.

Variabel dalam pembentukan model matematika penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas yaitu:

$S_1$  merupakan jumlah pohon kakao tanpa fungisida

$S_2$  merupakan jumlah pohon kakao dengan fungisida

$I$  merupakan jumlah pohon terinfeksi

$T$  merupakan jumlah pohon terinfeksi yang diberi treatment penyemprotan fungisida

Parameter yang digunakan untuk pembentukan model matematika penyebaran penyakit busuk buah kakao akibat pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas yaitu:

$\beta$  merupakan tingkat kontak antara  $S_1$  dan  $I$

$\alpha$  merupakan hilangnya tingkat kekebalan

$k$  merupakan tingkat penyemprotan fungisida

$r$  merupakan tingkat penanaman/rekrutmen pohon baru

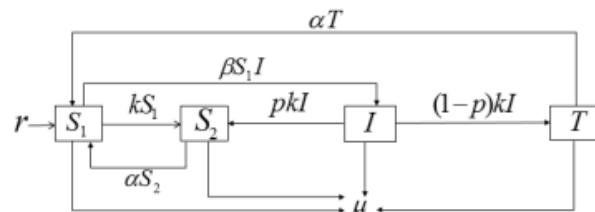
$\mu$  merupakan kematian alami pohon kakao

$p$  merupakan proporsi pohon yang terinfeksi yang pindah ke  $S_2$ .

Asumsi berikut ini akan digunakan dalam pembentukan model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas:

1. Pohon yang rentan di  $S_1$  menjadi terinfeksi ketika ada kontak antara pohon yang rentan di  $S_1$  dan pohon yang menular dengan laju kontak dinotasikan dengan  $\beta$ . Kontak dapat terjadi ketika ada perpindahan dari hewan pengerat dan serangga dari satu pohon terinfeksi ke pohon yang belum terinfeksi.
2. Pohon kakao diberikan perlakuan berupa penyemprotan fungisida nabati lengkuas secara teratur dengan laju penyemprotan sebesar  $k$ . Penyemprotan fungisida nabati lengkuas diberikan secara menyeluruh ke semua pohon baik yang sudah terinfeksi maupun rentan sebagai tindakan pencegahan maupun pengobatan. Dalam hal ini petani dapat mendeteksi infeksi pada tanaman kakao secara cepat dan menyingkirkan bagian yang rusak/terinfeksi.
3. Dengan penyemprotan yang diberikan, maka proporsi pohon yang sudah terinfeksi dapat masuk menjadi pohon rentan dengan kekebalan sementara dengan proporsi  $p$  atau dapat menjadi pohon yang sembuh dengan proporsi  $(1-p)$ .
4. Fungisida efektif untuk menghilangkan jamur *Phytophthora palmivora*, namun efektivitas fungisida dapat berkurang dengan laju  $\alpha$ .
5. Laju kematian alami pada populasi dilambangkan dengan  $\mu$ .

Berdasarkan variabel, parameter dan asumsi yang diberikan, maka dapat disusun model matematika penyakit busuk buah kakao akibat pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram model matematika model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas



Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa untuk model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas menggunakan model  $S_1, S_2, I, T$ . Dimana terdapat empat sub kompartement  $S_1, S_2, I, T$  yaitu,  $S_1$  menyatakan pohon kakao tanpa fungisida,  $S_2$  menyatakan pohon kakao dengan fungisida,  $I$  menyatakan pohon infeksi,  $T$  menyatakan pohon terinfeksi yang diberi treatment penyemprotan fungisida. Berikut sistem persamaan model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas :

$$\frac{dS_1}{dt} = r - \beta IS_1 + \alpha(S_2 + T) - (\mu + k)S_1 \quad (1)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = kS_1 + p k I - (\alpha + \mu)S_2 \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS_1 - (k + \mu)I \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} = (1 - p)kI - (\alpha + \mu)T. \quad (4)$$

