Analisis Kestabilan Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal

Helena Fauziah[1], Rara Sandhy Winanda[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received February 01, 2024
Revised March 19, 2024
Accepted June 20, 2024

Keywords:

Stability analysis
Rumor spreading
Social media and verbal

Kata Kunci:

Analisis kestabilan
Penyebaran rumor
Media sosial dan verbal

ABSTRACT

Rumor, unverified information, propagate swiftly through word of mouth and social media. Rumor propagation can lead to negative impacts, such as public misinformation and causing unrest. This basic (theoritical) research uses a descriptive approach. This research will discuss a mathematical model of the dynamics of rumor spreading through social media and verbal with four compartments, namely I (ignorant), M (spreader through social media), G (spreader through verbal), and R (stifler). The results of this research indicate that the rumor-free equilibrium point is asymptotically stable, meaning that no rumor spreads in the population; the rumor-endemic equilibrium point through verbal is asymptotically stable, meaning that rumors spread but only through verbal in the population; and the rumor-endemic equilibrium point through media is asymptotically stable, meaning that rumors spread but only through media in the population.

ABSTRAK

Rumor adalah informasi yang menyebar tanpa diverifikasi melalui komunikasi verbal dan sosial media. Penyebaran rumor dapat menimbulkan dampak negatif, seperti pembodohan masyarakat dan menimbulkan keresahan. Penelitian dasar (teoritis) ini menggunakan pendekatan deskriptif. Penelitian ini akan bertujuan untuk menganalisis model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal dengan empat kompartemen yaitu I (*ignorant*), M (penyebar rumor melalui media sosial), G (penyebar rumor melalui verbal), dan R (*stifler*). Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium bebas rumor bersifat stabil asimtotik, artinya tidak ada penyebaran rumor dalam populasi; titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal bersifat stabil asimtotik, artinya rumor menyebar namun hanya terdapat penyebar rumor melalui verbal dalam populasi; dan titik ekuilibrium endemik rumor melalui media; artinya rumor menyebar namun hanya terdapat penyebar rumor melalui media dalam populasi.

(Helena Fauziah)
Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: helenafauziah12@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Penyebaran rumor adalah salah satu bentuk dari interaksi sosial yang memberikan pengaruh kuat di lingkungan masyarakat [1]. Rumor adalah informasi yang ingin diketahui masyarakat namun belum dapat dipastikan benar atau salahnya [2]. Menurut Donovan [3], rumor menyebar melalui percakapan antarpribadi, apakah itu diceritakan kepada orang lain atau dalam kelompok. Biasanya, rumor disebarkan dari mulut ke mulut (verbal) [4]. Namun dengan perkembangan jaringan sosial online, rumor beredar dengan lebih cepat dan luas melalui media sosial atau pun media informasi lainnya. Oleh karena itu, penyebaran rumor lebih sulit dikontrol [5].

Menyebarkan rumor dari mulut ke mulut atau melalui media sosial bisa menyebabkan dampak negatif [6]. Mereka yang tidak hati-hati bisa saja percaya dengan rumor yang tersebar dan akhirnya mengambil keputusan yang salah. Hal ini menyebabkan kerugian banyak pihak, seperti pembodohan masyarakat dan menimbulkan keresahan. Misalnya, pada tahun 2011 terjadi *panic buying* garam beryodium di China yang disebabkan oleh rumor bahwa garam beryodium bisa melindungi tubuh dari radiasi nuklir sebagai konsekuensi dari kerusakan pembangkit listrik tenaga nuklir karena gempa di Tohoku, Jepang. Tindakan ini tidak hanya merusak arus jual beli pasar namun juga berdampak negatif pada kehidupan sehari-hari masyarakat [7]. Oleh karena itu, penting untuk memahami proses dinamika penyebaran rumor dan mengembangkan langkah-langkah untuk mengurangi penyebaran rumor.

Rumor dapat menginfeksi pikiran dan penyebarannya menunjukkan kemiripan dengan penyebaran epidemi [8]. Epidemiologi mempelajari model matematis penyebaran suatu penyakit dengan empat kompartemen, yaitu individu rentan (*susceptible*), individu terinfeksi dan bisa menulari individu lain (*infected*), dan individu yang pulih (*recovered*) [9]. Daley [10] memperkenalkan model matematika penyebaran rumor yang mengelompokkan populasi menjadi tiga subpopulasi: subpopulasi individu yang tidak tau rumor (*ignorant*), subpopulasi individu penyebar rumor (*spreader*), dan subpopulasi individu yang berhenti menyebarkan rumor (*stifler*). Rumor disebarkan melalui interaksi langsung antara penyebar dan individu yang rentan dalam populasi, sehingga individu yang rentan dapat menjadi penyebar atau pun memutuskan untuk tidak menyebarkan rumor. Penelitian Sudbury [11] mempelajari mekanisme dinamis dari penyebaran informasi di jaringan sosial dan menunjukkan perilaku dinamis penyebaran rumor mirip dengan model SIR untuk penyebaran epidemi. Pada penelitian lainnya, yaitu Zanette [12] menerapkan teori jaringan kompleks untuk mempelajari penyebaran rumor. Zanette mengusulkan model (SIR) dengan mempertimbangkan jaringan topologi berdasarkan model penyebaran epidemi. Jia [13] juga mengajukan model penyebaran rumor dengan masa inkubasi dan perekrutan konstan dalam jaringan sosial, serta mempertimbangkan karakteristik sosial.

