

Model Matematika Rantai Makanan Mangsa-Pemangsa Tiga Spesies dengan Adanya Ketakutan pada Mangsa dan Predator Perantara

Nadila Arsyah¹, Muhammad Subhan²

^{1,2} Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received October 16, 2023
Revised October 26, 2023
Accepted June 20, 2024

Keywords:

Mathematical Modelling
Stability-Analysis
Predator-Prey Model

Kata Kunci:

Model Matematika
Analisis Stabilitas
model mangsa-pemangsa

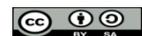
ABSTRACT

A three-species prey-predator interaction is an interaction involving three species, namely the prey species, the intermediate predator and the top predator. The presence of predators can cause fear in their prey. This research aims to determine the local stability analysis of the mathematical model of the prey-prey food chain for three species in the presence of fear of intermediate prey and predators. This research is also equipped with numerical simulations that show the effects of fear on prey and intermediate predators. Based on the analysis that has been carried out, four fixed points have been obtained with their respective stability. Numerical simulations of the model show that when there is no fear of intermediate prey and predators, the population of each species shows irregular oscillations, whereas in the presence of fear of intermediate prey and predators the population stabilizes towards a fixed point E_3 . However, if the level of fear is too high for prey or intermediate predators, it will cause the population of top predators to become extinct.

ABSTRAK

Interaksi mangsa-pemangsa tiga spesies merupakan interaksi yang melibatkan tiga spesies yaitu spesies mangsa, predator perantara dan predator puncak. Kehadiran dari predator dapat menimbulkan rasa takut bagi mangsanya. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui analisis kestabilan lokal dari model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara. Penelitian ini juga dilengkapi dengan simulasi numerik yang menunjukkan efek ketakutan pada mangsa dan predator perantara. Berdasarkan analisis yang telah dilakukan didapatkan empat titik tetap dengan masing-masing kestabilannya. Simulasi numerik dari model menunjukkan bahwa ketika tidak ada ketakutan pada mangsa dan predator perantara, populasi pada setiap spesies menunjukkan terjadinya osilasi yang tidak beraturan, sedangkan dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara membuat populasi menjadi stabil menuju titik tetap E_3 . Akan tetapi, apabila tingkat ketakutan yang terlalu tinggi pada mangsa atau pada predator perantara akan menyebabkan populasi predator puncak menuju kepunahan.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Penulis pertama

(Nadila Arsyah)

Program Studi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: nadilaarsyah86@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Interaksi mangsa-pemangsa menjadi topik yang penting dalam bidang ekologi[1]. Ekologi adalah studi komprehensif tentang makhluk hidup dan lingkungannya. Kajian tentang ekologi tidak lepas dari kajian ekosistem beserta komponennya. Komponen ekosistem terdiri dari unsur biotik seperti manusia, hewan, tumbuhan, dan mikroorganisme, serta unsur abiotik seperti air, tanah, cahaya, suhu, kelembaban, dan medan[2]. Ekologi juga berkaitan dengan organisasi organisme seperti komunitas, populasi dan ekosistem yang saling berinteraksi dan membentuk sistem yang terpadu[3]. Selain model mangsa-pemangsa, rantai makanan juga termasuk pembahasan penting dalam ekologi. Rantai makanan merupakan rangkaian proses perpindahan energi atau proses makan dan konsumsi antar organisme melalui rantai makanan[4].

Model mangsa-pemangsa tiga spesies merupakan bentuk interaksi yang melibatkan tiga spesies, yaitu spesies mangsa, predator perantara dan predator puncak[5]. Model mangsa-pemangsa tiga spesies dapat membantu memahami bagaimana perubahan dalam satu populasi mempengaruhi populasi lainnya, dan bagaimana populasi ini dapat hidup berdampingan atau punah[6]. Hubungan yang terjadi pada spesies yang terlibat adalah sebuah rantai makanan pada suatu ekosistem. Pada interaksi mangsa-pemangsa tiga spesies, penambahan spesies lain yaitu predator perantara dapat berakibat hilangnya spesies predator puncak dalam rantai makanan tiga spesies tersebut[7].

Interaksi rantai makanan mangsa-pemangsa antara tiga spesies dapat ditunjukkan oleh ekosistem sawah pada rantai makanan tikus, ular sawah, dan elang. Interaksi ini menunjukkan bahwa ketika populasi tikus meningkat, populasi ular sawah dan elang juga akan meningkat karena ular sawah memiliki lebih banyak sumber makanan untuk dikonsumsi, sehingga dengan peningkatan jumlah ular sawah maka jumlah populasi elang pun akan ikut meningkat. Namun, ketika populasi ular sawah terlalu banyak akan menyebabkan populasi tikus menurun karena banyak tikus yang dimangsa oleh ular sawah. Begitupun dengan populasi elang, hal ini dapat berdampak pada keseimbangan dari rantai makanan ekosistem sawah tersebut. Selain itu, penting untuk memahami interaksi makanan tiga spesies ini untuk menjaga keseimbangan ekosistem sawah secara keseluruhan.