$N$  menyatakan jumlah populasi. Dengan total populasi  $N = S_1 + S_2 + I + T$ . Selanjutnya akan dihitung nilai  $\frac{dN}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dT}{dt} \\ &= (r - \beta IS_1 + \alpha S_2 + \alpha T - \mu S_1 - k S_1) + (k S_1 + p k I - \alpha S_2 - \mu S_2) + (\beta IS_1 - p k I - (1 - p)k I - \mu I) + ((1 - p)k I - \alpha T - \mu T) \\ &= r - \mu N. \end{aligned}$$

Diperoleh  $\frac{dN}{dt} = r - \mu N$  (5)

Misalkan  $S_2 = N - S_1 - I - T$  disubstitusi ke sistem (1) – (5) sehingga sistem tersebut dapat direduksi menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= r - \beta IS_1 + \alpha(S_2 + T) - (\mu + k)S_1 \\ &= r - \beta IS_1 + \alpha(N - S_1 - I - T + T) - (\mu + k)S_1 \\ &= r - \beta IS_1 + \alpha N - \alpha S_1 - \alpha I - \mu S_1 - k S_1 \\ &= r - \beta IS_1 + \alpha N - \alpha I - \alpha S_1 - \mu S_1 - k S_1 \\ &= r - \beta IS_1 + \alpha(N - I) - (\alpha + \mu + k)S_1 \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS_1 - (k + \mu)I$$

$$\frac{dT}{dt} = (1 - p)kI - (\alpha + \mu)T$$

$$\frac{dN}{dt} = r - \mu N.$$

Jadi model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas yang akan dianalisis yaitu

$$\frac{dS_1}{dt} = r - \beta IS_1 + \alpha(N - I) - (\alpha + \mu + k)S_1 \quad (6)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS_1 - (k + \mu)I \quad (7)$$

$$\frac{dT}{dt} = (1 - p)kI - (\alpha + \mu)T \quad (8)$$

$$\frac{dN}{dt} = r - \mu N. \quad (9)$$

### 3.2 Analisis Model Matematika

Pada analisis model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas akan dilakukan analisis dan kestabilan titik ekuilibrium serta simulasi numerik.

### 3.2.1 Titik Ekilibrium dari Model Matematika Penyakit Busuk Buah Kakao

Titik ekulibrium dari model diperoleh pada saat  $\frac{dS_1}{dt}=0$ ,  $\frac{dI}{dt}=0$ ,  $\frac{dT}{dt}=0$ ,  $\frac{dN}{dt}=0$  sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\frac{dS_1}{dt} = r - \beta IS_1 + \alpha(N - I) - (\alpha + \mu + k)S_1 = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS_1 - (k + \mu)I = 0 \quad (11)$$

$$\frac{dT}{dt} = (1 - p)kI - (\alpha + \mu)T = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dN}{dt} = r - \mu N = 0 \quad (13)$$

Sistem persamaan diferensial memiliki 2 titik ekuilibrium diantaranya titik ekuilibrium bebas ( $E_0$ ) dan titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ). Dari persamaan diatas akan dicari titik ekuilibrium  $E_0$  dan  $E_1$  dari model matematika penyebaran penyakit busuk buah.

#### 3.2.1.1 Titik Ekilibrium $E_0$ dari Model Matematika Penyakit Busuk Buah Kakao

Titik ekuilibrium  $E_0$  merupakan titik ekuilibrium bebas penyakit pada tanaman kakao. Jika titik  $E_0$  stabil berarti tidak terdapat penyebaran penyakit buah busuk kakao pada populasi kakao. Dengan melakukan substitusi nilai parameter dari model diperoleh titik ekuilibrium  $E_0=(S_1, I, T, N)$  sebagai berikut:

$$E_0 = \left( \frac{\mu r + \alpha r}{\mu \alpha + \mu^2 + \mu k}, 0, 0, \frac{r}{\mu} \right)$$

Pada titik ekuilibrium  $E_0$  karna nilai populasi yang terinfeksi  $I=0$  maka ini dikatakan sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit. Eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit memiliki syarat eksistensi yaitu setiap nilai titik ekuilibrium bebas penyakit adalah real dan non negatif.