Penelitian ini menggunakan model IMGR penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal (dari mulut ke mulut) oleh Musa [14] sebagai model rujukan. Berdasarkan uraian di atas, dilakukan penelitian dengan judul “Analisis Kestabilan Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal” dengan model rujukan yaitu model yang digunakan oleh Musa.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah jenis penelitian dasar berupa studi literatur atau *library research* yaitu pencarian berbagai sumber seperti: jurnal, buku, dan referensi lain yang terkait dengan subjek penelitian. Langkah-langkah yang dilakukan adalah mengidentifikasi masalah, menentukan asumsi, menentukan variabel dan parameter, menentukan titik ekuilibrium, linearisasi untuk mencari matriks Jacobian, menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian, menganalisis kestabilan pada titik ekuilibrium, membuat simulasi numerik, menginterpretasi hasil, dan membuat kesimpulan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal

Membentuk model matematika dimulai dengan mengidentifikasi masalah penyebaran rumor dari berbagai literatur. Tahapan ini termasuk menentukan asumsi, variabel dan parameter model matematika.

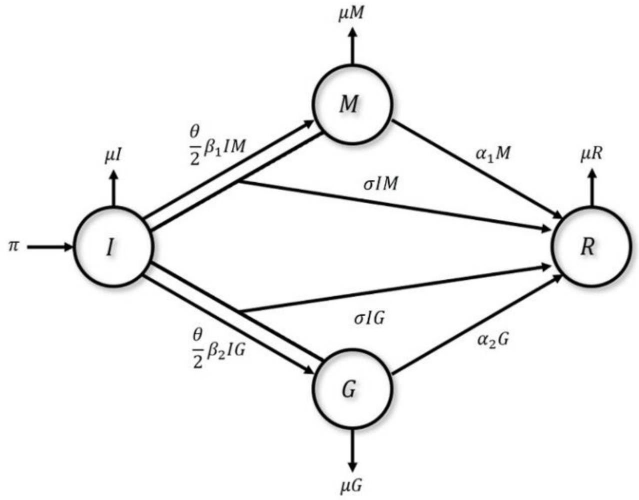
Variabel pada model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal adalah:
I : Individu yang tidak mengetahui rumor (*ignorant*).
M : Penyebar rumor melalui media sosial (*spreader through media*).
G : Penyebar rumor melalui verbal (*spreader through verbal*).
R : Individu yang tidak lagi menyebarkan rumor (*stifler*).

Asumsi yang digunakan untuk membentuk model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal:

a. Populasi dibagi menjadi empat kompartemen, yaitu I, M, G, dan R.
b. Rekrutmen dari luar populasi ke dalam subpopulasi *ignorant* adalah konstan.
c. Batasan umur dalam populasi adalah usia 15-40 tahun [15].
d. Tidak ada perpindahan individu antar kelas penyebar rumor (kelas penyebar rumor melalui media sosial dan kelas penyebar rumor melalui verbal).
e. Individu *ignorant* akan menjadi penyebar rumor setelah berinteraksi dengan penyebar rumor melalui media sosial atau penyebar rumor melalui verbal.
f. Peluang individu *ignorant* menjadi penyebar rumor melalui media sosial atau penyebar rumor melalui verbal adalah sama.
g. Proses penyebaran rumor adalah peristiwa yang saling terpisah, di mana penyebar rumor melalui media tidak akan menyebarkan rumor melalui verbal dan sebaliknya.
h. Proporsi *ignorant* berinteraksi dengan penyebar rumor melalui media sosial maupun verbal adalah sama yaitu sebesar σ dan menjadi *stifler*.
i. Terdapat laju kematian alami tiap kompartemen adalah sama yaitu sebesar μ.

Parameter dari model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal:
θ : Peluang *ignorant* menjadi *spreader*.
β_1 : Laju Interaksi antara *ignorant* dan penyebar rumor melalui media sosial.
β_2 : Laju interaksi antara *ignorant* dan penyebar rumor melalui verbal.
α_1 : Laju perpindahan penyebar rumor melalui media menjadi *stifler*.
α_2 : Laju perpindahan penyebar rumor melalui verbal menjadi *stifler*.
σ : Proporsi *ignorant* berinteraksi dengan penyebar rumor dan memilih untuk tidak menyebarkan rumor.
π : Laju rekrutmen ke dalam subpopulasi *ignorant*.
μ : Laju kematian.

