

Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal pada Model Matematika Radikalisasi

Siska Wahyuni¹, Dewi Murni²

^{1,2} Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received January 22, 2024

Revised February 06, 2024

Accepted March 20, 2024

Keywords:

Radicalization

SERTA Model

Stability Analysis

Optimal Control

Pontryagin Maximum Principle

Kata Kunci:

Radikalisasi

Model SERTA

Analisis Kestabilan

Kontrol Optimal

Prinsip Maksimum Pontryagin

ABSTRACT

Radicalization is a process of adopting extremist views that lead to violent acts. Efforts that can be made to eradicate extreme violence are prevention, disengagement and deradicalization. This study aims to determine the mathematical model of radicalization using the *susceptible, extremists, recruiters, treatment* and *Aware* model (SERTA), and to obtain stability analysis results and optimal control of the model. This is a fundamental or theoretical study. According to the model analysis, there are two equilibrium points namely the free and endemic equilibrium points. The stability analysis of the system resulted in a basic reproduction number of 0,012297 for the equilibrium point free and 1,339847 for endemic. The use of *Pontryagin's* maximum principle will produce optimal control value is obtained, namely:

$$u_1 = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S \right) \right\},$$

$$u_2 = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] \right) \right\},$$

$$u_3 = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T \right) \right\}.$$

Numerical simulations show that providing u_1 , u_2 and u_3 controls can minimize the number of extremist and recruiter populations and minimize the aware population.

ABSTRAK

Radikalisasi merupakan sebuah proses mengadopsi pandangan ekstrimis yang mengarah pada tindakan kekerasan. Upaya yang dapat dilakukan dalam pemberantasan kekerasan ekstrim yaitu *prevention, disengagement* dan *deradikalisasi*. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui model matematika radikalisasi menggunakan model *susceptible, extremists, recruiters, treatment* dan *Aware* (SERTA), serta untuk mendapatkan hasil analisis kestabilan dan kontrol optimal dari model. Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis. Berdasarkan analisis model terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas radikalisasi dan endemik. Analisis kestabilan sistem menghasilkan bilangan reproduksi dasar sebesar 0,012297 untuk titik kesetimbangan bebas radikalisasi dan 1,339847 untuk endemik. Penggunaan prinsip maksimum *pontryagin* akan menghasilkan nilai kontrol optimal yaitu:

$$u_1 = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S \right) \right\},$$

$$u_2 = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] \right) \right\},$$

$$u_3 = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T \right) \right\}.$$

Hasil simulasi numerik memperlihatkan bahwa pemberian kontrol u_1 , u_2 dan u_3 dapat meminimumkan jumlah populasi ekstrimis dan perekrut serta memaksimalkan populasi sadar.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Penulis pertama/ Corresponding Author:

(Siska Wahyuni)

Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: siskawahyuni1106@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Radikalisasi menurut *Department of Homeland Security (DHS)* Amerika Serikat merupakan sebuah proses mengadopsi pandangan ekstrimis, meliputi kerelaan untuk memanfaatkan, mendukung, atau memberikan sarana untuk kekerasan, sebagai metode untuk mempengaruhi perubahan sosial [1]. Penyebab radikalisasi biasanya dijelaskan melalui berbagai perspektif yang menekankan faktor psikologis, ekonomi dan lainnya [2]. Terdapat empat tahapan proses terjadinya radikalisasi di negara Barat yaitu *pre radicalization*, *self identification*, *indoctrination*, dan *jihadization* [3]. Menurut Kriyantono, jumlah aksi teror di Indonesia terjadi peningkatan mulai tahun 1996 sebanyak 65 kejadian, serta tertinggi tahun 2001 sebanyak 105 kasus. Setelah itu, kasus terorisme mulai menurun. Pada tahun 2018 terdapat 19 kasus sedangkan tahun 2019 menjadi 8 kasus. Artinya, aksi teror dapat diatasi oleh lembaga pemerintah seperti BNPT dan polisi/TNI, tetapi masih terdapat paham radikalisme bahkan meningkat [4]. Penghilangan akses atau *take down* telah dilakukan oleh kementerian komunikasi dan informatika pada 174 akun dan informasi diinternet yang diduga mengandung aktivitas indoktrinasi dan penyebaran paham radikalisme selama bulan Juli sampai Agustus 2023 [5].

Orang yang sudah terpapar paham radikalisme, yaitu ekstremis, akan lebih mudah melakukan aksi teror. Oleh karena itu, perlu dilakukan penguatan wawasan kebangsaan oleh setiap elemen pemerintah dan masyarakat dalam upaya mencegah terjadinya aksi teror. Terdapat dua jenis strategi melawan teroris yaitu pendekatan penegak hukum dimana pelaku kekerasan ekstrem diselidiki, diadili dan dipenjarakan serta pendekatan militer dengan pelaku kekerasan ekstrem dibunuh atau ditangkap di medan perang [6]. Bagaimanapun, strategi tersebut belum cukup untuk mencegah terjadinya aksi teror pada masyarakat. Oleh karena itu, Santoprete dan Xu tahun 2018 menambahkan tiga program pemberantasan kekerasan ekstrim yaitu pencegahan (*prevention*), pelepasan (*disengagement*) dan deradikalisasi [6]. Salah satu upaya mencegah penyebaran radikalisme dalam masyarakat di media sosial, dimana BNPT mengoptimalkan penggunaan strategi penyebaran kontra radikalisasi dengan memberikan informasi-informasi yang bersifat nasionalisme [7]. *Disengagement* didefinisikan sebagai pengurangan dan penghilangan komitmen kekerasan serta peralihan ke bentuk cara damai untuk memperjuangkan ideologi, meskipun pelaku tetap menganut ideologi jihad [8]. *Disengagement* terbagi menjadi dua yaitu *disengagement* secara psikologis dan *disengagement* secara fisik [9]. Deradikalisasi mengacu pada proses dimana seseorang menolak sikap atau keyakinan tertentu yang mendukung penggunaan kekerasan [10]. Deradikalisasi merupakan salah satu bagian strategi kontra terorisme [11]. Ada empat komponen yang termasuk dalam program deradikalisasi, di antaranya reedukasi, rahabilitasi, resosialisasi, dan reintegrasi [11].

Peran penting dari perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi juga dibutuhkan untuk menekan penyebaran radikalisasi dalam masyarakat. Salah satu ilmu yang dapat dimanfaatkan untuk membantu mengetahui penyebaran dan cara pencegahan radikalisasi adalah model matematika. Model matematika didefinisikan sebagai membangun matematika yang dirancang untuk menyelidiki suatu sistem atau fenomena dunia nyata dengan menyertakan bentuk grafik, simbol, simulasi dan eksperimen [12].

