Modifikasi Metode Fletcher-Reeves untuk Penyelesaian Masalah Optimasi Tak Linier Tanpa Kendala

Fikri Miftahus Salmi[1], Muhammad Subhan[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received August 18, 2023
Revised August 21, 2023
Accepted March 20, 2024

Keywords:

Optimization
Modification
Fletcher-Reeves Method
Conjugate Gradient Method
Global Convergence

Kata Kunci:

Optimasi
Modifikasi
Metode *Fletcher-Reeves*
Metode *Conjugate Gradient*
Konvergensi Global

ABSTRACT

In nonlinear unconstrained optimization problems, methods involving the gradient of a function are used, allowing the function's value to increase or decrease at the fastest rate. One of the gradient-based methods is the Conjugate Gradient method, which has been extensively modified, with one of the well-known variants being the Fletcher-Reeves method. However, in many cases, the application of these methods doesn't always achieve the correct descent direction, affecting the speed and convergence of the method, so that modifications arise due to these deficiencies. The purpose of this study is to examine the process of forming the formula of a modified Fletcher-Reeves method, develop the algorithm, and analyze the global convergence. The results of numerical simulation tests show that by selecting the appropriate γ value the modified Fletcher-Reeves method converges to the global minimum solution and can find it faster than the Fletcher-Reeves method.

ABSTRAK

Dalam permasalahan optimasi tak linier tanpa kendala dapat diselesaikan menggunakan metode yang melibatkan gradien suatu fungsi, dengannya nilai suatu fungsi dapat meningkat atau menurun pada tingkatan tercepat. Salah satu metode yang menggunakan gradien yaitu metode *Conjugate Gradient*, yang banyak di modifikasi, salah satu yang terkenal diantaranya yaitu metode *Fletcher-Reeves*. Namun, kebanyakan pada penerapan metode ini tidak selalu menghasilkan arah penurunan yang tepat, sehingga berpengaruh pada kecepatan dan kekonvergenan dari metode ini, sehingga modifikasi muncul akibat kekurangan tersebut. Tujuan penelitian ini adalah menelaah proses pembentukan formula modifikasi metode *Fletcher-Reeves*, menyusun algoritma, dan menganalisis kekonvergenan globalnya. Hasil uji simulasi numerik menunjukkan bahwa dengan pemilihan nilai γ yang sesuai modifikasi metode *Fletcher-Reeves* konvergen ke solusi minimum global dan dapat lebih cepat menemukannya dibandingkan dengan metode *Fletcher-Reeves*.

Penulis pertama

Fikri Miftahus Salmi
Program Studi Matematika,Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: fikrimiftahussalmi@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Optimasi dapat didefinisikan sebagai proses mencari kondisi yang memberikan nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat dilakukan secara analitik maupun secara numerik. Namun, adakalanya suatu permasalahan matematika tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusinya, bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya dapat dicari dengan metode numerik [1]. Metode numerik menghasilkan solusi yang mendekati solusi sejati (*exact*) sehingga solusi numerik dinamakan solusi hampiran (*approximation*), namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya, selisih inilah yang disebut sebagai galat [2].

Salah satu metode numerik untuk penyelesaian masalah optimasi tak linier tanpa kendala adalah metode *Conjugate Gradient* [3]. Pada tahun 1952, metode *Conjugate Gradient* pertama kali diperkenalkan oleh Hestenes dan Stiefel untuk menyelesaikan persamaan linier, yang selanjutnya di modifikasi oleh Fletcher dan Reeves untuk menemukan solusi minimum lokal dari permasalahan minimasi tak linier tanpa kendala multi variabel [4]. Metode ini menggunakan pendekatan gradien dan membutuhkan turunan kedua dari fungsi, metode ini banyak dikenal karena kemampuannya dalam menemukan arah penurunan yang optimal dalam pencarian solusi minimum lokal [5]. Sehingga menjamin menghasilkan solusi minimum lokal paling banyak dalam n iterasi [6]. Hal ini berarti secara umum metode ini dapat memberikan solusi minimum dengan komputasi yang tidak terlalu banyak.

Permasalahan minimasi tak linier dengan atau tanpa kendala secara umum mungkin memiliki solusi minimum lokal yang bukan solusi minimum global [7]. Minimum global adalah nilai terendah dari suatu fungsi di seluruh domainnya [8]. Karena beberapa fungsi dapat memiliki banyak minimum lokal, sehingga menemukan minimum global bisa menjadi tugas yang menantang.