Berdasarkan variabel, asumsi, dan parameter di atas, maka skematis model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan verbal

Berdasarkan Gambar 1, model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal yang terbentuk jika ditulis dalam sistem persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \pi - \mu I - \frac{\theta}{2}\beta_1 IM - \frac{\theta}{2}\beta_2 IG - (M+G)\sigma I \quad (1)$$
$$\frac{dM}{dt} = \frac{\theta}{2}\beta_1 IM - \mu M - \alpha_1 M \quad (2)$$
$$\frac{dG}{dt} = \frac{\theta}{2}\beta_2 IG - \mu G - \alpha_2 G \quad (3)$$
$$\frac{dR}{dt} = (M+G)\sigma I + \alpha_1 M + \alpha_2 G - \mu R \quad (4)$$

dengan $N = I + M + G + R$.

3.2. Titik Ekuilibrium Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal

3.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Rumor

Titik ekuilibrium bebas rumor adalah keadaan dimana tidak ada penyebar rumor dalam populasi ($M_0 = G_0 = 0$), keadaan ini dinamakan titik ekuilibrium bebas rumor. Dari analisis sistem persamaan diferensial (1) hingga (4), titik ekuilibrium bebas rumor diperoleh sebagai berikut:

$$E_0 = (I_0, M_0, G_0, R_0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0\right). \quad (5)$$

3.2.2. Titik Ekuilibrium Endemik Rumor

Titik ekuilibrium endemik rumor ditandai dengan adanya kelas terinfeksi ($M > 0$ atau $G > 0$), artinya selalu terdapat penyebar rumor dalam populasi. Diperoleh titik ekuilibrium endemik rumor E_1 dan E_2, sebagai berikut:

$$E_1 = (I_1, M_1, G_1, R_1)$$
$$= \left(\frac{2(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2}, 0, \frac{\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2(\mu+\alpha_2)+2\sigma(\mu+\alpha_2)}, \left(\frac{\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2(\mu+\alpha_2)+2\sigma(\mu+\alpha_2)}\right)\left(\frac{2\sigma(\mu+\alpha_2)+\alpha_2\theta\beta_2}{\mu\theta\beta_2}\right)\right) \quad (6)$$

Titik ekuilibrium E_1 merupakan titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal karena rumor menyebar namun hanya terdapat penyebar rumor melalui verbal dalam populasi ($G_1 > 0$) dan jumlah populasi penyebar rumor melalui media sosial adalah nol ($M_1 = 0$).

$$E_2 = (I_2, M_2, G_2, R_2)$$
$$= \left(\frac{2(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1}, \frac{\pi\theta\beta_1 - 2\mu(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1(\mu+\alpha_1)+2\sigma(\mu+\alpha_1)}, 0, \left(\frac{\pi\theta\beta_1 - 2\mu(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1(\mu+\alpha_1)+2\sigma(\mu+\alpha_1)}\right)\left(\frac{2\sigma(\mu+\alpha_1)+\alpha_1\theta\beta_1}{\mu\theta\beta_1}\right)\right) \quad (7)$$

Titik ekuilibrium E_2 merupakan titik ekuilibrium endemik rumor melalui media sosial karena rumor menyebar namun hanya terdapat penyebar rumor melalui media sosial dalam populasi ($M_2 > 0$) dan jumlah populasi penyebar rumor melalui verbal adalah nol ($G_2 = 0$).

3.3. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal

Analisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan dengan mencari nilai eigen matriks Jacobian pada sistem persamaan diferensial (1) hingga (4). Matriks Jacobian yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{\theta}{2}\beta_1 M - \frac{\theta}{2}\beta_2 G - (M+G)\sigma & -\frac{\theta}{2}\beta_1 I - \sigma I & -\frac{\theta}{2}\beta_2 I - \sigma I & 0 \\ \frac{\theta}{2}\beta_1 M & \frac{\theta}{2}\beta_1 I - \mu - \alpha_1 & 0 & 0 \\ \frac{\theta}{2}\beta_2 G & 0 & \frac{\theta}{2}\beta_2 I - \mu - \alpha_2 & 0 \\ (M+G)\sigma & \sigma I + \alpha_1 & \sigma I + \alpha_2 & -\mu \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -(a_1) & a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & a_7 & 0 \\ a_8 & a_9 & a_{10} & -a_{11} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Pandang $\det(\lambda I - J) = 0$,

$$\begin{vmatrix} \lambda + a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 \\ -a_4 & \lambda - a_5 & 0 & 0 \\ -a_6 & 0 & \lambda - a_7 & 0 \\ -a_8 & -a_9 & -a_{10} & \lambda + a_{11} \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks Jacobian adalah

$$(\lambda + a_{11})\big((\lambda + a_1)(\lambda - a_5)(\lambda - a_7) - a_3 a_6(\lambda - a_5) - a_2 a_4(\lambda - a_7)\big) = 0 \quad (11)$$

3.3.1. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Rumor

Pencarian kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubsitusikan $E_0 = (I_0, M_0, G_0, R_0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0\right)$ ke persamaan (11), diperoleh:

$$(\lambda + a_1)(\lambda - a_5)(\lambda - \mathrm{a}_7)(\lambda + a_{11}) = 0. \quad (12)$$

Berdasarkan persamaan (12) diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

i) $(\lambda + a_1) = 0$, $\lambda_1 = -\mu$ karena $\mu > 0$ maka $\lambda_1 < 0$.

ii) $(\lambda + a_{11}) = 0$, $\lambda_2 = -\mu$ karena $\mu > 0$ maka $\lambda_2 < 0$.

iii) $(\lambda - a_5) = 0$, $\lambda_3 = \frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu} - \mu - \alpha_1$.