Penyebaran radikalisasi memiliki kesamaan dengan penyebaran penyakit, dimana penyebaran perilaku fanatik dapat diasosiasikan sebagai salah satu jenis proses kontak epidemiologis. Dalam penelitian C. Connell McCluskey & Manuele Santoprete pada tahun 2017, proses radikalisasi dalam penyebaran ideologi ekstrim dimodelkan menjadi tiga kompartemen, yaitu rentan, ekstremis, dan perekrut [13]. Pada tahun berikutnya, Santoprete dan Xu membangun model untuk proses deradikalisasi dengan menambahkan kompartemen perawatan [6]. Penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh Fari, Ambarwati dan Dwi tahun 2022 menjelaskan tentang model matematika deradikalisasi dengan empat kompartemen yaitu, (*S*) *susceptible*, (*E*) *extrimist*, (*R*) *recruiters* dan (*T*) *treatment* [14].

Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibentuk model matematika radikalisis yang merujuk pada penelitian Fari, Ambarwati dan Dwi dengan menambahkan kompartemen sadar. Selanjutnya akan diformulasikan model matematika radikalisis ke bentuk kontrol optimal dengan menambahkan tiga variabel kontrol yaitu pencegahan (*prevention*), pelepasan (*disengagement*) dan deradikalisis. Prinsip maksimum *pontryagin* digunakan untuk menentukan variabel kontrol yang optimal. Serta akan dilakukan simulasi untuk mendukung hasil analisis kestabilan dan efektivitas kontrol. Berdasarkan penjelasan di atas, dilaksanakan penelitian yang berjudul “**Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal pada Model Matematika Radikalisis**”.

2. METODE

Penelitian ini termasuk penelitian dasar atau teoritis. Metode yang digunakan yaitu metode deskriptif dengan berpedoman pada kajian kepustakaan dengan menjabarkan teori-teori yang berkaitan dengan masalah radikalisis, pemodelan matematika dan kontrol optimal. Berikut merupakan tahapan-tahapan dalam penelitian:

- a. Melaksanakan kajian *literature* terkait masalah radikalisis
- b. Mengkaji/ membuat model matematika radikalisis
- c. Melakukan analisis kestabilan pada model matematika radikalisis
- d. Menyelesaikan kontrol optimal menggunakan prinsip maksimum *pontryagin*
- e. Melakukan simulasi menggunakan Maple 18
- f. Membandingkan hasil simulasi pada model sebelum dan sesudah di kontrol
- g. Membuat kesimpulan

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pembentukan Model Matematika Radikalisis

Berdasarkan langkah-langkah dalam mengkonstruksi model matematika, hal yang lakukan pertama yaitu mengidentifikasi hal-hal yang berhubungan dengan permasalahan. Langkah ini dilaksanakan dengan penentuan faktor-faktor penting yang mencakup pengidentifikasian variabel, parameter, dan membuat hubungan antara variabel dan parameter tersebut.

Berikut asumsi-asumsi model matematika radikalisis:

- a. Dalam seluruh populasi terdapat subpopulasi yang berpotensi berisiko mengadopsi ideologi tersebut
- b. Individu yang baru lahir dan masuk kelompok populasi dikategorikan sebagai kelompok S (rentan)
- c. Individu yang berhasil ditreatment mempunyai dua kemungkinan yaitu, kembali menjadi ekstrimis atau sadar
- d. Individu yang sadar tidak akan kembali menjadi rentan karena mereka sudah mengetahui ideologi ekstrim
- e. Individu kelompok ekstrimis dan perekrut tidak akan mengalami deradikalisis tanpa melalui pelepasan diri atau pemisahan dari ideologi ekstrim yang diadopsi

Berikut variabel-variabel dalam analisis kestabilan dan kontrol optimal pada model matematika radikalisis yaitu sebagai berikut:

S (*Susceptible*) : Individu yang tidak mengadopsi ideologi ekstrim tetapi berisiko radikalisis

E (*Extrimists*) : Individu yang mengadopsi ideologi ekstrim dan terlibat dalam aksi teror

R (*Recruiter*) : Individu yang mungkin tidak terlibat langsung dalam kekerasan ekstrim, namun meradikalisis, merekrut, dan mengajak orang lain untuk melakukan hal tersebut

T (*Treatment*) : Ektrimis yang dipenjarakan atau dederadikalisis di pusat rehabilitasi

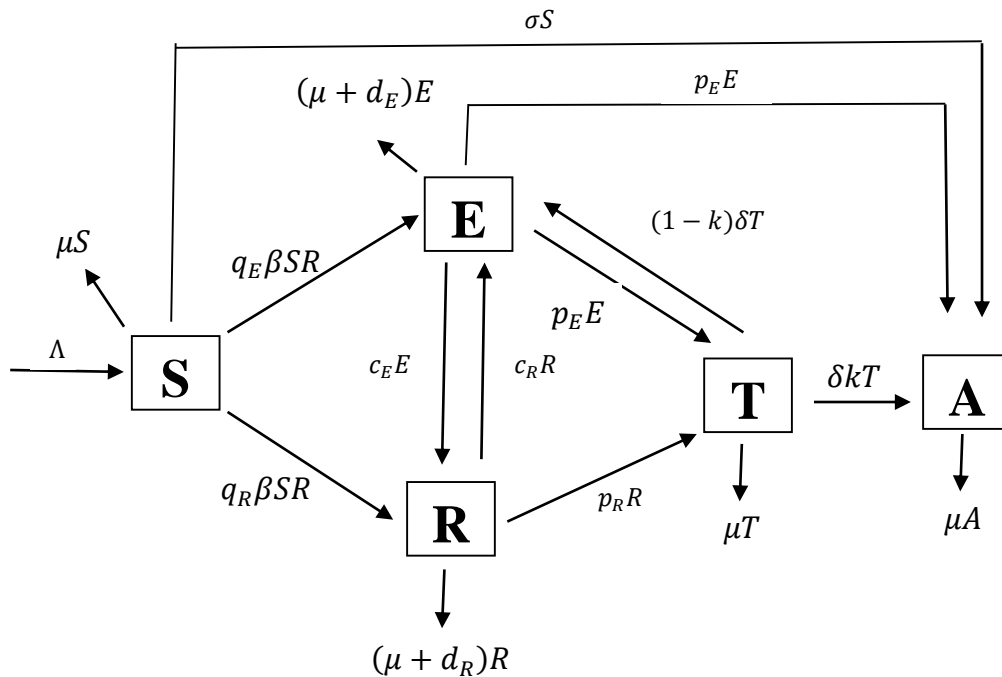
A (*Awareness*) : Kelompok individu yang terdiri dari individu yang berhasil deradikalisis dan individu yang sensitif serta menolak ideologi ekstrim