Interaksi mangsa-pemangsa ini awalnya dikemukakan oleh Lotka dan Volterra pada tahun 1920-an[8]. Pada tahun 1991, Hastings dan Powell membuat perubahan pada model mangsa-pemangsa Lotka-Volterra dengan menambahkan spesies ketiga dan juga beberapa asumsi seperti pertumbuhan pada mangsa mengikuti laju pertumbuhan logistik serta menerapkan fungsi respons holling tipe II. Fungsi respons holling tipe II menggambarkan rata-rata kecepatan makan predator saat mencari mangsa[9]. Pada interaksi mangsa-pemangsa, adanya predator menimbulkan dampak langsung maupun tidak langsung terhadap populasi mangsa[10]. Dampak langsung, predator dapat membunuh dan memakan mangsanya[11]. Pada dampak yang tidak langsung predator akan memberikan rasa tidak aman terhadap mangsanya. Rasa tidak aman ini akan menimbulkan rasa takut bagi mangsa terhadap kehadiran predator, sehingga menyebabkan terjadinya perubahan pada perilaku mangsa[12].

Pada kasus invertebrata invasif *Bythotrephes Longimanus* pada populasi mangsa zooplankton di Danau Michigan dan Irie, data kedua sistem tersebut menunjukkan bahwa spesies mangsa menghuni kolom air yang lebih dalam seiring dengan peningkatan biomassa *Bythotrephes Longimanus* yang merupakan respon terhadap predasi. Hasilnya menunjukkan bahwa efek tidak langsung dapat memberikan pengaruh yang lebih besar dari efek langsung[13]. Wang dkk pertama kali mengusulkan model mangsa-pemangsa dengan mempertimbangkan faktor ketakutan pada mangsa dengan mengambil bentuk fungsi ketakutan yaitu $F(k, y) = 1/1 + ky$, dimana k merupakan parameter ketakutan mangsa terhadap predator[14].

Penelitian ini difokuskan pada model rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies pada model Hastings dan Powell[15]. Peneliti tertarik untuk mengkonstruksi ulang model rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan mengubah sedikit model yaitu menambahkan faktor ketakutan pada mangsa dan predator perantara.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian teoritis atau penelitian dasar. Peneliti menggunakan metode deskriptif untuk mencari sumber penelitian dengan menganalisis teori-teori yang berkaitan dengan masalah yang diteliti.



Pendekatan persamaan differensial digunakan untuk membuat model matematika dalam penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah:

1. Menentukan masalah yang akan diteliti, yaitu pengaruh ketakutan terhadap model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies.
2. Mencari informasi tentang masalah yang dibahas dalam penelitian ini melalui jurnal, buku, artikel, dan sumber lainnya.
3. Membangun model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara.
4. Melakukan analisis terhadap model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara.
5. Menginterpretasikan hasil analisis model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara.
6. Mengambil kesimpulan.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

3.1. Model Matematika Rantai Makanan Mangsa-Pemangsa Tiga Spesies dengan Adanya Ketakutan pada Mangsa dan Predator Perantara

Model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara dibentuk dengan melakukan sedikit perubahan pada model rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies oleh Hastings dan Powell pada tahun 1991 yaitu menambahkan faktor ketakutan pada mangsa dan predator perantara. Ketakutan adalah rasa tidak aman yang ditimbulkan akibat dari kehadiran predator yang dapat mempengaruhi perilaku mangsa dalam mencari makan [14]. Variabel dan parameter yang digunakan dalam model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara terdapat pada tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Detail variabel dan parameter

Simbol	Keterangan	satuan
X	Populasi Mangsa	Individu
Y	Populasi Predator Perantara	Individu
Z	Populasi Predator Puncak	Individu
R_0	Tingkat Pertumbuhan Intrinsik Populasi Mangsa	Per hari
K_0	Kapasitas Batas	Individu
A_1	Tingkat Pemangsaan Maksimum Predator Perantara Terhadap Mangsa	Per hari
A_2	Tingkat Pemangsaan Maksimum Predator Puncak Terhadap Predator Perantara	Per hari
B_1	Konstanta <i>Half Saturation</i> Predator Perantara	-
B_2	Konstanta <i>Half Saturation</i> Predator Puncak	-
C_1	Efisiensi Tingkat Pemangsaan Predator Perantara	-
C_2	Efisiensi Tingkat Pemangsaan Predator Puncak	-
D_1	Tingkat Kematian Alami Predator Perantara	Per hari
D_2	Tingkat Kematian Alami Predator Puncak	Per hari
K_1	Tingkat ketakutan Mangsa	-
K_2	Tingkat ketakutan Predator Perantara	-

Dengan asumsi sebagai berikut:

1. Model yang digunakan merupakan model interaksi dari tiga spesies. Dimana terdiri dari spesies mangsa, spesies predator perantara dan spesies predator puncak.

2. Interaksi yang terjadi antar spesies terjadi secara alami, artinya tidak ada campur tangan manusia dalam proses interaksinya.
3. Interaksi yang terjadi antar mangsa, predator perantara dan predator puncak mengikuti alur rantai makanan sehingga spesies predator puncak tidak dapat memakan mangsa.
4. Laju kelahiran predator perantara tergantung pada kesediaan makanannya, yaitu mangsa.
5. Laju kelahiran predator puncak tergantung pada kesediaan makanannya, yaitu predator perantara.
6. Populasi mangsa, predator perantara dan predator puncak bersifat tertutup, artinya tidak ada migrasi ke dalam ketiga populasi.
7. Pemangsa tidak mencari mangsa pengganti ketika mangsa utama tidak ada.
8. Laju pertumbuhan mangsa berkurang karena takut akan kehadiran dari predator perantara dan laju pertumbuhan predator perantara berkurang karena takut akan kehadiran dari predator puncak.