Agar $\lambda_3 < 0$, maka

$$\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu} - \mu - \alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu} < \mu + \alpha_1 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} < 1.$$

iv) $(\lambda - a_7) = 0, \lambda_4 = \frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu} - \mu - \alpha_2.$

Agar $\lambda_4 < 0$, maka

$\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu} - \mu - \alpha_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu} < \mu + \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} < 1.$

Diberikan E_0 merupakan titik ekuilibrium bebas rumor dengan $E_0 = (I_0, M_0, G_0, R_0) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0,0,0\right)$. Jika memenuhi $\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} < 1$ dan $\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} < 1$, semua nilai eigen dari persamaan (12) akan bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif, sehingga titik ekuilibrium bebas rumor (E_0) adalah stabil asimtotik lokal.

3.3.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Rumor melalui Verbal (E_1)

Mencari kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubsitusikan $E_1 = (I_1, M_1, G_1, R_1) = \left(\frac{2(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2}, 0, \frac{\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2(\mu+\alpha_2)+2\sigma(\mu+\alpha_2)}, \left(\frac{\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2(\mu+\alpha_2)+2\sigma(\mu+\alpha_2)}\right)\left(\frac{2\sigma(\mu+\alpha_2)+\alpha_2\theta\beta_2}{\mu\theta\beta_2}\right)\right)$ ke persamaan (11), diperoleh:

$$(\lambda + a_{11})(\lambda - a_5)\left(\lambda^2 + (a_1 - a_7)\lambda - (a_3a_6 + a_1a_7)\right) = 0 \qquad (13)$$

Berdasarkan persamaan (13) diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

i) $(\lambda + a_{11}) = 0, \lambda_1 = -\mu$ karena $\mu > 0$ maka $\lambda_1 < 0$.

ii) $(\lambda - a_5) = 0, \lambda_2 = \frac{\theta}{2}\beta_1 I - \mu - \alpha_1.$

Agar $\lambda_2 < 0$, maka

$\frac{\theta}{2}\beta_1\left(\frac{2(\mu+\alpha_2)}{\theta\beta_2}\right) - \mu - \alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_1(\mu+\alpha_2)}{\beta_2} < \mu + \alpha_1 \Leftrightarrow \frac{\beta_1(\mu+\alpha_2)}{\beta_2(\mu+\alpha_1)} < 1.$

iii) $\left(\lambda^2 + (a_1 - a_7)\lambda - (a_3a_6 + a_1a_7)\right) = 0$

Sehingga diperoleh

$\lambda^2 + \left(\frac{\pi\theta\beta_2}{2(\mu+\alpha_2)}\right)\lambda + \left(\frac{\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)}{2}\right) = 0.$

Solusi dari persamaan kuadrat ini adalah

$\lambda_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

dengan $a = 1$, $b = \frac{\pi\theta\beta_2}{2(\mu+\alpha_2)}$, dan $c = \frac{\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)}{2}$. Sehingga diperoleh:

- $\lambda_3 = \frac{-(\pi\theta\beta_2) + \sqrt{(\pi\theta\beta_2)^2 - 8(\mu+\alpha_2)^2\left(\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)\right)}}{4(\mu+\alpha_2)}$

  agar $\lambda_3 < 0$, maka

  $-(\pi\theta\beta_2) + \sqrt{(\pi\theta\beta_2)^2 - 8(\mu+\alpha_2)^2\left(\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)\right)} < 0$

  $\Leftrightarrow 8(\mu+\alpha_2)^2\left(\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} > 1.$

- $\lambda_4 = \frac{-(\pi\theta\beta_2) - \sqrt{(\pi\theta\beta_2)^2 - 8(\mu+\alpha_2)^2\left(\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)\right)}}{4(\mu+\alpha_2)}$

  agar $\lambda_4 < 0$, maka

  $-\left((\pi\theta\beta_2) + \sqrt{(\pi\theta\beta_2)^2 - 8(\mu+\alpha_2)^2\left(\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)\right)}\right) < 0$

  $\Leftrightarrow 8(\mu+\alpha_2)^2\left(\pi\theta\beta_2 - 2\mu(\mu+\alpha_2)\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} > 1.$

Diberikan E_1 merupakan titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal. Jika memenuhi $\frac{\beta_1(\mu+\alpha_2)}{\beta_2(\mu+\alpha_1)} < 1$ dan $\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} > 1$, semua nilai eigen dari persamaan (13) akan bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif, sehingga titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal (E_1) adalah stabil asimtotik lokal.