#### 3.2.1.2 Titik Ekilibrium $E_1$ dari Model Matematika Penyakit Busuk Buah Kakao

Titik ekuilibrium  $E_1$  merupakan titik ekuilibrium endemik pada tanaman kakao. Jika titik  $E_1$  stabil berarti terdapat penyebaran penyakit buah busuk kakao pada populasi kakao. Dengan melakukan substitusi nilai parameter dari model diperoleh titik ekuilibrium  $E_1=(S_1^*, I^*, T^*, N^*)$  sebagai berikut:

$$S_1^* = \frac{k + \mu}{\beta}$$

$$I^* = \frac{\beta \mu r + \beta r \alpha - k \mu \alpha - \mu^2 \alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2 \mu}{\beta k \mu + \beta \mu^2 + \beta \mu \alpha}$$

$$T^* = \frac{(1-p)k\beta\mu r + (1-p)k\beta r \alpha - (1-p)k^2\mu\alpha - (1-p)k\mu - 2(1-p)k^2\mu^2 - (1-p)k\mu^3 - (1-p)k^3\mu^2\alpha}{\beta k \mu \alpha + \beta k \mu^2 + 2\beta \mu^2 \alpha + \beta \mu^3 + \beta \mu \alpha^2}$$

$$N^* = \frac{r}{\mu}$$

Dari titik ekuilibrium kedua  $E_1$  karna nilai populasi yang terinfeksi  $I = \frac{\beta \mu r + \beta r \alpha - k \mu \alpha - \mu^2 \alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2 \mu}{\beta k \mu + \beta \mu^2 + \beta \mu \alpha}$  maka ini dikatakan sebagai titik ekuilibrium endemik.

Eksistensi titik ekuilibrium  $E_1$  :

$$S_1^* = \frac{k + \mu}{\beta} \text{ eksis karena } \frac{k + \mu}{\beta} > 0$$

$$I^* = \frac{\beta \mu r + \beta r \alpha - k \mu \alpha - \mu^2 \alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2 \mu}{\beta k \mu + \beta \mu^2 + \beta \mu \alpha} \text{ eksis jika } I^* > 0$$

$$\Leftrightarrow \beta \mu r + \beta r \alpha > k \mu \alpha + \mu^2 \alpha + 2k\mu^2 + \mu^3 + k^2 \mu$$

$$\beta r (\mu + \alpha) > k (\mu \alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2 (\alpha + \mu)$$



$$\text{Misal } D = \frac{\beta r(\mu + \alpha)}{k(\mu\alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2(\alpha + \mu)} \quad (14)$$

Maka  $I > 0 \Leftrightarrow D > 1$

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{(1-p)k\beta\mu r + (1-p)k\beta r\alpha - (1-p)k^2\mu\alpha - (1-p)k\mu - 2(1-p)k^2\mu^2 - (1-p)k\mu^3 - (1-p)k^3\mu^2\alpha}{\beta k\mu\alpha + \beta k\mu^2 + 2\beta\mu^2\alpha + \beta\mu^3 + \beta\mu\alpha^2} \text{ eksis jika } T^* \geq 0 \\ \Leftrightarrow T^* &= \frac{(1-p)k(\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - \mu^2\alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2\mu)}{\beta k\mu\alpha + \beta k\mu^2 + 2\beta\mu^2\alpha + \beta\mu^3 + \beta\mu\alpha^2} \\ &= \frac{(1-p)k \left( \frac{\beta r(\mu + \alpha)}{k(\mu\alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2(\alpha + \mu)} \right)}{k\beta k\mu\alpha + \beta k\mu^2 + 2\beta\mu^2\alpha + \beta\mu^3 + \beta\mu\alpha^2} \\ &= \frac{(1-p)k(D)}{\beta k\mu\alpha + \beta k\mu^2 + 2\beta\mu^2\alpha + \beta\mu^3 + \beta\mu\alpha^2} \end{aligned}$$