Berdasarkan asumsi di atas, maka bentuk model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= \frac{R_0}{1 + K_1 Y} X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1 A_1 X Y}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} &= \frac{A_1 X Y}{B_1 + X} \frac{1}{1 + K_2 Z} - \frac{A_2 Y Z}{B_2 + Y} - D_1 Y \\ \frac{dZ}{dT} &= \frac{C_2 A_2 Y Z}{B_2 + Y} - D_2 Z. \end{aligned} \quad (1)$$

Dimana, dX/dT , dY/dT , dan dZ/dT masing-masing menyatakan laju perubahan dari populasi mangsa, predator perantara dan predator puncak terhadap waktu. Untuk mempermudah dilakukannya analisis terhadap model, maka dilakukan nondimensionalisasi dengan memperkenalkan variabel penskalaan yaitu: $x = X/K_0$, $y = C_1 Y/K_0$, $z = C_2 Z/C_2 K_0$, dan $t = R_0 T$, maka bentuk model rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{1 + k_1 y} (1 - x) - \frac{a_1 x y}{1 + b_1 x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{a_1 x y}{1 + b_1 x} \frac{1}{1 + k_2 z} - \frac{a_2 y z}{1 + b_2 y} - d_1 y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{a_2 y z}{1 + b_2 y} - d_2 z. \end{aligned} \quad (2)$$

Dimana, $a_1 = A_1 K_0 / R_0 B_1$, $k_1 = K_1 K_0 / C_1$, $b_1 = K_0 / B_1$, $a_2 = A_2 C_2 K_0 / R_0 B_2 C_1$, $b_2 = K_0 / C_1 B_2$, $k_2 = K_2 C_2 K_0 / C_1$, $d_1 = D_1 / R_0$, $d_2 = D_2 / R_0$. Dengan nilai awal $x(0) \geq 0$, $y(0) \geq 0$, $z(0) \geq 0$.

3.2. Analisis Model Matematika Rantai Makanan Mangsa-Pemangsa Tiga Spesies dengan Adanya Ketakutan pada Mangsa dan Predator Perantara

Analisis model matematika dilakukan dengan cara menyelidiki kestabilan dari titik tetap model matematika tersebut. Titik tetap merupakan suatu solusi dari sistem yang tidak bergantung terhadap waktu [16]. Sehingga titik tetap sistem persamaan diperoleh pada saat $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$ dan $dz/dt = 0$.

Berdasarkan sistem (2) maka diperoleh empat titik tetap model yaitu $E_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) = (0, 0, 0)$, $E_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = (1, 0, 0)$, $E_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, 0)$, dimana $\bar{x}_2 = \frac{d_1}{a_1 - b_1 d_1}$, $\bar{y}_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_1 k_1 (1 - \bar{x}_2)(1 + b_1 \bar{x}_2)}}{2a_1 k_1}$ dan

$$\begin{aligned} E_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3) \quad \text{dimana} \quad \bar{x}_3 &= \frac{(b_1 - 1) + \sqrt{(1 - b_1)^2 - 4b_1(a_1 \bar{y}_3 + a_1 k_1 \bar{y}_3^2 - 1)}}{2b_1}, \quad \bar{y}_3 = \frac{d_2}{a_2 - b_2 d_2}, \quad \text{dan} \quad \bar{z}_3 = \\ &= \frac{-\left(\frac{a_2}{1 + b_2 \bar{y}_3} + d_1 k_2\right) + \sqrt{\left(\frac{a_2}{1 + b_2 \bar{y}_3} + d_1 k_2\right)^2 - 4\left(\frac{a_2 k_2}{1 + b_2 \bar{y}_3}\right)\left(\frac{a_1 \bar{x}_3}{1 + b_1 \bar{x}_3} - d_1\right)}}{2\left(\frac{a_2 k_2}{1 + b_2 \bar{y}_3}\right)}. \end{aligned}$$

Analisis kestabilan titik tetap dilakukan dengan cara menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik yang diperoleh dari matriks jacobian dari sistem (2). Matriks jacobian diperoleh dari turunan parsial pertama terhadap masing-masing variabel dari sistem (2) sebagai berikut:



$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks jacobian dari sistem (2) adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1-2x}{1+k_1y} - \frac{a_1y}{1+b_1x} + \frac{a_1xyb_1}{(1+b_1x)^2} & -\frac{x(1-x)k_1}{(1+k_1y)^2} - \frac{a_1x}{1+b_1x} & 0 \\ \frac{a_1y}{(1+b_1x)(1+k_2z)} - \frac{a_1xyb_1}{(1+b_1x)^2(1+k_2z)^2} & \frac{a_1x}{(1+b_1x)(1+k_2z)} - \frac{a_2z}{(1+b_2y)} + \frac{a_2yzb_2}{(1+b_2y)^2} - d_1 & -\frac{a_1k_2xy}{(1+b_1x)(1+k_2z)^2} - \frac{a_2y}{1+b_2y} \\ 0 & \frac{a_2z}{(1+b_2y)} - \frac{a_2yzb_2}{(1+b_2y)^2} & \frac{a_2y}{1+b_2y} - d_2 \end{bmatrix}$$

Untuk menganalisis kestabilan titik tetap yang telah didapatkan sebelumnya, kita gunakan matriks jacobian di atas dengan mensubstitusikan titik tetap yang telah diperoleh ke dalam matriks jacobian tersebut.