Parameter dalam analisis kestabilan dan kontrol optimal pada model matematika radikalisis yaitu sebagai berikut:

Λ : Laju kelahiran dalam populasi

- q_E : Proporsi perpindahan populasi rentan menjadi ekstrimis
 q_R : Proporsi perpindahan populasi rentan menjadi perekrut
 β : Laju individu populasi rentan mulai mengadopsi ideologi ekstrim
 c_R : Laju perpindahan individu populasi perekrut ke ekstrimis
 c_E : Laju perpindahan individu populasi ekstrimis ke perekrut
 d_R : Laju kematian perekrut karena terbunuh
 d_E : Laju kematian ekstrimis karena terbunuh
 μ : Laju kematian alami
 p_R : Laju individu meninggalkan perekrut
 p_E : Laju individu meninggalkan ekstrimis
 k : Proporsi keberhasilan program deradikalisasi
 δ : Laju individu meninggalkan *treatment*
 σ : Laju perpindahan individu rentan menjadi sadar

Berdasarkan asumsi, variabel, dan parameter dapat digambarkan diagram model matematika penyebaran radikalisis sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Model Matematika SERTA pada Radikalisis

Berdasarkan Gambar 1 didapatkan model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SR - (\mu + \sigma)S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = q_E \beta SR - (\mu + d_E + c_E + 2p_E)E + c_R R + (1 - k)\delta T \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = q_R \beta SR + c_E E - (\mu + d_R + c_R + p_R)R \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} = p_E E + p_R R - (\mu + \delta)T \quad (4)$$

$$\frac{dA}{dt} = \sigma S + \delta k T + p_E E - \mu A \quad (5)$$

Untuk mempermudah analisis, dilakukan pemisalan dimana:

$$b_E = \mu + d_E + c_E + 2p_E; b_R = \mu + d_R + c_R + p_R; b_T = \mu + \delta$$

dan diperoleh:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SR - (\mu + \sigma)S \quad (6)$$

$$\frac{dE}{dt} = q_E \beta SR - b_E E + c_R R + (1 - k)\delta T \quad (7)$$

$$\frac{dR}{dt} = q_R \beta SR + c_E E - b_R R \quad (8)$$

$$\frac{dT}{dt} = p_E E + p_R R - b_T T \quad (9)$$

$$\frac{dA}{dt} = \sigma S + \delta k T + p_E E - \mu A \quad (10)$$

3.2 Analisis Model Matematika Penyebaran Radikalisasi

3.2.1 Titik Keseimbangan Model Matematika Penyebaran Radikalisasi

Titik keseimbangan atau titik tetap diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$, $\frac{dT}{dt} = 0$ dan $\frac{dA}{dt} = 0$. Ketika titik keseimbangan dipenuhi maka laju pertumbuhan masing-masing persamaan akan tetap atau populasi tidak mengalami perubahan. Sehingga diperoleh persamaan (6), (7), (8), (9) dan (10) menjadi:

$$\Lambda - \beta SR - (\mu + \sigma)S = 0 \quad (11)$$

$$q_E \beta SR - b_E E + c_R R + (1 - k)\delta T = 0 \quad (12)$$

$$q_R \beta SR + c_E E - b_R R = 0 \quad (13)$$

$$p_E E + p_R R - b_T T = 0 \quad (14)$$

$$\sigma S + \delta k T + p_E E - \mu A = 0 \quad (15)$$

Berdasarkan persamaan diatas, maka didapatkan dua titik keseimbangan model matematika penyebaran radikalisasi yaitu:

- a. Titik keseimbangan bebas penyebaran radikalisasi $E_0 = (S, 0, 0, 0, A)$

Titik keseimbangan bebas penyebaran radikalisasi merupakan sebuah kondisi dimana tidak ada penyebaran radikalisasi dalam populasi sehingga diasumsikan $R = 0$. Sehingga titik keseimbangan bebas penyebaran radikalisasi yaitu: $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \sigma}, 0, 0, 0, \frac{\sigma \Lambda}{\mu(\mu + \sigma)}\right)$.

Bilangan reproduksi dasar adalah suatu ukuran yang digunakan untuk mengetahui apakah terjadi endemik atau tidak dalam suatu populasi. Penggunaan *matriks next generation (MNG)* pada sistem persamaan akan menghasilkan bilangan reproduksi dasar. Maka didapatkan bilangan reproduksi dasar dari model matematika radikalisasi yaitu:

$$R_0 = \frac{\beta \Lambda \left(q_R b_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} p_E q_R + c_E q_E \right)}{(\mu + \sigma) \left(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T} (c_E p_R + b_R p_E) \right)}$$

Jika $R_0 < 1$, maka terdapat satu titik keseimbangan yaitu E_0 . Jika $R_0 > 1$, maka terdapat dua titik keseimbangan yaitu E_0 dan E_1 [13].

- b. Titik keseimbangan endemik penyebaran radikalisasi $E_1 = (S^*, E^*, R^*, T^*, A^*)$

Titik keseimbangan endemik penyebaran radikalisasi adalah suatu keadaan dimana terdapat sejumlah individu yang terpengaruh penyebaran radikalisasi. Secara matematis dinyatakan dengan $S > 0, E > 0, R > 0, T > 0$ dan $A > 0$. Analisis awal ditunjukkan bahwa keseimbangan endemik dihasilkan dengan mengatur $E \neq 0, R \neq 0$, dan $T \neq 0$. Titik keseimbangan endemik ada saat $R_0 > 1$ [13]. Sehingga didapatkan titik keseimbangan endemik penyebaran radikalisasi yaitu $E_1 = (S^*, E^*, R^*, T^*, A^*)$ dimana

$$S^* = \frac{\Lambda}{(\mu + \sigma)R_0}$$

$$E^* = \frac{(\mu + \sigma)}{\beta c_E} \left(b_R - q_R \beta \frac{\Lambda}{(\mu + \sigma)R_0} \right) (R_0 - 1)$$

$$R^* = \frac{(\mu + \sigma)}{\beta} (R_0 - 1)$$

$$T^* = \frac{(\mu + \sigma)}{\beta b_T} \left(\frac{p_E}{c_E} \left(b_R - q_R \beta \frac{\Lambda}{(\mu + \sigma)R_0} \right) + p_R \right) (R_0 - 1)$$

$$A^* = \frac{\sigma \Lambda}{(\mu + \sigma)R_0} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\delta k}{b_T} + 1 \right) \left(\frac{p_E}{c_E} \left(b_R - q_R \beta \frac{\Lambda}{(\mu + \sigma)R_0} \right) \frac{(\mu + \sigma)}{\beta} (R_0 - 1) \right) + \frac{\delta k p_R (\mu + \sigma)}{\beta \mu b_T} (R_0 - 1)$$