Jadi  $T^* > 0 \Leftrightarrow 0 \leq p \leq 1$  karena  $p$  merupakan proporsi maka  $0 \leq p \leq 1$

$$N^* = \frac{r}{\mu} \text{ eksis karena } \frac{r}{\mu} > 0.$$

### 3.2.2 Kestabilan Model Matematika Penyakit Busuk Buah Kakao

Untuk menentukan kestabilan dari model ini dapat dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobi [14]. Diberikan persamaan dari (6),(7),(8) dan (9) Sehingga didapatkan matriks Jacobi seperti berikut:

$$J(E_i) = \begin{bmatrix} -\beta I - \alpha - \mu - k & -\beta S_1 - \alpha & 0 & \alpha \\ \beta I & \beta S_1 - k - \mu & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)k & -\alpha - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

#### 3.2.2.1 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ )

Matriks Jacobi dari titik ekuilibrium  $E_0$  yaitu

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\alpha - \mu - k & -\frac{\beta\mu r + \beta r\alpha + \mu\alpha^2 + \mu^2\alpha + k\mu\alpha}{\mu\alpha + \mu^2 + k\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - 2k\mu^2 - k^2\mu - \mu^2\alpha - \mu^3}{\mu\alpha + \mu^2 + k\mu} & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)k & -\alpha - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Dimisalkan nilai eigen dari matriks  $J(E_0)$  adalah  $\lambda$ , maka persamaan karakteristik diperoleh dari:  $|J(E_0) - \lambda I| = 0$  [15] sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -\alpha - \mu - k - \lambda & -\frac{\beta\mu r + \beta r\alpha + \mu\alpha^2 + \mu^2\alpha + k\mu\alpha}{\mu\alpha + \mu^2 + k\mu} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - 2k\mu^2 - k^2\mu - \mu^2\alpha - \mu^3}{\mu\alpha + \mu^2 + k\mu} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)k & -\alpha - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Berdasarkan persamaan diatas maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\alpha - \mu - k$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - 2k\mu^2 - k^2\mu - \mu^2\alpha - \mu^3}{\mu\alpha + \mu^2 + k\mu}$$

$$\lambda_2 < 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \beta\mu r + \beta r\alpha &< k\mu\alpha + 2k\mu^2 + k^2\mu + \mu^2\alpha + \mu^3 \\ \beta r(\mu + \alpha) &< k(\mu\alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2(\alpha + \mu) \end{aligned}$$

$$\frac{\beta r(\mu+\alpha)}{k(\mu\alpha+2\mu^2+k\mu)+\mu^2(\alpha+\mu)} < 1$$

Karena pada persamaan (14)

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow D < 1$$

$$\lambda_3 = -\alpha - \mu$$

$$\lambda_4 = -\mu$$

Analisis kestabilan lokal titik  $E_0$  diberikan oleh teorema 1

### Teorema 1

Diberikan titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem (6-9) yaitu  $E_0 = \left( \frac{\mu r + \alpha r}{\mu \alpha + \mu^2 + \mu k}, 0, 0, \frac{r}{\mu} \right)$

dan  $D = \frac{\beta r(\mu+\alpha)}{k(\mu\alpha+2\mu^2+k\mu)+\mu^2(\alpha+\mu)}$  jika  $D < 1$  maka  $E_0$  stabil asimtotik.

### 3.2.2.2 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik ( $E_1$ )

Matriks Jacobi dari titik ekuilibrium  $E_1$  yaitu:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta\mu r + \beta r\alpha + \mu\alpha^2 + \mu^2\alpha + k\mu\alpha}{k\mu + \mu^2 + \mu\alpha} & -k - \mu - \alpha & 0 & \alpha \\ \frac{\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - \mu^2\alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2\mu}{k\mu + \mu^2 + \mu\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)k & -\alpha - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Dimisalkan nilai eigen dari matriks  $J(E_1)$  adalah  $\lambda$ , maka persamaan karakteristik diperoleh dari:  $|J(E_1) - \lambda I| = 0$  [15] sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -\frac{\beta\mu r + \beta r\alpha + \mu\alpha^2 + \mu^2\alpha + k\mu\alpha}{k\mu + \mu^2 + \mu\alpha} - \lambda & -k - \mu - \alpha & 0 & \alpha \\ \frac{\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - \mu^2\alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2\mu}{k\mu + \mu^2 + \mu\alpha} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)k & -\alpha - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Berdasarkan persamaan diatas maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\alpha - \mu$$