Berdasarkan persamaan karakteristik yang diperoleh dari determinan matriks jacobianiya diperoleh kestabilan masing-masing titik ekuilibrium yaitu:

1. Kestabilan titik tetap $E_0 = (0,0,0)$ adalah sebagai berikut:

Dengan mensubstitusikan titik $E_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) = (0,0,0)$ ke dalam matriks jacobian sistem (2), diperoleh matriks jacobian untuk E_0 yaitu:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}$$

Apabila dimisalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J berlaku $\det(\lambda I - J) = 0$, maka diperoleh:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + d_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + d_1)(\lambda + d_2) = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristiknya dapat diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -d_1$, dan $\lambda_3 = -d_2$, karena $d_1, d_2 > 0$ maka $\lambda_2, \lambda_3 < 0$. Namun, terdapat $\lambda_1 > 0$ sehingga titik tetap $E_0 = (0,0,0)$ bersifat tidak stabil.

2. Kestabilan titik tetap $E_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) = (1,0,0)$ adalah sebagai berikut:

Teorema kestabilan E_1 : Jika $a_1 < d_1(1 + b_1)$, maka titik tetap $E_1 = (1,0,0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti: Diperoleh matriks jacobian dari E_1 dengan mensubstitusikan titik $E_1 = (1,0,0)$ ke dalam matriks jacobian sistem (2) sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{a_1}{1+b_1} & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{1+b_1} - d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}$$

Apabila dimisalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J berlaku $\det(\lambda I - J) = 0$, maka diperoleh:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -\frac{a_1}{1+b_1} & 0 \\ 0 & \lambda - \left(\frac{a_1}{1+b_1} - d_1\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + d_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 1) \left(\lambda - \left(\frac{a_1}{1+b_1} - d_1 \right) \right) (\lambda + d_2) = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristiknya dapat diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{a_1 - d_1(1+b_1)}{1+b_1}$, dan $\lambda_3 = -d_2$. Karena $d_2 > 0$, akibatnya $\lambda_3 < 0$. Agar titik tetap $E_1 = (1,0,0)$ bersifat stabil asimtotik lokal, haruslah $\lambda_2 < 0$, artinya:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 - d_1(1+b_1)}{1+b_1} &< 0 \\ \Leftrightarrow a_1 - d_1(1+b_1) &< 0 \\ \Leftrightarrow a_1 &< d_1(1+b_1) \end{aligned}$$

Sehingga tetap $E_1 = (1,0,0)$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $a_1 < d_1(1+b_1)$

3. Kestabilan titik tetap $E_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, 0)$ adalah sebagai berikut:

Teorema kestabilan E_2 : Jika $a_1 > \frac{(1-2\bar{x}_2)(1+b_1\bar{x}_2)^2 + a_1\bar{x}_2\bar{y}_2b_1(1+k_1\bar{y}_2)}{\bar{y}_2(1+k_1\bar{y}_2)(1+b_1\bar{x}_2)}$, $k_1 > \frac{a_1\bar{x}_2(1+k_1\bar{y}_2)^2}{\bar{x}_2(1-\bar{x}_2)(1+b_1\bar{x}_2)}$ dan $d_2 > \bar{y}_2(a_2 - b_2d_2)$, maka titik tetap $E_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti: Diperoleh matriks jacobian dari E_2 dengan mensubstitusikan titik $E_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, 0)$ ke dalam matriks jacobian sistem (2) sebagai berikut:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & 0 \\ q_3 & 0 & -q_4 \\ 0 & 0 & q_5 \end{bmatrix}.$$

Dimana,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1-2\bar{x}_2}{1+k_1\bar{y}_2} - \frac{a_1\bar{y}_2}{1+b_1\bar{x}_2} + \frac{a_1\bar{x}_2\bar{y}_2b_1}{(1+b_1\bar{x}_2)^2} & q_4 &= \frac{a_2\bar{y}_2}{1+b_2\bar{y}_2} + k_2d_1\bar{y}_2 \\ q_2 &= \frac{\bar{x}_2(1-\bar{x}_2)k_1}{(1+k_1\bar{y}_2)^2} - \frac{a_1\bar{x}_2}{1+b_1\bar{x}_2} & q_5 &= \frac{a_2\bar{y}_2}{1+b_2\bar{y}_2} - d_2 \\ q_3 &= \frac{a_1\bar{y}_2}{(1+b_1\bar{x}_2)^2} \end{aligned}$$

Apabila dimisalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J berlaku $\det(\lambda I - J) = 0$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - q_1 & q_2 & 0 \\ -q_3 & \lambda & q_4 \\ 0 & 0 & \lambda - q_5 \end{bmatrix} &= 0 \\ (\lambda - q_5)(\lambda^2 - q_1\lambda + q_2q_3) &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan karakteristiknya diperoleh $(\lambda - q_5) = 0$ dan $\lambda^2 - q_1\lambda + q_2q_3 = 0$, sehingga nilai eigen yang memenuhi persamaan karakteristiknya adalah:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= q_5 \\ \lambda_2 &= \frac{q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4q_2q_3}}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{q_1 - \sqrt{q_1^2 - 4q_2q_3}}{2}. \end{aligned}$$

Karena $a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2, k_1, k_2 > 0$, agar titik tetap $E_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal, haruslah,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow q_5 &< 0 \\ \Leftrightarrow q_5 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a_2\bar{y}_2}{1+b_2\bar{y}_2} - d_2 &< 0 \end{aligned}$$

Dan

$$\lambda_{2,3} = \frac{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - 4q_2q_3}}{2} < 0.$$



Dengan syarat $q_1 < 0$ dan $q_2 q_3 > 0$ sehingga $q_1 < 0, q_2 > 0$, dan $q_3 > 0$.