3.2.2 Kestabilan Model Matematika Penyebaran Radikalisasi

Analisis kestabilan didapatkan pada nilai eigen dari matriks Jacobian. Matriks Jacobian pada persamaan (6), (7), (8), (9) dan (10) yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta R - (\mu + \sigma) & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ q_E \beta R & -b_E & q_E \beta S + c_R & (1-k)\delta & 0 \\ q_R \beta R & c_E & q_R \beta S - b_R & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -\mu \end{bmatrix}$$

a. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyebaran radikalisisasi

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan bebas radikalisisasi bergantung pada nilai eigen. Titik kesetimbangan stabil jika semua nilai eigen dari matriks jacobian bernilai negatif. Titik kesetimbangan bebas radikalisisasi yaitu: $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu+\sigma}, 0, 0, 0, \frac{\sigma\Lambda}{\mu(\mu+\sigma)}\right)$. Matriks Jacobian dari titik kesetimbangan $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu+\sigma}, 0, 0, 0, \frac{\sigma\Lambda}{\mu(\mu+\sigma)}\right)$ adalah sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(\mu + \sigma) & 0 & -\beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -b_E & q_E \beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma} + c_R & (1-k)\delta & 0 \\ 0 & c_E & q_R \beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma} - b_R & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -\mu \end{bmatrix}$$

Misal $P_1 = q_E \beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma} + c_R$ dan $P_2 = b_R - q_R \beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma}$, sehingga diperoleh:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(\mu + \sigma) & 0 & -\beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -b_E & P_1 & (1-k)\delta & 0 \\ 0 & c_E & -P_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -\mu \end{bmatrix}$$

Misalkan λ merupakan nilai eigen dari matriks Jacobi sehingga berlaku:

$\text{Det}(J(E_0) - \lambda I) = 0$ atau $|J(E_0) - \lambda I| = 0$, maka $|J(E_0) - \lambda I| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -(\mu + \sigma + \lambda) & 0 & -\beta \frac{\Lambda}{\mu+\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -(b_E + \lambda) & P_1 & (1-k)\delta & 0 \\ 0 & c_E & -P_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -(b_T + \lambda) & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -(\mu + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\mu + \sigma + \lambda)(\mu + \lambda)[\lambda^3 + (b_E + P_2 + b_T)\lambda^2 + (P_2 b_E + b_E b_T + P_2 b_T - P_1 c_E - (1-k)\delta p_E)\lambda + P_2 b_E b_T - P_1 c_E b_T - (1-k)\delta c_E p_R - (1-k)\delta p_E P_2] = 0$$

Dari persamaan diatas, bahwa $J(E_0)$ memiliki lima nilai eigen dengan dua diantaranya yaitu:

$$\lambda_1 = -(\mu + \sigma) < 0$$

$$\lambda_2 = -\mu < 0$$

tiga nilai eigen lainnya dapat dirumuskan pada suatu persamaan karakteristik dengan bentuk λ :

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

Menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*, didapatkan sebagai berikut:

$$a_0 = 1 > 0$$

$$a_1 = b_E + P_2 + b_T > 0$$

$$a_2 = P_2 b_E + b_E b_T + P_2 b_T - P_1 c_E - (1-k)\delta p_E > 0 \Leftrightarrow P_2 b_E + b_E b_T + P_2 b_T > P_1 c_E + (1-k)\delta p_E$$

$a_3 > 0$ akan dibuktikan dengan menggunakan kondisi R_0 .

Misalkan $R_0 < 1$, sehingga

$$\beta \Lambda \left(q_R b_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} p_E q_R + c_E q_E \right) < (\mu + \sigma) \left(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T} (c_E p_R + b_R p_E) \right)$$

$$P_2 b_E b_T - P_1 c_E b_T - (1-k)\delta c_E p_R - (1-k)\delta p_E P_2 > 0$$

sehingga diperoleh $a_3 > 0$.

Untuk analisis $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$, $b_1 > 0$ jika $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ dan $a_1 > 0$

$$a_1 a_2 > a_0 a_3 \Leftrightarrow (b_E + P_2 + b_T)(P_2 b_E + b_E b_T + P_2 b_T - P_1 c_E - (1-k)\delta p_E) > (P_2 b_E b_T - P_1 c_E b_T - (1-k)\delta c_E p_R - (1-k)\delta p_E P_2)$$

Untuk analisis c_1 , karena $a_3 > 0$ maka $c_1 > 0$.

Dari hasil analisis diatas, terbukti bahwa $a_1 > 0, a_3 > 0, b_1 > 0$, dan $c_1 > 0$. Jadi titik kesetimbangan bebas radikalasi stabil.

b. Kestabilan titik kesetimbangan endemik penyebaran radikalasi

Titik kesetimbangan endemik stabil jika semua nilai eigen dari matriks jacobian bernilai negatif.

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\beta R^* - (\mu + \sigma) & 0 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ q_E \beta R^* & -b_E & q_E \beta S^* + c_R & (1-k)\delta & 0 \\ q_R \beta R^* & c_E & q_R \beta S^* - b_R & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah analisis maka misalkan:

$n_1 = -\beta R^* - (\mu + \sigma), n_2 = q_E \beta R^*, n_3 = q_R \beta R^*, n_4 = -\beta S^*, n_5 = q_E \beta S^* + c_R, n_6 = q_R \beta S^* - b_R$
Sehingga diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_4 & 0 & 0 \\ n_2 & -b_E & n_5 & (1-k)\delta & 0 \\ n_3 & c_E & n_6 & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -b_T & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -\mu \end{bmatrix}$$

Misalkan λ merupakan nilai eigen dari matriks Jacobi sehingga berlaku $\text{Det}(J(E_1) - \lambda I) = 0$ atau $|J(E_1) - \lambda I| = 0$, sehingga

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} n_1 - \lambda & 0 & n_4 & 0 & 0 \\ n_2 & -(b_E + \lambda) & n_5 & (1-k)\delta & 0 \\ n_3 & c_E & n_6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & p_E & p_R & -(b_T + \lambda) & 0 \\ \sigma & p_E & 0 & \delta k & -(\mu + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Selanjutnya analisis kestabilan titik kesetimbangan endemi dicari menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Untuk melihat kestabilan titik kesetimbangan endemik radikalasi dilakukan dengan simulasi pada sub bagian 3.4.1.