$$\lambda_2 = -\frac{\beta\mu r + \beta r\alpha + \mu\alpha^2 + \mu^2\alpha + k\mu\alpha}{k\mu + \mu^2 + \mu\alpha}$$

$$\lambda_3 = -\mu$$

$$\lambda_4 = -\left( \frac{\beta\mu r + \beta r\alpha - k\mu\alpha - \mu^2\alpha - 2k\mu^2 - \mu^3 - k^2\mu}{k\mu + \mu^2 + \mu\alpha} \right) (-k - \mu - \alpha) (-\mu)$$

$$\lambda_4 < 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\mu r + \beta r\alpha > k\mu\alpha + 2k\mu^2 + k^2\mu + \mu^2\alpha + \mu^3$$

$$\beta r(\mu+\alpha) > k(\mu\alpha+2\mu^2+k\mu)+\mu^2(\alpha+\mu)$$

$$\frac{\beta r(\mu+\alpha)}{k(\mu\alpha+2\mu^2+k\mu)+\mu^2(\alpha+\mu)} > 1$$

Karena pada persamaan (14)

$$\lambda_4 < 0 \Leftrightarrow D > 1$$

Analisis kestabilan lokal titik  $E_1$  diberikan oleh teorema 2

$$D = \frac{\beta r(\mu+\alpha)}{k(\mu\alpha+2\mu^2+k\mu)+\mu^2(\alpha+\mu)} \quad \text{maka} \quad (15)$$

$$D = \frac{\beta r(\mu+\alpha)}{k(\mu\alpha+2\mu^2+k\mu)+\mu^2(\alpha+\mu)} \quad \text{maka}$$



**Teorema 2**

Diberikan titik ekuilibrium endemik dari sistem (6-9) yaitu  $(E_I = S_I^* I^* T^* N^*)$  dan  $D = \frac{\beta r (\mu + \alpha)}{k(\mu\alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2(\alpha + \mu)}$  jika  $D > 1$  maka  $E_I$  eksis dan selalu bersifat stabil asimtotik.

**3.2.3 Simulasi Model Matematika Penyakit Busuk Buah Kakao**

Simulasi numerik dilakukan untuk memberikan gambaran yang lebih jelas terhadap penyebaran penyakit busuk buah kakao ini. Simulasi numerik akan dilakukan dengan menggunakan software Maple.

**3.2.3.1 Simulasi Model Matematika untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ )**

Simulasi titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ ) dari penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh efek fungsida nabati lengkuas. Akan ditunjukkan simulasi numerik untuk keadaan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit busuk buah kakao. Nilai parameter yang digunakan diperoleh dari 9:

Tabel 1. Nilai Parameter untuk titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ )

Parameter	Nilai
$\beta$	0,7303
$\alpha$	1,8331
$k$	811,61
$r$	4.267
$\mu$	0,7919
$p$	0,2

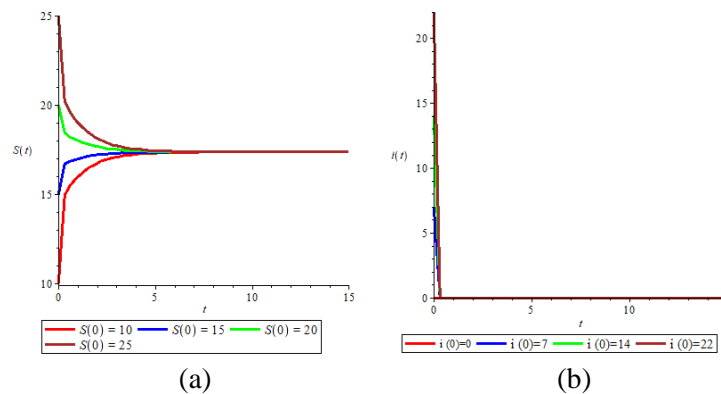
[9]