Sehingga berdasarkan syarat $q_1 < 0, q_2 > 0, q_3 > 0$, dan $q_5 < 0$ maka titik tetap $E_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, 0)$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $\bar{y}_2 < \frac{d_2}{a_2 - b_2 d_2}, k_1 > \frac{a_1 \bar{x}_2 (1 + k_1 \bar{y}_2)^2}{\bar{x}_2 (1 - \bar{x}_2) (1 + b_1 \bar{x}_2)}$, dan $a_1 > \frac{(1 - 2\bar{x}_2)(1 + b_1 \bar{x}_2)^2 + a_1 \bar{x}_2 \bar{y}_2 b_1 (1 + k_1 \bar{y}_2)}{\bar{y}_2 (1 + k_1 \bar{y}_2) (1 + b_1 \bar{x}_2)}$.

4. Kestabilan titik tetap $E_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ adalah sebagai berikut:

Teorema kestabilan E_3 : Jika $b_1 > \frac{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)}{\bar{x}_3}, d_1 > \frac{a_1 \bar{x}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)} - \frac{\bar{z}_3(a_2 + b_2 d_2)}{(1 + b_2 \bar{y}_3)}$ dan $d_2 > \frac{k_2 a_1 \bar{x}_3 \bar{y}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)^2}$, maka titik tetap $E_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti: Diperoleh matriks jacobian dari E_2 dengan mensubstitusikan titik $E_3 = (\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ ke dalam matriks jacobian sistem (2) sebagai berikut:

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} m_1 & -m_2 & 0 \\ m_3 & m_4 & -m_5 \\ 0 & m_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimana,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1 - 2\bar{x}_3}{1 + k_1 \bar{y}_3} - \frac{a_1 \bar{x}_3}{1 + b_1 \bar{x}_3} + \frac{a_1 b_1 \bar{x}_3 \bar{y}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)^2} & m_4 &= \frac{a_1 \bar{x}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)} - \frac{\bar{z}_3(a_2 + b_2 d_2)}{(1 + b_2 \bar{y}_3)} - d_1 \\ m_2 &= \frac{\bar{x}_3(1 - \bar{x}_3)k_1}{(1 + k_1 \bar{y}_3)^2} - \frac{a_1 \bar{x}_3}{1 + b_1 \bar{x}_3} & m_5 &= \frac{k_2 a_1 \bar{x}_3 \bar{y}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)^2} - d_2 \\ m_3 &= \frac{a_1 \bar{y}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)} - \frac{a_1 \bar{x}_3 \bar{y}_3 b_1}{(1 + b_1 \bar{x}_3)^2 (1 + k_2 \bar{z}_3)^2} & m_6 &= \frac{\bar{z}_3(a_2 - b_2 d_2)}{(1 + b_2 \bar{y}_3)} \end{aligned}$$

Apabila dimisalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J berlaku $\det(\lambda I - J) = 0$, maka diperoleh:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - m_1 & m_2 & 0 \\ -m_3 & \lambda - m_4 & m_5 \\ 0 & -m_6 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - (m_1 + m_4)\lambda^2 + (m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_5 m_6)\lambda - m_1 m_5 m_6 = 0$$

Misalkan bahwa,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -(m_1 + m_4) \\ \gamma_2 &= m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_5 m_6 \\ \gamma_3 &= -m_1 m_5 m_6 \end{aligned}$$

Maka persamaan karakteristik menjadi:

$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3 = 0$$

Penentuan tanda dari nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas menggunakan Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz. Maka matriks Routh Hurwitz adalah sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Maka ada tiga Kriteria Routh Hurwitz yang berlaku yaitu:

$$\begin{aligned} D_1 &= |\gamma_1| = \gamma_1 > 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 \\ \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 > 0, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \gamma_3 (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3) > 0. \end{aligned}$$

Kemudian

$$\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_3 = -m_1^2 m_4 - m_1 m_2 m_3 - m_1 m_4^2 - m_2 m_3 m_4 - m_4 m_5 m_6$$

Berdasarkan Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz, maka haruslah $m_1 < 0, m_2 < 0, m_2 < 0, m_2 < 0, m_2 < 0$ dan $m_6 < 0$. Dari syarat kestabilan pada Kriteria Routh Hurwitz diperoleh $b_1 > \frac{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)}{\bar{x}_3}, d_1 >$

$$\frac{a_1 \bar{x}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)} - \frac{\bar{z}_3(a_2 + b_2 d_2)}{(1 + b_2 \bar{y}_3)} \text{ dan } d_2 > \frac{k_2 a_1 \bar{x}_3 \bar{y}_3}{(1 + b_1 \bar{x}_3)(1 + k_2 \bar{z}_3)^2}$$

Sehingga berdasarkan Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz titik tetap $E_3 = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ bersifat stabil asimtotik lokal jika $b_1 > \frac{(1+b_1\hat{x}_3)(1+k_2\hat{z}_3)}{\hat{x}_3}$, $d_1 > \frac{a_1\hat{x}_3}{(1+b_1\hat{x}_3)(1+k_2\hat{z}_3)} - \frac{\hat{z}_3(a_2+b_2d_2)}{(1+b_2\hat{y}_3)}$ dan $d_2 > \frac{k_2a_1\hat{x}_3\hat{y}_3}{(1+b_1\hat{x}_3)(1+k_2\hat{z}_3)^2}$.