Seiring berkembangnya teknologi dan pemahaman lebih mendalam tentang karakteristik masalah optimasi, muncul kebutuhan untuk memodifikasi metode-metode yang sudah ada agar dapat mengatasi tantangan tersebut [9]. Dalam konteks ini, modifikasi dilakukan guna meningkatkan konvergensi global dan kecepatan dalam menemukan solusi minimum global dari suatu fungsi.

Tujuan penelitian ini yaitu untuk mempelajarai proses pembentukan modifikasi metode *Fletcher-Reeves* dalam menemukan solusi minimum global dalam permasalahan optimasi tak linier tanpa kendala, membuat algoritmanya, dan menganalisis kekonvergenan globalnya.

2. METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode studi kepustakaan yaitu dengan cara mengumpulkan dan mempelajari data serta informasi bersumber dari buku, jurnal, literatur, ataupun sumber-sumber relevan mengenai penyelesaian masalah optimasi tak linier tanpa kendala. Dengan mengkaji prinsip dari metode *Fletcher-Reeves* untuk penyelesaian masalah optimasi tak linier tanpa kendala, sehingga dapat ditelaah proses pembentukan formula modifikasi *Fletcher-Reeves* yang akan diterapkan guna meningkatkan efisiensi atau hasil numerik untuk penyelesaian masalah optimasi tak linier tanpa kendala, metode *Fletcher-Reeves* merupakan salah satu modifikasi dari metode *Conjugate Gradient*.

Metode *Conjugate Gradient* merupakan metode yang digunakan untuk penyelesaian masalah minimasi tak linier tanpa kendala dalam bentuk

$$\text{minimumkan}\, f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in R^n,$$

dimana fungsi $f(x)$ terdiferensiasi dan kontinu. Pencarian solusi minimum dihitung menggunakan

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{d}_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

dengan x_i adalah tebakan awal, $\alpha_i > 0$ merupakan panjang langkah dan $\boldsymbol{d}_i$ adalah arah pencarian. Menggunakan arah turunan [10], dengan memilih negatif dari gradien sebagai minimasi pada iterasi pertama $\boldsymbol{d}_i$ dihitung dengan

$$\boldsymbol{d}_i = -g(\boldsymbol{x}_i),\ \text{untuk}\ i = 1, \tag{2}$$

pada iterasi kedua dan seterusnya $\boldsymbol{d}_i$ dihitung dengan

$$\boldsymbol{d}_i = -g(\boldsymbol{x}_i) + \beta_i \boldsymbol{d}_{i-1}, \text{ untuk } i \geq 2, \tag{3}$$

$\beta_i \in R$ didefinisikan sebagai koefisien untuk metode *Conjugate Gradient.* Koefisien β_i yang dikemukakan oleh *Fletcher-Reeves* (FR), dinotasikan dengan β_i^{FR} [11] dihitung dengan

$$\beta_i^{FR} = \frac{\|g(x_i)\|^2}{\|g(x_{i-1})\|^2}, \tag{4}$$

menghitung nilai α_i menggunakan pencarian garis *Strong Wolfe-Powell* (SWP) [12], dalam pertidaksamaan berikut

$$f(\boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{d}_i) \leq f(x_i) + \lambda \alpha_i \nabla f(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{d}_i \tag{5}$$

$$|\nabla f(\boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{d}_i)^T \boldsymbol{d}_i| \leq \sigma |\nabla f(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{d}_i|, \tag{6}$$

dimana $0 < \lambda < \sigma < 1$ [13].
Tahap selanjutnya, adalah menyusun algoritma dan menganalisis kekonvergenan global dari modifikasi metode *Fletcher-Reeves*. Kemudian, menerapkan algoritma tersebut ke dalam bahasa pemrograman komputer untuk menyelesaikan suatu permasalahan optimasi tak linier tanpa kendala, sehingga didapatkan *output* yang diinginkan yang kemudian bisa dibandingkan hasilnya, dari hasil perbandingan kedua metode tersebut dapat ditarik kesimpulan.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

3.1. Proses Pembentukan Modifikasi Metode *Fletcher-Reeves*

Modifikasi metode *Fletcher-Reeves* adalah sebagai berikut:
Pandang $\beta_i^{FR} = \frac{\|g(x_i)\|^2}{\|g(x_{i-1})\|^2}$, koefisien modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) yang diusulkan dinotasikan dengan β_i^{MFR} dihitung dengan

$$\beta_i^{MFR} = \frac{\gamma \|g(x_i)\|^2}{\|g(x_{i-1})\|^2 \|g(x_{i-1})\|} + \frac{\|\boldsymbol{\omega}_i\|^2 g(x_i)^T (g(x_i) - g(x_{i-1}))}{\|g(x_{i-1})\|^2}, \tag{7}$$

dimana $\gamma > 0$, dan $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}$. Arah pencarian pada iterasi kedua dan seterusnya $\boldsymbol{d}_i$ dihitung dengan