Dari parameter yang tercantum pada Tabel 1 terlebih dahulu dihitung nilai  $D$  yang diperoleh sebagai berikut:

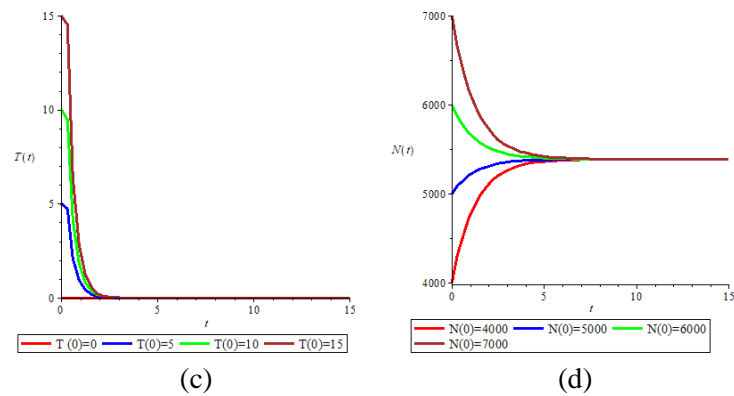
$$D = \frac{\beta r (\mu + \alpha)}{k(\mu\alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2(\alpha + \mu)} = 0,016$$

Sehingga diperoleh  $D < 1$ , berdasarkan teorema 1, kondisi ini menyebabkan  $E_0$  stabil asimtotik yang artinya penyakit tidak mewabah. Titik yang diperoleh jika parameter dari Tabel 1 disubsitusikan ke

$E_0 = \left( \frac{\mu r + \alpha r}{\mu\alpha + \mu^2 + \mu k}, 0, 0, \frac{r}{\mu} \right)$  adalah  $E_0 = (17,37; 0; 0; 5.388,31)$ . Diperoleh grafik sebagai berikut:

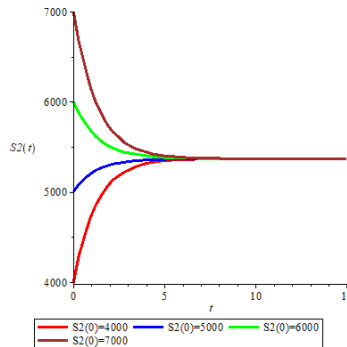






Gambar 2. Trayektori di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ )

Pada Gambar 2(a), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $S_1$  yaitu 17,37. Pada Gambar 2(b), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $I$  yaitu 0. Pada Gambar 2(c), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $T$  yaitu 0. Pada Gambar 2(d), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $N$  yaitu 5.388,31. Sedangkan untuk nilai  $S_2(t)$  dapat dihitung dengan  $S_2 = N - S_1 - I - T = 5.388,31 - 17,37 - 0 - 0 = 5.370,94$ . Diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 3. Trayektori  $S_2(t)$  di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ )

Pada Gambar 3, Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $S_2$  yaitu 5.370,94.

### 3.2.3.2 Simulasi Model Matematika untuk Titik Ekuilibrium Endemik ( $E_1$ )

Simulasi model matematika dengan titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ) dari penyebaran penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas. Nilai parameter yang digunakan diperoleh dari 9:

Tabel 2. Nilai parameter untuk titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ )

parameter	nilai
$\beta$	0,7303
$\alpha$	1,8331
$k$	8,1161
$r$	4.267
$\mu$	0,7919
$p$	0,2