3.3 Kontrol Optimal

Kontrol optimal model matematika radikalasi bertujuan untuk meminimalkan jumlah ekstrimis dan perekrut dengan diberikan tiga variabel kontrol yaitu $u_1(t), u_2(t)$, dan $u_3(t)$. Dimana variabel kontrol $u_1(t), u_2(t)$ dan $u_3(t)$ untuk efektivitas dari program *prevention, disengagement*, dan deradikalasi pada waktu t.

Permasalahan kontrol optimal model matematika radikalasi untuk meminimumkan fungsi tujuannya yaitu: $J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{t_f} [E(t) + R(t) + \frac{c_1}{2} u_1^2(t) + \frac{c_2}{2} u_2^2(t) + \frac{c_3}{2} u_3^2(t)] dt$

dengan $J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min \{J(u_1, u_2, u_3), u_1(t), u_2(t), u_3(t) \in U\}$

dimana $U = \{u_i(t): 0 \leq u_i(t) \leq 1, \forall t \in [0, t_f]\}, i = 1, 2, 3, c_i$ adalah faktor bobot (konstanta positif) yang menyesuaikan masing-masing kontrol.

Kemudian akan dicari nilai hamiltonian sebagai berikut:

$$\mathcal{H} = E(t) + R(t) + \frac{c_1}{2} u_1^2(t) + \frac{c_2}{2} u_2^2(t) + \frac{c_3}{2} u_3^2(t) + \lambda_1 \{\Lambda - \beta SR - (\mu + u_1)S\} + \lambda_2 \{q_E \beta SR - (\mu + d_E + c_E + 2u_2)E + c_R R + (1 - u_3)\delta T\} + \lambda_3 \{q_R \beta SR + c_E E - (\mu + d_R + c_R + u_2)R\} + \lambda_4 \{u_2(E + R) - (\mu + \delta)T\} + \lambda_5 \{u_3 \delta T - \mu A + u_2 E + u_1 S\}$$

Penurunan fungsi hamiltonian berfungsi untuk menentukan persamaan *state* dan *costate* yang optimal, berikut persamaan *state* yang dihasilkan:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} = \Lambda - \beta SR - (\mu + u_1)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} = q_E \beta SR - (\mu + d_E + c_E + 2u_2)E + c_R R + (1 - u_3)\delta T$$

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3} = q_R \beta S R + c_E E - (\mu + d_R + c_R + u_2) R \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_4} = u_2 (E + R) - (\mu + \delta) T \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_5} = u_3 \delta T - \mu A + u_2 E + u_1 S\end{aligned}$$

dengan kondisi awalnya yaitu $S(0) = S_0, E(0) = E_0, R(0) = R_0, T(0) = T_0, A(0) = A_0$. Kemudian diperoleh pula persamaan *costate* yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = \lambda_1 (\beta R + \mu + u_1) - \lambda_2 q_E \beta R - \lambda_3 q_R \beta R - \lambda_5 u_1 \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = -1 + \lambda_2 (\mu + d_E + c_E + 2u_2) - \lambda_3 c_E - \lambda_4 u_2 - \lambda_5 u_2 \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = -1 + \lambda_1 \beta S - \lambda_2 (q_E \beta S + c_R) - \lambda_3 (q_R \beta S - \mu - d_R - c_R - u_2) - \lambda_4 u_2 \\ \frac{d\lambda_4}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} = -\lambda_2 (1 - u_3) \delta + \lambda_4 (\mu + \delta) - \lambda_5 u_3 \delta \\ \frac{d\lambda_5}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A} = \lambda_5 \mu\end{aligned}$$

dimana kondisi awal $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = 0$.

Selanjutnya akan dicari kondisi stationer, untuk variabel kontrol u_1, u_2 dan u_3 yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0 & \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0 & \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_3} = 0 \\ u_1 = \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S & \quad u_2 = \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] & \quad u_3 = \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T\end{aligned}$$

Karena $0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1$ dan $0 \leq u_3 \leq 1$ sehingga dapat dinyatakan nilai kontrol optimal yaitu:

$$\begin{aligned}u_1 &= \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S \leq 0 \\ \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S & \text{jika } 0 \leq \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S \leq 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S \geq 1 \end{cases} \\ u_2 &= \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] \leq 0 \\ \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] & \text{jika } 0 \leq \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] \leq 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] \geq 1 \end{cases} \\ u_3 &= \begin{cases} 0 & \text{jika } \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T \leq 0 \\ \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T & \text{jika } 0 \leq \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T \leq 1 \\ 1 & \text{jika } \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Maka dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}u_1 &= \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_1} (\lambda_1 - \lambda_5) S \right) \right\} \\ u_2 &= \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_2} [(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5) E + (\lambda_3 - \lambda_4) R] \right) \right\} \\ u_3 &= \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_3} (\lambda_2 - \lambda_5) \delta T \right) \right\}\end{aligned}$$

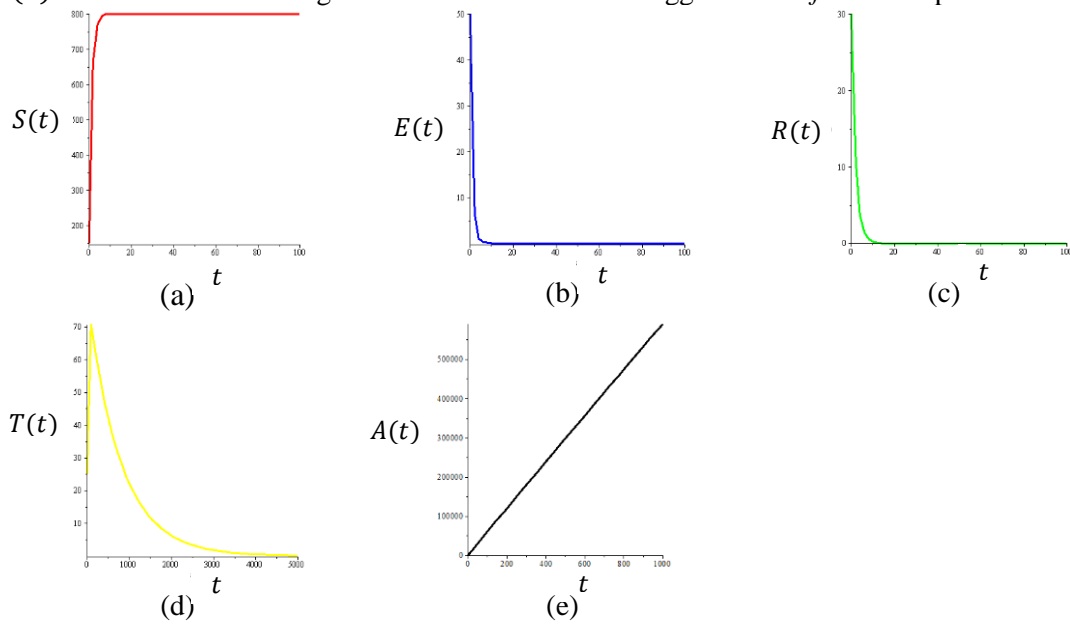
3.4 Simulasi Model Matematika Radikalisasi

Simulasi numerik dilakukan menggunakan *software* Maple 18 dan diberikan nilai pada masing-masing parameter.