3.3.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Rumor melalui Media Sosial (E_2)

Mencari kestabilan titik ekuilibrium dengan mensubsitusikan $E_2 = (I_2, M_2, G_2, R_2) = \left(\frac{2(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1}, \frac{\pi\theta\beta_1-2\mu(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1(\mu+\alpha_1)+2\sigma(\mu+\alpha_1)}, 0, \left(\frac{\pi\theta\beta_1-2\mu(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1(\mu+\alpha_1)+2\sigma(\mu+\alpha_1)}\right)\left(\frac{2\sigma(\mu+\alpha_1)+\alpha_1\theta\beta_1}{\mu\theta\beta_1}\right)\right)$ ke persamaan (11), diperoleh:

$$(\lambda + a_{11})(\lambda - a_7)(\lambda^2 + (a_1 - a_5)\lambda + a_2a_4 - a_1a_5) = 0 \quad (14)$$

Berdasarkan persamaan (14) diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

i) $(\lambda + a_{11}) = 0, \lambda_1 = -\mu$ karena $\mu > 0$ maka $\lambda_1 < 0$.

ii) $(\lambda - a_7) = 0, \lambda_2 = \frac{\theta}{2}\beta_2 I - \mu - \alpha_2$.
Agar $\lambda_2 < 0$, maka
$\frac{\theta}{2}\beta_2\left(\frac{2(\mu+\alpha_1)}{\theta\beta_1}\right) - \mu - \alpha_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_2(\mu+\alpha_1)}{\beta_1} < \mu + \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{\beta_2(\mu+\alpha_1)}{\beta_1(\mu+\alpha_2)} < 1.$

iii) $(\lambda^2 + (a_1 - a_5)\lambda + a_2a_4 - a_1a_5) = 0$
Sehingga diperoleh
$\lambda^2 + \left(\frac{\pi\theta\beta_1}{2(\mu+\alpha_1)}\right)\lambda + \left(\frac{\pi\theta\beta_1-2\mu(\mu+\alpha_1)}{2}\right).$
Solusi dari persamaan kuadrat ini adalah
$\lambda_{3,4} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
dengan $a = 1$, $b = \frac{\pi\theta 1}{2(\mu+\alpha_1)}$, dan $c = \frac{\pi\theta\beta_1-2\mu(\mu+\alpha_1)}{2}$. Sehingga diperoleh:

- $\lambda_3 = \frac{-(\pi\theta\beta_1)+\sqrt{(\pi\theta\beta_1)^2-8(\mu+\alpha_1)^2(\pi\theta\beta_1-2\mu(\mu+\alpha_1))}}{4(\mu+\alpha_1)}$
  agar $\lambda_3 < 0$, maka
  $-(\pi\theta\beta_1) + \sqrt{(\pi\theta\beta_1)^2 - 8(\mu + \alpha_1)^2(\pi\theta\beta_1 - 2\mu(\mu + \alpha_1))} < 0$
  $\Leftrightarrow 8(\mu + \alpha_1)^2(\pi\theta\beta_1 - 2\mu(\mu + \alpha_1)) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} > 1.$
- $\lambda_4 = \frac{-(\pi\theta\beta_1)-\sqrt{(\pi\theta\beta_1)^2-8(\mu+\alpha_1)^2(\pi\theta\beta_1-2\mu(\mu+\alpha_1))}}{4(\mu+\alpha_1)}$
  agar $\lambda_4 < 0$, maka
  $-\left((\pi\theta\beta_1) + \sqrt{(\pi\theta\beta_1)^2 - 8(\mu + \alpha_1)^2(\pi\theta\beta_1 - 2\mu(\mu + \alpha_1))}\right) < 0$
  $\Leftrightarrow 8(\mu + \alpha_1)^2(\pi\theta\beta_1 - 2\mu(\mu + \alpha_1)) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} > 1.$

Diberikan E_2 merupakan titik ekuilibrium endemik rumor melalui media. Jika memenuhi $\frac{\beta_2(\mu+\alpha_1)}{\beta_1(\mu+\alpha_2)} < 1$ dan $\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} > 1$, semua nilai eigen dari persamaan (14) akan bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif, sehingga titik ekuilibrium endemik rumor melalui media (E_2) adalah stabil asimtotik lokal.

3.4. Simulasi Numerik Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal

Matlab R2016b adalah software yang digunakan untuk melakukan simulasi numerik model. Asumsi awal total populasi adalah 1000, dengan jumlah populasi *ignorant* $I(0) = 998$, jumlah populasi penyebar rumor melalui media sosial $M(0) = 1$, jumlah populasi penyebar rumor melalui verbal $G(0) = 1$, dan jumlah populasi *stifler* $R(0) = 0$. Nilai parameter yang digunakan dengan memodifikasi dari [14] untuk simulasi numerik dalam keadaan bebas rumor terlihat dalam Tabel 1, untuk simulasi numerik dalam keadaan endemik rumor melalui verbal terlihat dalam Tabel 2, dan untuk simulasi numerik dalam keadaan endemik rumor melalui media sosial terlihat dalam Tabel 3.