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{-g(x_i) + \beta_i^{MFR} \boldsymbol{\omega}_i}{\gamma}, \text{ untuk } i \geq 2, \tag{8}$$

3.2. Algoritma Modifikasi Metode *Fletcher-Reeves*

Algoritma dari modifikasi metode *Fletcher-Reeves* dalam penyelesaian masalah optimasi tak linier tanpa kendala dinotasikan ke dalam diagram alir (*flowchart*) seperti pada Gambar 1.

3.3. Kekonvergenan Global Modifikasi Metode *Fletcher-Reeves*

Untuk membuktikan kekonvergenan global dari modifikasi metode Fletcher-Reeves, diasumsikan sebagai berikut:
3.3.1. Asumsi

a) Himpunan level $\mathcal{L} \coloneqq \{\boldsymbol{x} | f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_1)\}$ terbatas.
b) Pada suatu persekitaran $\mathcal{N}$ dari $\mathcal{L}$, fungsi f mempunyai turunan dan turunannya kontinu (*continuously differentiable*), dan gradientnya adalah Lipschitz kontinu yaitu terdapat konstanta $L > 0$ sehingga

$$\|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\| \leq L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \ \forall \, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{N} \tag{9}$$

Lemma 1. Misalkan asumsi berlaku. Persamaan (1), (2) dan (3) dimana α_i memenuhi (5) sehingga memenuhi persamaan berikut

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(g_i^T \boldsymbol{d}_i\right)^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} < \infty \tag{10}$$

Bukti:
Dari (5) dan (1) kita memiliki

$$(g_{i+1} - g_i)^T \boldsymbol{d}_i \geq (\sigma - 1) g_i^T \boldsymbol{d}_i,$$

sebaliknya, kondisi Lipschitz (8) menyatakan bahwa

$$
\begin{aligned}
\|g_{i+1} - g_i\| &< L\|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i\| \\
&\leq \|\boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{x}_i\| \\
&\leq L\|\alpha_i \boldsymbol{d}_i\| \\
(g_{i+1} - g_i)^T \boldsymbol{d}_i &\leq \alpha_i L \|\boldsymbol{d}_i\|^2,
\end{aligned}
$$

dengan menggabungkan kedua hubungan ini, kita peroleh

$$\alpha_i \geq \frac{\sigma-1}{L} \cdot \frac{\nabla f^T \boldsymbol{d}_i}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2}. \tag{11}$$

Dari persamaan (5) dan (11) didapatkan

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_i + \alpha_i \boldsymbol{d}_i) &\geq -\lambda \alpha_i g_i^T \boldsymbol{d}_i \\
&\geq \frac{\lambda(1-\sigma)}{L} \frac{\left(g_i^T \boldsymbol{d}_i\right)^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} \\
&= \zeta \frac{\left(g_i^T \boldsymbol{d}_i\right)^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2},
\end{aligned} \tag{12}
$$

dimana $\zeta = \frac{\lambda(\sigma-1)}{L}$. Penjumlahan (3.8) dari $i = 0$ sampai $i = m$, didapatkan

$$
\begin{aligned}
\zeta \sum_{i=0}^{m} \frac{\left(g_i^T \boldsymbol{d}_i\right)^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} &\leq \sum_{i=0}^{m} \left(f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_{i+1})\right) \\
&= f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_{m+1}) \\
&\leq f(\boldsymbol{x}_1) + |f(\boldsymbol{x}_{m+1})| \\
&\leq f(\boldsymbol{x}_1) + M.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Dari pertidaksamaan (13) diperoleh dari fakta bahwa asumsi menyatakan $|f(x)| < M$ untuk semua $x \in \mathcal{L}$ dan M konstan positif. Hasil ini untuk semua $m \geq 0$,

$$0 < \sum_{i=0}^{m} \frac{\left(g_i^T \boldsymbol{d}_i\right)^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} \leq \frac{1}{\zeta}\left(f(x_1) + M\right). \tag{14}$$

Untuk itu terbukti bahwa $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(g_i^T \boldsymbol{d}_i\right)^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} < \infty$,

ekuivalen dengan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|g_i\|^2}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} < \infty, \tag{15}$$

Persamaan (15) dikenal sebagai kondisi Zoutendijk [14].