3.4.1 Simulasi Kestabilan Titik Keseimbangan dari Model Matematika Radikalisasi

Nilai parameter diambil dari data-data sekunder yang didapatkan dari jurnal Manuele Santoprete & Xu [6], Fari dkk [14] dan Azizah dkk [15]. Nilai parameter yaitu: $\Lambda = 600, q_E = 0.86, q_R = 0.14, \beta = 0.000055, c_E = 0.0008, c_R = 0.0006, d_E = d_R = 0.0036, \mu = 0.000034247, k = 0.56, \delta = 0.0016$

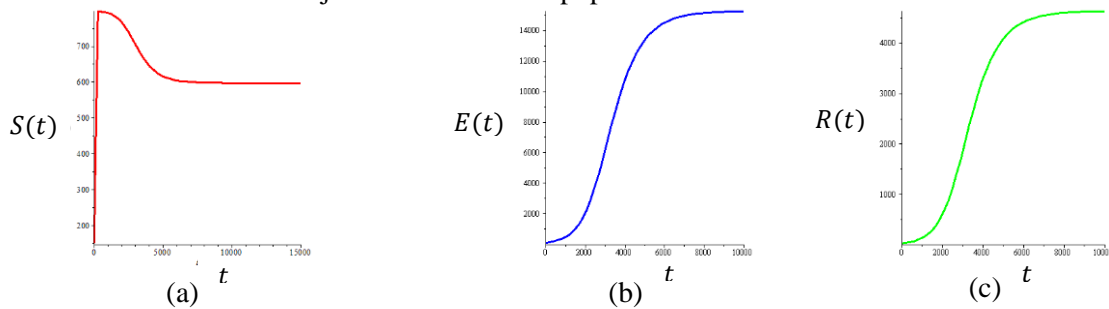
dan $\sigma = 0.75$. Diberikan nilai $p_E = p_R = 0.5$ (Fari dkk, 2022) ketika $R_0 < 1$ dan diberikan $p_E = p_R = 0.003$ ketika $R_0 > 1$. Kemudian diberikan nilai awal yaitu $S(0) = 150; E(0) = 50; R(0) = 30; T(0) = 25; A(0) = 15$. Berikut adalah grafik dari hasil simulasi menggunakan *software* Maple 18:

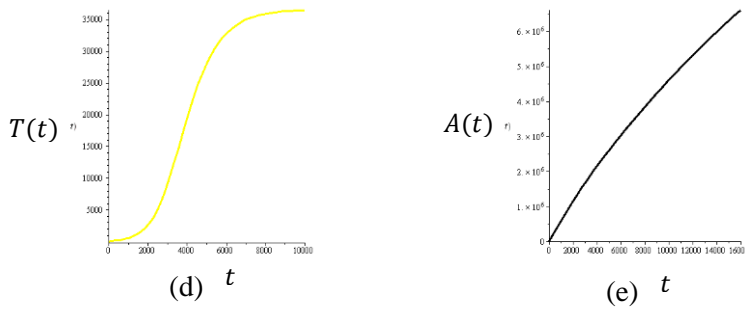


Gambar 2. Trayektori Titik Kesetimbangan pada Model Radikalisasi untuk $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 2 (a)-(e), didapatkan bahwa jumlah populasi individu rentan akan meningkat dan berjalan stabil seiring bertambahnya waktu. Jumlah individu kelompok ekstrimis dan perekrut akan berkurang dan mendekati nol seiring dengan bertambahnya waktu. Kelompok *treatment* awalnya mengalami peningkatan kemudian dalam jangka waktu yang sedikit dan akan berkurang jumlahnya sehingga mendekati nol. Kelompok sadar akan mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya waktu.

Gambar 2 (a)-(e) merupakan grafik yang menggambarkan model matematika radikalisasi dengan nilai $R_0 < 1$. Dengan mensubstitusikan nilai parameter akan dihasilkan bilangan reproduksi dasar yaitu $R_0 = 0.012297 < 1$. Selanjutnya, titik kesetimbangan yang diperoleh jika parameter di atas disubstitusikan adalah $E_0 = (799,0,0,0,17518982)$. Berdasarkan gambar 2 (a)-(e), menunjukkan bahwa grafik cenderung menuju titik kesetimbangan bebas radikalisasi E_0 saat $R_0 < 1$. Dengan demikian, sistem persamaan (1), (2), (3), (4) dan (5) adalah stabil di E_0 . Nilai $R_0 < 1$ dapat diartikan bahwa penyebaran radikalisasi tidak akan menjadi endemik dalam populasi.