3.3. Simulasi Matematika Rantai Makanan Mangsa-Pemangsa Tiga Spesies dengan Adanya Ketakutan pada Mangsa dan Predator Perantara

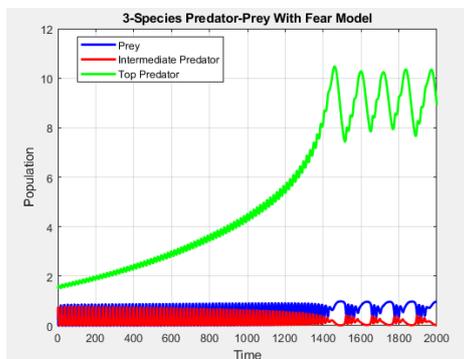
Simulasi ini dilakukan dengan menggunakan bantuan dari *software matlabR2018a* dengan memberikan nilai-nilai pada setiap parameter yang digunakan dan memberikan beberapa variasi dari tingkat ketakutan yang digunakan. Adapun parameter yang digunakan terdapat pada tabel 2 berikut:

Tabel 2. Nilai parameter

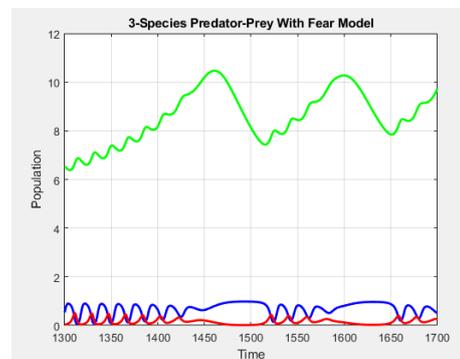
Parameter Nondimensionalisasi	Parameter Dimensionalisasi	Nilai
a_1	$A_1 K_0 / R_0 B_1$	5
a_2	$A_2 C_2 K_0 / R_0 B_2 C_1$	0,1
b_1	K_0 / B_1	3
b_2	$K_0 / C_1 B_2$	2
d_1	D_1 / R_0	0,4
d_2	D_2 / R_0	0,01
k_1	$K_1 K_0 / C_1$	≥ 0
k_2	$K_2 C_2 K_0 / C_1$	≥ 0

Berikut simulasi yang diperoleh berdasarkan nilai parameter pada tabel 2 dan nilai awal $x(0) = 0,6, y(0) = 0,4, z(0) = 1,5$:

Kasus 1 : Tanpa adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara ($k_1 = k_2 = 0$)



(a) Laju perubahan jumlah populasi pada waktu t



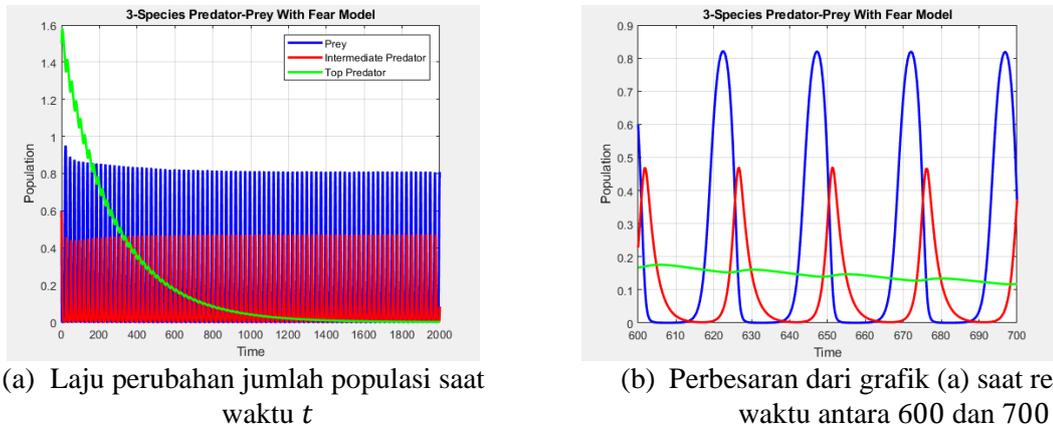
(b) Perbesaran dari grafik (a) saat rentang waktu antara 1300 dan 1700

Gambar 1. Laju perubahan jumlah populasi saat waktu t tanpa adanya ketakutan

Pada gambar 1(a) dapat dilihat bahwa tanpa adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara menyebabkan terjadinya osilasi yang tidak beraturan pada populasi dari spesies mangsa, predator perantara dan predator puncak. Pada gambar 1(b) dilakukan perbesaran grafik yang diambil dari rentang waktu antara 1300 dan 1700 sehingga dapat dilihat lebih jelas lagi bagaimana osilasi yang terjadi pada gambar 1(a). Berbeda halnya dengan kasus 2 pada gambar 2, dimana osilasi yang terjadi pada laju perubahan populasi mangsa dan predator perantara menunjukkan osilasi yang memiliki siklus yang teratur.