3.4.1. Simulasi Numerik dalam Keadaan Bebas Rumor

Tabel 1. Nilai-Nilai Parameter untuk Simulasi Keadaan Bebas Rumor

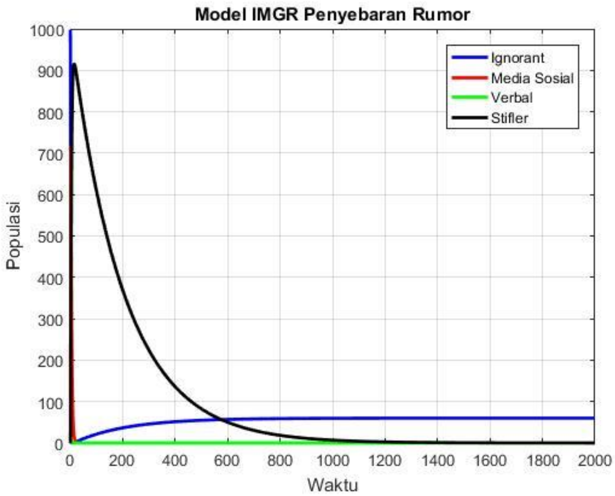
Parameter	Nilai
θ	0,02
β_1	0,5
β_2	0,3
α_1	0,3
α_2	0,72
σ	0,0001
π	0,3
μ	0,005

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh nilai dari syarat titik ekuilibrium bebas rumor bersifat stabil asimtotik:

i) $\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} = 0{,}9836 < 1$

ii) $\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} = 0{,}2483 < 1$

Digunakan interval waktu 0 sampai 2000 hari untuk simulasi pada Gambar 2 sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik Penyebaran Rumor dalam Keadaan Bebas Rumor

Berdasarkan Gambar 2 dan nilai-nilai parameter, ditunjukkan bahwa subpopulasi *ignorant* berada dalam keadaan stabil pada di nilai $I(t) = 60$. Sedangkan subpopulasi penyebar rumor melalui media sosial, penyebar rumor melalui verbal, dan stifler berada dalam keadaan stabil di nilai $M(t) = G(t) = R(t) = 0$. Ditunjukkan pada hal ini bahwa titik ekuilibrium bebas rumor stabil asimtotik, artinya tidak ada penyebar rumor dalam populasi seiring berjalannya waktu sehingga populasi bebas dari rumor.

3.4.2. Simulasi Numerik dalam Keadaan Endemik Rumor melalui Verbal

Tabel 2. Nilai-Nilai Parameter untuk Simulasi Keadaan Endemik Rumor melalui Verbal

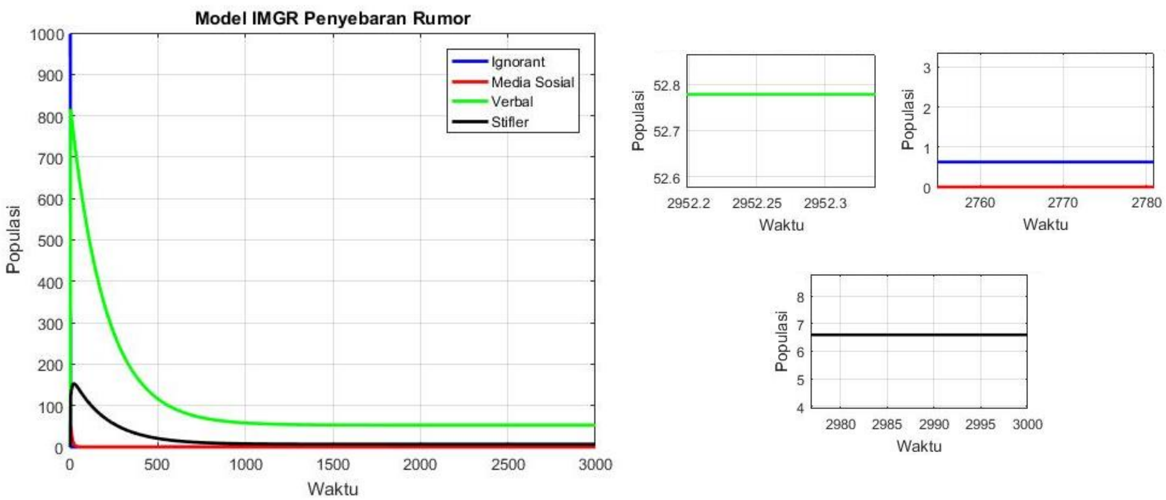
Parameter	Nilai
θ	0,02
β_1	0,5
β_2	0,8
α_1	0,1
α_2	0
σ	0,001
π	0,3
μ	0,005