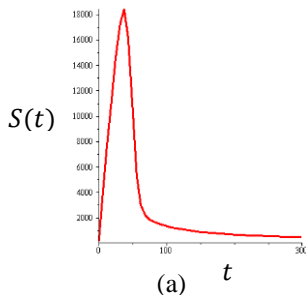


Gambar 3. Trayektori Titik Kesetimbangan pada Model Radikalisasi Untuk $R_0 > 1$

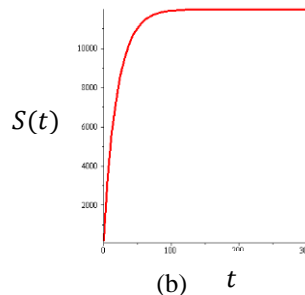
Berdasarkan Gambar 3 (a)-(e), didapatkan bahwa jumlah populasi individu rentan akan mengalami peningkatan antara waktu 0-1000 kemudian berkurang dan stabil mendekati titik kesetimbangan. Kelompok ekstrimis, perekrut dan *treatment* akan mengalami peningkatan dan stabil mendekati titik kesetimbangan model. Kelompok sadar akan mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya waktu. Gambar 3 (a)-(e) adalah grafik yang menggambarkan model matematika radikalisasi tanpa kontrol dengan nilai $R_0 > 1$. Dengan mensubstitusikan nilai parameter akan diperoleh bilangan reproduksi dasar yaitu $R_0 = 1.339847 > 1$. Selanjutnya, titik kesetimbangan yang diperoleh jika parameter di atas disubstitusikan adalah $E_1 = (597,15275,4634,36549,15369764)$. Berdasarkan gambar 3 (a)-(e), dapat disimpulkan bahwa kurva solusi cenderung menuju titik kesetimbangan endemik radikalisasi E_1 saat $R_0 > 1$. Dengan demikian, sistem persamaan (1), (2), (3), (4) dan (5) adalah stabil di E_1 . Titik kesetimbangan yang stabil ketika $R_0 > 1$ dapat diartikan bahwa penyebaran radikalisasi akan selalu ada dan menjadi endemik dalam populasi.

3.4.2 Simulasi Kontrol Optimal dari Penyebaran Radikalisasi

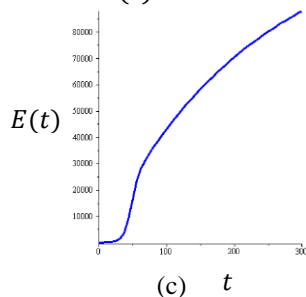
Pada penelitian ini, dilakukan simulasi untuk masing-masing keadaan dengan nilai awal yaitu $S(0) = 150; E(0) = 50; R(0) = 30; T(0) = 25; A(0) = 15$ dan dilakukan saat $t = 0$ sampai $t = 300$ hari. Untuk nilai parameter disamakan dengan nilai parameter pada simulasi titik kesetimbangan model. Simulasi terbagi menjadi dua cara. Pertama, simulasi untuk keadaan sebelum dikontrol dimana $u_i = 0$. Kedua, simulasi untuk kondisi sesudah dikontrol berupa *prevention, disengagement* dan deradikalisasi dimana $u_1 = 0.05; u_2 = 0.15$ dan $u_3 = 0.2$. Berikut merupakan hasil simulasi model matematika penyebaran radikalisasi sebelum dan sesudah dikontrol.



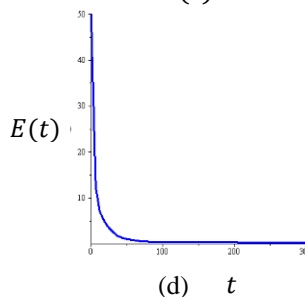
Grafik $S(t)$ sebelum dikontrol



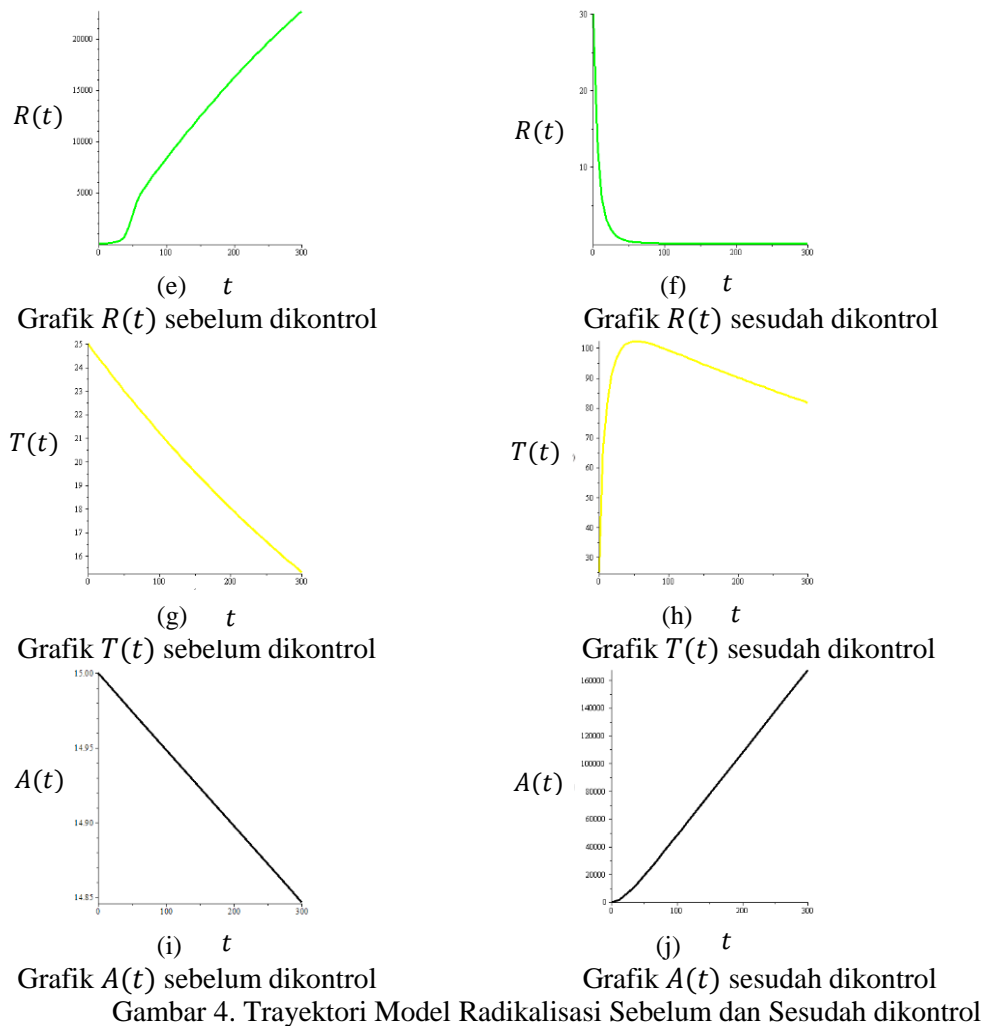
Grafik $S(t)$ sesudah dikontrol



Grafik $E(t)$ sebelum dikontrol



Grafik $E(t)$ sesudah dikontrol



Gambar 4 (a)-(b), jumlah individu rentan sebelum dikontrol mengalami peningkatan kemudian berkurang dalam rentang waktu kurang dari 100 hari, namun setelah dikontrol jumlah individu rentan mengalami peningkatan dan stabil. Gambar 4 (c)-(d), jumlah ekstrimis sebelum dikontrol mengalami peningkatan dalam rentang waktu kurang dari 100 hari, namun setelah dikontrol jumlah ekstrimis berkurang dan mendekati nol. Gambar 4 (e)-(f), jumlah perekrut sebelum dikontrol mengalami peningkatan dalam rentang waktu kurang dari 100 hari, namun setelah dikontrol jumlah perekrut berkurang dan mendekati nol. Gambar 4 (g)-(h), jumlah individu *treatment* sebelum dikontrol berkurang dan mendekati nol, namun setelah dikontrol jumlah individu *treatment* meningkat dan mulai berkurang dalam waktu kurang dari 100 hari. Gambar 4 (i)-(j), jumlah individu sadar sebelum dikontrol berkurang dan mendekati nol, namun setelah dikontrol jumlah individu sadar mengalami peningkatan seiring bertambahnya waktu.