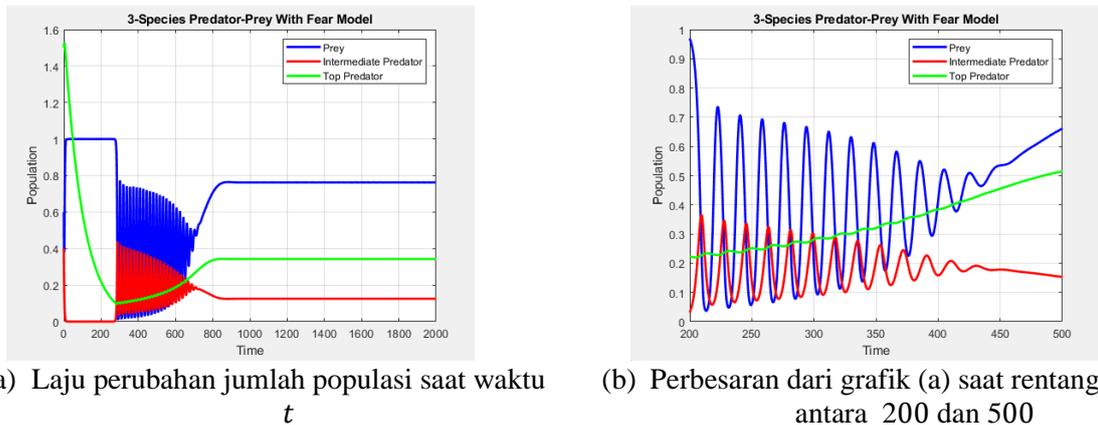
Kasus 2 : Dengan adanya ketakutan pada mangsa ($k_1 > 0$ dan $k_2 = 0$)



Gambar 2. Laju perubahan jumlah populasi saat waktu t dengan adanya ketakutan pada mangsa

Pada gambar 2(a) dapat dilihat bahwa dengan adanya ketakutan pada mangsa menyebabkan populasi predator puncak menuju kepunahan sedangkan populasi mangsa dan predator perantara menunjukkan koeksistensi yang beresilasi. Pada gambar 2(b) dilakukan perbesaran dari grafik 2(a) sehingga dapat dilihat lebih jelas bagaimana osilasi yang terjadi pada populasi mangsa dan predator perantara. Kepunahan dari predator puncak disebabkan karena tingginya tingkat ketakutan yang di alami mangsa yang membuat predator perantara kesulitan dalam mencari mangsa, sehingga predator puncak juga mengalami kesulitan dalam mencari mangsa. Berbeda halnya dengan kasus 3, dimana dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara yang tidak begitu tinggi membuat laju ketiga populasi menjadi stabil seiring dengan berjalannya waktu.

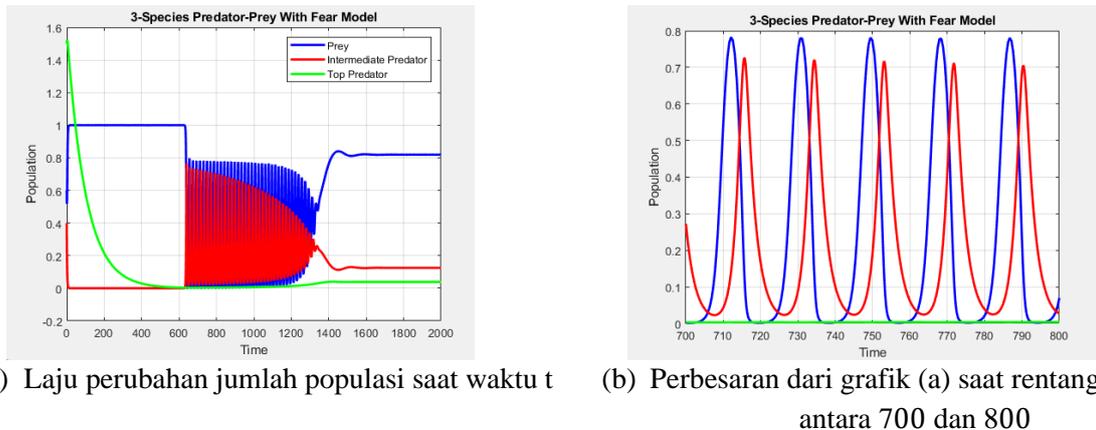
Kasus 3 : Dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara ($k_1 > 0$ dan $k_2 > 0$)



Gambar 3. Laju perubahan jumlah populasi saat waktu t dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara

Pada gambar 3(a) dapat dilihat bahwa dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara yang tidak begitu tinggi membuat populasi setiap spesies menjadi stabil asimtotik menuju titik tetapnya. Sebelum populasi menjadi stabil dapat dilihat bahwa terjadi osilasi pada rentang waktu antara 200 dan 500. Pada gambar 3(b) dilakukan perbesaran dari grafik 3(a) sehingga dapat dilihat lebih jelas lagi osilasi pada populasi mangsa dan predator perantara sebelum akhirnya populasi menjadi stabil menuju titik tetap E_3 . Lain halnya dengan kasus 4, dimana untuk tingkat ketakutan yang tinggi pada predator perantara menyebabkan predator puncak mengalami penurunan bahkan mendekati kepunahan.