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 2, diperoleh nilai dari syarat titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal bersifat stabil asimtotik:

i) $\frac{\beta_1(\mu+\alpha_2)}{\beta_2(\mu+\alpha_1)} = 0{,}02976 < 1$

ii) $\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} = 96 > 1$

Digunakan interval waktu 0 sampai 3000 hari untuk simulasi pada Gambar 3 sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik Penyebaran Rumor dalam Keadaan Endemik Rumor melalui Verbal

Berdasarkan Gambar 3 dan nilai-nilai parameter, ditunjukkan bahwa subpopulasi penyebar rumor melalui verbal berada dalam keadaan stabil di nilai $G(t) = 52{,}78$, kemudian subpopulasi lain berada dalam keadaan stabil di nilai $I(t) = 0{,}625$, $M(t) = 0$, dan $R(t) = 6{,}59$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal stabil asimtotik, artinya rumor terus menyebar dalam populasi seiring berjalannya waktu namun hanya terdapat penyebar rumor melalui verbal dalam populasi.

3.4.3. Simulasi Numerik dalam Keadaan Endemik Rumor melalui Media

Tabel 3. Nilai-Nilai Parameter untuk Simulasi Keadaan Endemik Rumor melalui Media

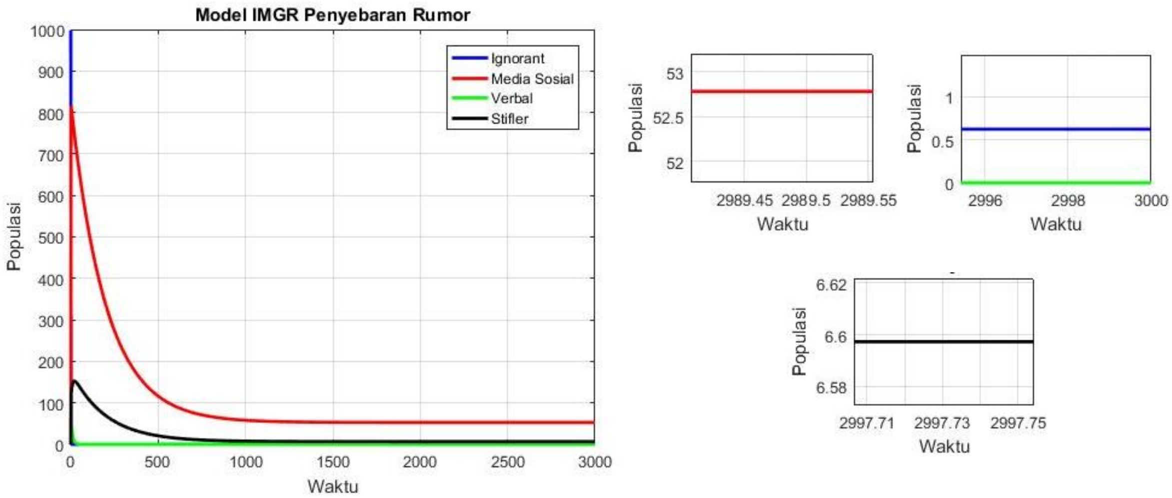
Parameter	Nilai
θ	0,02
β_1	0,8
β_2	0,5
α_1	0
α_2	0,1
σ	0,001
π	0,3
μ	0,005

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3, diperoleh nilai dari syarat titik ekuilibrium endemik rumor melalui media sosial bersifat stabil asimtotik:

i) $\frac{\beta_2(\mu+\alpha_1)}{\beta_1(\mu+\alpha_2)} = 0{,}02976 < 1$

ii) $\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} = 96 > 1$

Digunakan interval waktu 0 sampai 3000 hari untuk simulasi pada Gambar 4 sebagai berikut:



Gambar 4. Grafik Penyebaran Rumor dalam Keadaan Endemik Rumor melalui Media

Berdasarkan Gambar 4 dan nilai-nilai parameter, ditunjukkan bahwa subpopulasi penyebar rumor melalui media sosial berada dalam keadaan stabil di nilai $M(t) = 52{,}78$, kemudian subpopulasi lain berada dalam keadaan stabil di nilai $I(t) = 0{,}625$, $G(t) = 0$, dan $R(t) = 6{,}59$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik rumor melalui media sosial stabil asimtotik, artinya rumor terus menyebar dalam populasi seiring berjalannya waktu namun hanya terdapat penyebar rumor melalui media sosial dalam populasi.

3.5. Interpretasi Model Matematika Dinamika Penyebaran Rumor melalui Media Sosial dan Verbal

Diperoleh tiga titik ekuilibrium berdasarkan analisis yang telah dilakukan, yaitu titik ekuilibrium bebas rumor (E_0) bersifat stabil asimtotik artinya tidak ada penyebar rumor dalam suatu populasi seiring berjalannya waktu sehingga populasi bebas dari rumor, untuk titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal (E_1) bersifat stabil asimtotik artinya hanya terdapat penyebar rumor melalui verbal dan rumor tetap menyebar dalam populasi seiring berjalannya waktu, untuk titik ekuilibrium endemik rumor melalui media sosial (E_2) bersifat stabil asimtotik artinya hanya terdapat penyebar rumor melalui media sosial dan rumor tetap menyebar dalam populasi seiring berjalannya waktu. Jadi terdapat tiga kemungkinan penyebaran rumor dalam suatu populasi dengan kondisi hanya satu titik ekuilibrium yang eksis di populasi dalam suatu waktu (tidak ada koeksis titik ekuilibrium).