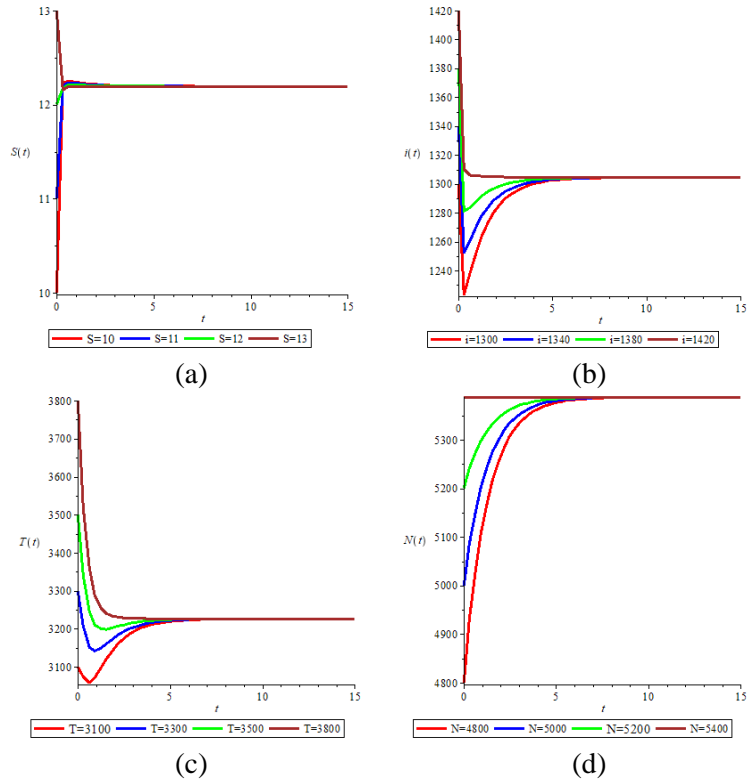
[9]

Dari parameter yang ada pada Tabel 2 terlebih dahulu dihitung nilai  $D$  yang diperoleh sebagai berikut:



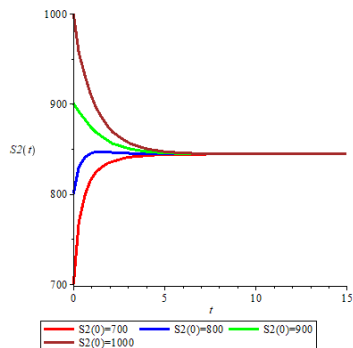
$$D = \frac{\beta r(\mu + \alpha)}{k(\mu\alpha + 2\mu^2 + k\mu) + \mu^2(\alpha + \mu)} = 107,96$$

Diperoleh  $D > 1$ , berdasarkan teorema 2, kondisi ini menyebabkan  $E_I$  stabil asimtotik yang artinya penyakit mewabah. Titik yang diperoleh jika parameter dari Tabel 2 disubsitusikan ke  $E_I = (S_I^* I^* T^* N^*)$  adalah  $E_I = (12,20; 1304,64; 3227,01; 5388,31)$ . Diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 4. Trayektori di sekitar titik ekuilibrium endemik ( $E_I$ )

Pada Gambar 4(a), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $S_I$  yaitu 12,20. Pada Gambar 4(b), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $I$  yaitu 1.304,64. Pada Gambar 4(c), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $T$  yaitu 3.227,01. Pada Gambar 4(d), Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $N$  yaitu 5.388,31. Sedangkan untuk nilai  $S_2(t)$  dapat dihitung dengan  $S_2 = N - S_I - I - T = 5.388,31 - 12,20 - 1.304,64 - 3.227,01 = 844,46$



Gambar 5. Trayektori  $S_2(t)$  di sekitar titik ekuilibrium endemik ( $E_0$ )

Pada Gambar 5, Terlihat bahwa diagram trayektori menuju ke nilai  $S_2$  yaitu 844,46.

### 3.3 Interpretasi Model Matematika

Model matematika untuk penyakit busuk buah kakao menghasilkan dua titik ekuilibrium, yakni titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ). Titik ekuilibrium bebas penyakit mengindikasikan populasi kakao yang tidak terinfeksi oleh jamur *Phytophthora palmivora*, sementara titik ekuilibrium endemik menggambarkan penyebaran penyakit busuk buah kakao dalam populasi kakao. Berdasarkan hasil analisis penyebaran penyakit dipengaruhi oleh nilai parameter  $D$ . Jika  $D < 1$  maka populasi kakao bebas dari penyebaran penyakit busuk buah kakao dan sebaliknya jika  $D > 1$  maka penyakit busuk buah kakao akan menyebar pada populasi kakao.