Kasus 4 : Dengan adanya ketakutan pada predator perantara ($k_1 = 0$ dan $k_2 > 0$)



Gambar 4. Laju perubahan jumlah populasi saat waktu t dengan adanya ketakutan pada predator perantara

Pada gambar 4(a) dapat dilihat bahwa dengan adanya ketakutan pada predator perantara menyebabkan populasi menjadi stabil menuju titik tetap E_2 . Akan tetapi, populasi predator puncak mengalami penurunan bahkan mendekati kepunahan. Hal tersebut terjadi karena tingginya tingkat ketakutan pada predator perantara. Sebelum populasi mangsa dan predator perantara menjadi stabil, dapat dilihat bahwa terjadi osilasi pada rentang waktu 600 dan 1300. Pada gambar 4(b) dilakukan perbesaran dari grafik 4(a), sehingga dapat dilihat bentuk osilasi yang terjadi pada populasi mangsa dan predator perantara sebelum akhirnya populasi menjadi stabil.

4. KESIMPULAN

Model matematika rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara merupakan interaksi mangsa-pemangsa yang melibatkan tiga kelompok spesies di dalamnya yaitu spesies mangsa, predator perantara dan predator puncak. Dengan adanya ketakutan pada mangsa dan predator perantara membuat populasi pada interaksi rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies menjadi stabil asimtotik menuju titik tetapnya. Akan tetapi, untuk tingkat ketakutan pada mangsa atau pada predator perantara yang sangat tinggi akan menyebabkan hilangnya predator puncak dari rantai makanan mangsa-pemangsa tiga spesies tersebut. Efek ketakutan pada predator perantara memiliki pengaruh stabilitas yang lebih besar dari pada efek ketakutan pada mangsa terhadap perubahan populasi setiap spesies.

REFERENSI

- [1] B. Sahoo and S. Poria, "The chaos and control of a food chain model supplying additional food to top-predator," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 58, pp. 52–64, 2014, doi: 10.1016/j.chaos.2013.11.008.
- [2] SUMARTO, S dan KONERIR, "Ekologi Hewan," *B. Sect.*, p. 19, 2017.
- [3] D. Miswar and I. L. Nugraheni, "Ekologi Pendidikan," *Univ. Lampung*, vol. 5, no. 3, pp. 248–253, 2019.
- [4] D. Maknun, *Ekologi: Populasi, Komunitas, Ekosistem, Mewujudkan Kampus Hijau, Asri, Islami Dan Ilmiah*. Cirebon: Nurjati Press, 2017.
- [5] N. Suwanto, "ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY TIGA SPESIES."
- [6] R. N. P. Putri, W. Windarto, and C. Alfiniyah, "Analisis Kestabilan Model Predator-Prey dengan Adanya Faktor Tempat Persembunyian Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe III," *Contemp. Math. Appl.*, vol. 3, no. 2, p. 88, 2021, doi: 10.20473/conmatha.v3i2.30493.
- [7] T. Levi, "Wolves-coyotes-foxes : A cascade among carnivores Wolves – coyotes – foxes : a cascade among carnivores," *Ecology*, vol. 93, no. APRIL 2012, pp. 921–929, 2015, [Online]. Available: <http://klamathconservation.org/docs/blogdocs/leviwillmers2012.pdf>
- [8] G. Finizio, N.;Ladas, *Persamaan Differensial Biasa Dengan Penerapan Modern*, 2nd ed. Jakarta: Erlangga, 1988.
- [9] G. T. Skalski and J. F. Gilliam, "Functional responses with predator interference: Viable alternatives to the Holling type II model," *Ecology*, vol. 82, no. 11, pp. 3083–3092, 2001, doi: 10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPIV]2.0.CO;2.
- [10] K. L. Ryall and L. Fahrig, "Response of predators to loss and fragmentation of prey habitat: A review of theory," *Ecology*, vol. 87, no. 5, pp. 1086–1093, 2006, doi: 10.1890/0012-9658(2006)87[1086:ROPTLA]2.0.CO;2.
- [11] Didiharyono, "Analisis Kestabilan dan Keuntungan Maksimum Model Predator-Prey Fungsi Respon Tipe Holling III dengan Usaha Pemanenan," *J. Masagena*, vol. 11, no. 2, pp. 314–326, 2016.



-
- [12] O. J. Schmitz, A. P. Beckerman, and K. M. O'Brien, "Behaviorally Mediated Trophic Cascades: Effects of Predation Risk on Food Web Interactions," *Ecology*, vol. 78, no. 5, p. 1388, 1997, doi: 10.2307/2266134.
- [13] K. L. Pangle, S. D. Peacor, and O. E. Johannsson, "Large nonlethal effects of an invasive invertebrate predator on zooplankton population growth rate," *Ecology*, vol. 88, no. 2, pp. 402–412, 2007, doi: 10.1890/06-0768.
- [14] X. Wang, L. Zanette, and X. Zou, "Modelling the fear effect in predator–prey interactions," *J. Math. Biol.*, vol. 73, no. 5, pp. 1179–1204, 2016, doi: 10.1007/s00285-016-0989-1.
- [15] E. Society, "Chaos in a Three-Species Food Chain Author (s): Alan Hastings and Thomas Powell Reviewed work (s): Published by : Ecological Society of America Stable URL : <http://www.jstor.org/stable/1940591> . CHAOS IN A THREE-SPECIES FOOD CHAIN '," vol. 72, no. 3, pp. 896–903, 2013.
- [16] Kocak and Hole, "Dokumen.Tips_Hale-Kocak-Dynamics-and-Bifurcations.Pdf."