4. KESIMPULAN

Model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial dan verbal dibentuk dalam sistem persamaan diferensial. Diperoleh tiga titik ekuilibrium dari model matematika dinamika penyebaran rumor melalui media sosial yaitu, titik ekuilibrium bebas rumor, titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal, dan titik ekuilibrium endemik rumor melalui media sosial. Ditinjau dari analisis kestabilan titik ekuilibrium, diperoleh titik ekuilibrium bebas rumor akan bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat $\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} < 1$ dan $\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} < 1$, artinya tidak ada penyebaran rumor dalam populasi. Untuk titik ekuilibrium endemik rumor melalui verbal akan bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat $\frac{\beta_1(\mu+\alpha_2)}{\beta_2(\mu+\alpha_1)} < 1$ dan $\frac{\pi\theta\beta_2}{2\mu(\mu+\alpha_2)} > 1$, artinya rumor menyebar namun hanya terdapat penyebar rumor melalui verbal dalam populasi. Untuk titik ekuilibrium endemik melalui media sosial akan bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat $\frac{\beta_2(\mu+\alpha_1)}{\beta_1(\mu+\alpha_2)} < 1$ dan $\frac{\pi\theta\beta_1}{2\mu(\mu+\alpha_1)} > 1$, artinya rumor menyebar namun hanya terdapat penyebar rumor melalui media dalam populasi.

REFERENSI

[1] L. Zhao, X. Wang, J. Wang, X. Qiu, and W. Xie, "Rumor-Propagation Model with Consideration of Refutation Mechanism in Homogeneous Social Networks," *Discrete Dynamics in Nature and Society,* 2014.
[2] W. Ningsih, Sumardi, I. R. Riskiyah, and D. P. Arystianto, "Kendali Optimal Model Matematika Penyebaran Rumor pada Jaringan Sosial Daring dengan Pemberian Pernyataan Balasan," in *Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami,* vol. 3, no. 1, pp. 17-27, 2019.
[3] P. Donovan, "Rumors and Urban Legends," *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences,* pp. 788-794, 2015.
[4] Abdullahi, M. Auwal, Abbas, and U. Farouk, "Rumor Spreading Model: Vulnearability and Its Psychological Effect in Study of Salt and Water Ebola Virus Cure Rumor of August 2014 in Nigeria," in *Proceedings of 56th ISERD International Conference*, 2016.
[5] L. Zhao, J. Wang, Y. Chen, Q. Wang, J. Cheng, and H. Cui, "SIHR Rumor Spreading Model in Social Networks," *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications,* vol. 391, no. 7, pp. 2444-2453, 2012.
[6] L. Zhao, J. Wang, and R. Huang, "Immunization Against the Spread of Rumors in Homogeneous Networks," *Plos One,* vol. 10, no. 5, 2015.
[7] W. Kermack, and A. McKendrick, "A Contibutions to the Mathematical Theory Epidemics," in *Proceedings of the Royal Society of London,* vol. 115, no. 772, pp. 700-721, 2012.
[8] K. Wei, D. Wenwu, and W. Lin, "Research on Emergency Information Management based on the Social Networks Analysis – A Case Analysis of Panic Buying of Salt," in *International Conference on Management Science & Engineering,* vol. 18, pp. 1302-1310, 2011.
[9] M. Nekovee, Y. Moreno, G. Bianconi, and M. Marsili, "Theory of Rumour Spreading in Complex Social Networks," *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications,* vol. 374, no. 1, pp. 457-470, 2007.
[10] D. J. Daley, and D. G. Kendal, "Stochastic Rumours," *J. Inst. Maths Applies,* vol. 1, pp. 42-55, 1964.
[11] A. Sudbury, "The Proportion of Population Never Hearing a Rumor," *J. Appl. Prob.,* vol. 22, pp. 443-446, 1985.
[12] D. H. Zanette, "Dynamics of Rumor Propagation on Small-World Networks," *Physica Review E – Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics,* vol. 65, no. 4, pp. 9, 2002.
[13] J. Jia, and W. Wu, "A Rumor Transmission Model with Incubation in Social Networks," *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications,* vol. 491, pp. 453-462, 2018.
[14] S. Musa, and M. Fori, "Mathematical Model of the Dynamics of Rumor Propagation," *Journal of Applied Mathematics and Physics,* vol. 7, no. 6, pp. 1289-1303, 2019.
[15] V. N. O. Rusmarlina, "Analisis Kestabilan dan Penerapan Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Rumor melalui Liputan Media", *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, vol. 11, no. 01, pp. 35-48.