Teorema 1

Misalkan asumsi berlaku, sehingga norm gradien fungsi mendekati nol [15], berlaku

$$\lim_{i \to 0} \|g_i\| = 0, \ \forall\, i \geq 1 \tag{16}$$

Bukti:

Misalkan ada bilangan positif $\varepsilon > 0$ sehingga

$$\left\|g_i\right\| > \varepsilon, \ \forall\, i \geq 1 \tag{17}$$

sekarang, dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan (8) diperoleh

$$\|\boldsymbol{d}_i\|^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\|g_i\|^2 - 2\beta_i^{MFR} \omega_i g_i^T + \left(\beta_i^{MFR}\right)^2 (\boldsymbol{\omega}_i)^2\right) \tag{18}$$

substitusikan persamaan (7) ke (18), diperoleh

$$\beta_i^{MFR} = \frac{\gamma \|g_i\|^2}{\|g_{i-1}\|^2 \|g_{i-1}\|} + \frac{\|\boldsymbol{\omega}_i\|^2 g_i^T (g_i - g_{i-1})}{\|g_{i-1}\|^2} \leq \frac{\|g_i\|^2}{\|g_{i-1}\|^2},$$

berarti

$$\|\boldsymbol{d}_i\|^2 \leq \gamma \|g_i\|^2 + \frac{\|g_i\|^4}{\|g_{i-1}\|^4} \|\boldsymbol{\omega}_i\|^2,$$

membagi kedua ruas dengan $\|g_{i-1}\|^4$ sehingga

$$\frac{\|\boldsymbol{d}_i\|^2}{\|g_i\|^4} \leq \frac{\gamma}{\|g_i\|^2} + \frac{\|\boldsymbol{\omega}_i\|^2}{\|g_{i-1}\|^2} \tag{19}$$

menerapkan berulang kali ke persamaan (19) diperoleh

$$\frac{\|\boldsymbol{d}_i\|^2}{\|g_i\|^4} \leq \sum_{i=2}^{i} \frac{1}{\|g_i\|^2}$$