Berdasarkan Gambar 4 (a)-(j), dapat dilihat bahwa keefektifan bentuk kontrol dengan upaya program *prevention*, *disengagement* dan deradikalisasi yang diberikan dapat meminimumkan jumlah populasi ekstrimis dan perekrut, serta dapat memaksimalkan jumlah populasi sadar. Selain itu dengan dilakukannya kontrol dapat menghemat waktu dan meminimumkan biaya dalam pemberian kontrol tersebut.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, didapatkan model matematika penyebaran radikalisisasi dengan kontrol optimal berbentuk sistem persamaan diferensial. Ada dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas radikalisisasi dan titik kesetimbangan endemik radikalisisasi. Titik kesetimbangan bebas radikalisisasi stabil saat $R_0 = 0,012297$ dan memenuhi beberapa syarat. Titik kesetimbangan endemik radikalisisasi stabil saat $R_0 = 1,339847$ dengan

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda\left(q_R b_E - \frac{(1-k)\delta}{b_T} p_E q_R + c_E q_E\right)}{(\mu+\sigma)\left(b_E b_R - c_E c_R - \frac{(1-k)\delta}{b_T} (c_E p_R + b_R p_E)\right)}$$

Untuk mengurangi jumlah ekstrimis dan perekrut serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan, diberikan intervensi berupa *prevention*, *disengagement* dan deradikalisisasi sebagai variabel kontrol. Penggunaan prinsip maksimum *pontryagin* dengan tiga variabel kontrol u_1, u_2 dan u_3 diperoleh suatu kondisi optimal yaitu:

$$\begin{aligned} u_1 &= \min\left\{1, \max\left(0, \frac{1}{c_1}(\lambda_1 - \lambda_5)S\right)\right\}, \\ u_2 &= \min\left\{1, \max\left(0, \frac{1}{c_2}[(2\lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_5)E + (\lambda_3 - \lambda_4)R]\right)\right\}, \\ u_3 &= \min\left\{1, \max\left(0, \frac{1}{c_3}(\lambda_2 - \lambda_5)\delta T\right)\right\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa penambahan kontrol pada masing-masing populasi dapat meminimumkan dan menekan populasi ekstrimis dan perekrut dalam penanganan masalah penyebaran radikalisisasi serta populasi sadar akan mengalami peningkatan seiring dengan waktu.

REFERENSI

- [1] Mustofa, I., dan Mahmudah, N. 2019. *Radikalisisasi & Deradikalisisasi Pemahaman Islam*. Yogyakarta: Idea Press Yogyakarta.
- [2] Hardy, K. 2018. Comparing Theories of Radicalisation With Countering Violent Extremism Policy, *Journal for Deradicalization*, Summer(15): 76-110.
- [3] Silber, M. D & Bhat, A. 2007. Radicalization in thr West: The Homegrown Threat. New York: NYPD.
- [4] Times Indonesia. 2019. Potensi Radikalisme Masih Ada di 2020. Dikutip dari <https://timesindonesia.co.id/kopi-times/244970/potensi-radikalisme-masih-ada-di-2020> (diakses 20 desember 2023).
- [5] KOMINFO. 2023. Ciptakan Pemilu 2024 Damai, Kominfo Putus Akses 174 Konten Indoktrinasi Radikalisme. Dikutip dari <https://www.kominfo.go.id/index.php/content/detail/51172/siaran-pers-no-258hmkominfo082023-tentang-ciptakan-pemilu-2024-damai-kominfo-putus-akses-174-konten-indoktrinasi-radikalisme/0/siaran-pers> (diakses 4 september 2023)
- [6] Santoprete, M., and Xu, F. 2018. Global Stability In A Mathematical Model of De-Radicalization, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.*, 509: 151-161.
- [7] Aisy, B. R., Ibrahim, D. O., Intang, K. K. H., & Tindage, M. A. 2019. Penegakan Kontra Radikalisisasi Melalui Media Sosial oleh Pemerintah dalam Menangkal Radikalisme, *Jurnal Hukum Magnum Opus*, 2(1), 1-8.
- [8] Hasan, Moh. et al. 2023. Pivoting Ayat Jihad Mantan Teroris Indonesia, *IJIMS*, 13(1): 1-33.
- [9] Horgan, John. 2008. Deradicalization or Disengagement? A Process in Need of Clarity and a Counterterrorism Initiative in Need of Evaluation. *Perspective on Terrorism a Journal of the Terrorism Reseach Initiative*, 2(4), 3-8.
- [10] Mastroe, C., dan Szmania, S. "Surveying CVE Metrics in Prevention, Disengagement and De-Radicalization Programs", Report to the Office of University Programs, Science and Technology Directorate, Department of Homeland Security. College Park, MD: START, 2016.
- [11] Indrawan, J., dan Prakoso, M., A. 2019. Efektivitas Program Deradikalisisasi Badan Nasional Penanggulangan Terorisme Terhadap Narapidana Terorisme di Indonesia, *Jurnal Pertahanan & Bela Negara*, 9(2), 1-20.
- [12] Giordano, F. R., Weir, M. D., dan Fox, W. P. 2003. *A First Course In Mathematical Modeling 3th edition*. China: China Machine Press.
- [13] Mccluskey, C. Connell & Santoprete, Manuele. 2017. A Bare-Bones Mathematical Model of Radicalization, *Journal of Dynamics and Games.*, 5(3): 243-264.
- [14] Fari, W. S., Ambarwati, L., & Dwi, E. W. 2022. Analisis Kestabilan pada Model Matematika Deradikalisisasi, *Jurnal Matematika dan Terapan*, 4(1), 19-31.
- [15] Azizah, N., Bakhtiar, T., dan Sianturi, P. 2023. Modeling and Control of the Extreme Ideology Transmission Dynamics in a Society, *Jambura Journal of Mathematics*, 5(1), 115-132.