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian model matematika penyakit busuk buah kakao dengan pengaruh pengendalian fungisida nabati lengkuas berbentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_1}{dt} &= r - \beta IS_1 + \alpha(N - I) - (\alpha + \mu + k)S_1 \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS_1 - (k + \mu)I \\ \frac{dT}{dt} &= (1 - p)kI - (\alpha + \mu)T \\ \frac{dN}{dt} &= r - \mu N.\end{aligned}$$

Dari hasil analisis didapatkan dua titik ekuilibrium yaitu Titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ ) stabil asimtotik apabila  $D < 1$  dan titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ) selalu stabil asimtotik.

## REFERENSI

- [1] Acebo, Y. Guerrero. 2012. Management of black pod rot in cacao (*Theobroma cacao* L.): a review, *Fruits*, 67(1) pp.41–48.
- [2] Iskandar, H. 2019. Budidaya Kakao Di Poktan Sukatani Desa Sukanagara Kecamatan Gunung kencana. <http://cybex.pertanian.go.id/mobile/artikel/86437/>. (di Akses tanggal 26 Maret 2023)
- [3] Evans, H.C. (2007). Cacao diseases-the trilogy revisited. *Phytopathology*, 97, 1640-1643.
- [4] International Cocoa Organization. (2021-2022). Quarterly Bulletin of Cocoa Statistics, 35(2).
- [5] Purwantara, A. 1992. Perkembangan penyakit busuk buah dan kanker batang pada kakao akibat serangan *Phytophthora palmivora*. *Menara Perkebunan*, 60, 78-84
- [6] McMahon, P., dan Purwantara, A., 2004. *Phytophthora on cocoa*. In Drenth A. & D.I. Guest (Eds.). Diversity and management of *Phytophthora* in Southeast Asia (pp. 104–115). ACIAR Monograph No. 114.
- [7] Jackson, G.V.H., dan Wright, J.G. (2001). Black pod and canker of cocoa. Eating disorders [leaflet] Pest Advisory No. 7. Plant Protection Service, Secretariat of the Pacific Community.
- [8] Bowers, J.H., Bailey, B.A., Hebbard, P.K., Sanogo, S., and Lumsden, R.D, 2001, The impact of plant diseases on world chocolate production. *Plant Health Progress*, doi: 10.1094/PHP-2001-0709-01-RV.
- [9] Odura, B., Apenteng, O.O., dan Nkansah, H., (2020). Assessing the Effect of Fungicide Treatment on Cocoa Black Pod Disease in Ghana: Insight from Mathematical Modeling. *Stat., Optim. Inf. Comput.*
- [10] Haraguchi, H., Kuwata, Y., Inada, K., Shingu, K., Miyahara, K., Nagao, M., dan Yagi, A., 1996, Antifungal Activity from *Alpinia galanga* and the Competition for Incorporation of Unsaturated Fatty Acids in Cell Growth. *Planta Medica*. 62 (4): 308–313
- [11] Harni, R., Amaria, W., dan Supriadi., 2013, Keefektifan beberapa formula fungisida nabati eugenol dan sitronella terhadap *Phytophthora palmivora* Bult. kakao. *Buletin Riset Tanaman Rempah dan Aneka Tanaman Industri*, 4(1), 11-18.
- [12] Nurmansyah. 2010. Efektivitas minyak serai wangi dan fraksi sitronella terhadap pertumbuhan jamur *Phytophthora palmivora* penyebab penyakit busuk buah kakao. *Bul. Littro*, 21(1), 43-52.
- [13] Nakahara, K., Alzoreky, N.S., Yoshihashi, T., Nguyen, H.T.T., & Trakoontivakom, G. (2003). Chemical composition and antifungal activity of essential oil from *Cymbopogon nardus*. *JARQ*, 37(4), 249-252.
- [14] Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equation and Dynamical System*. 3<sup>rd</sup> edition, New york: Springer.
- [15] Ross, S. 1989. *Introduction to Ordinary Differential Equation*. John Wiley and SonsInc, New York.