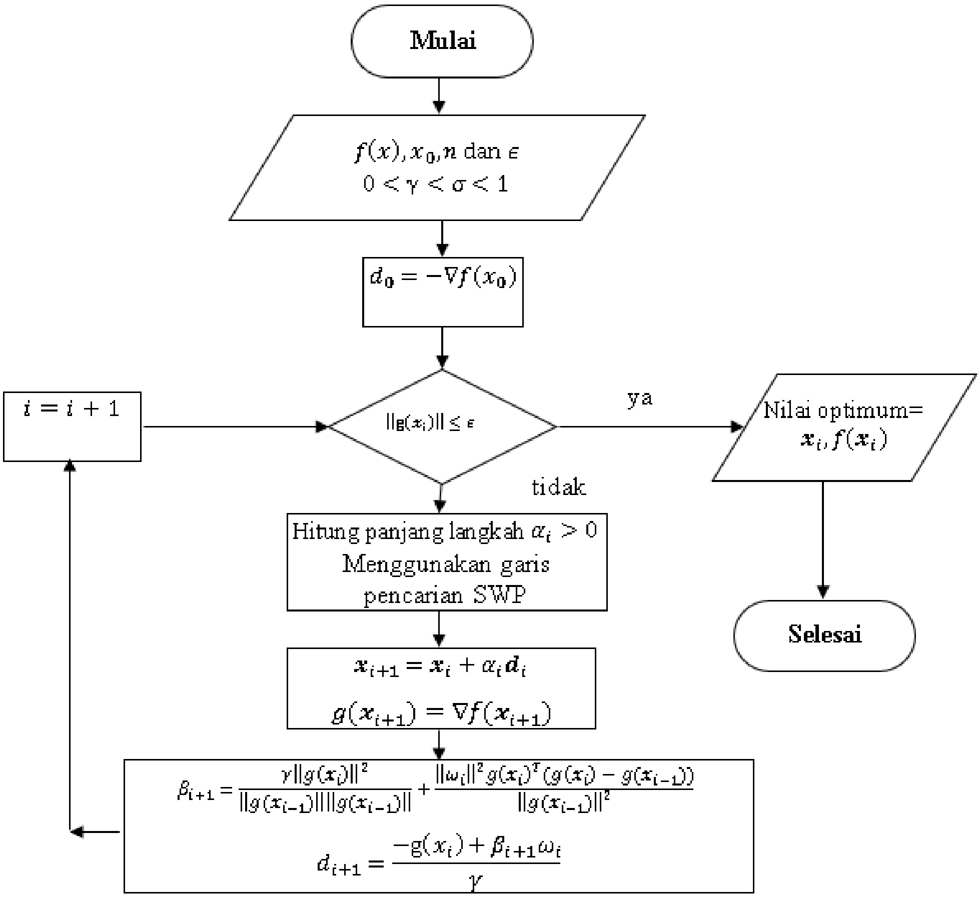
dari (16) dan (19) kita dapatkan

$$\frac{\|\boldsymbol{d}_i\|^2}{\|g_i\|^4} \geq \frac{\varepsilon^2}{i}$$

ini berarti

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|g_i\|^4}{\|\boldsymbol{d}_i\|^2} = \infty \qquad (20)$$

persamaan (20) kontradiksi dengan (15), sehingga (16) berlaku, pembuktian selesai.



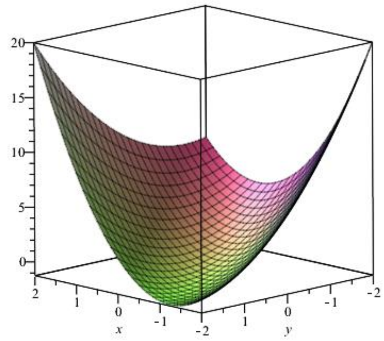
Gambar 1. Diagram Alir Modifikasi Metode *Fletcher-Reeves*

3.4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan dibandingkan hasil simulasi numerik kedua metode, yaitu metode *Fletcher-Reeves* dinotasikan dengan FR dengan modifikasi metode *Fletcher-Reeves* dinotasikan dengan MFR dalam menemukan solusi minimum dari fungsi. Perbandingan uji simulasi numerik dengan menggunakan kriteria pemberhentian $\|g(\boldsymbol{x}_i)\|^2 < \varepsilon$, dengan galat $\varepsilon = 10^{-8}$ dan $\sigma = 0{,}1$ yang sama untuk kedua metode yang digunakan. Fungsi yang akan di cari solusi minimumnya yaitu fungsi kuadrat dan fungsi tak kuadrat dua variabel yaitu:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
b) $f(x_1, x_2) = \left(-100 + x_1^2 + \left((5 - x_2)x_2 - 2\right)x_2\right)^2 + \left(-10 + x_1^3 + \left((x_2 + 5)x_2 - 14\right)x_2\right)^2$

Grafik fungsi $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ telah diperlihatkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik fungsi $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

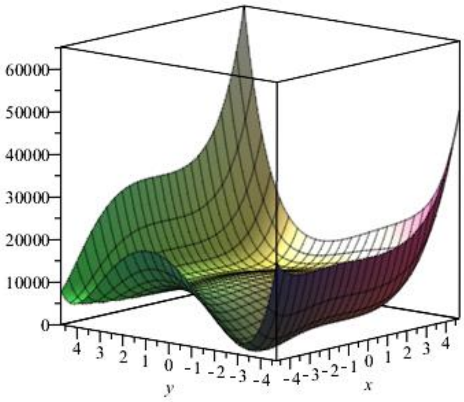
Dengan tebakan awal $\boldsymbol{x_1} = (0,0)$, Tabel 1. menampilkan hasil simulasi numerik perbandingan metode *Fletcher-Reeves* dan modifikasi metode *Fletcher-Reeves* terhadap fungsi $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, kolom pertama menampilkan metode, kolom kedua merupakan hampiran solusi minimum yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{x}^*$, kolom ketiga menampilkan nilai fungsi pada solusi hampiran yang diberikan dinotasikan dengan $f(\boldsymbol{x}^*)$ dan kolom keempat merupakan jumlah iterasi yang dibutuhkan untuk menemukan solusi minimum.

Tabel 1 Hasil Simulasi Numerik fungsi $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

No.	Metode	$\boldsymbol{x}^*$	$f(\boldsymbol{x}^*)$	Iterasi
1	FR	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000006 \\ 1{,}50000000010 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	114
2	MFR $(\gamma = 2\text{x}10^{-10})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}000000000 \\ 1{,}0000000000 \end{Bmatrix}$	$-1{,}000$	1000
3	MFR $(\gamma = 5\text{x}10^{-9})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000003 \\ 1{,}5000000006 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	55
4	**MFR** $(\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{5x10^{-8}})$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{-1{,}0000000003} \\ \mathbf{1{,}5000000006} \end{Bmatrix}$	$\mathbf{-1{,}250}$	**52**
5	MFR $(\gamma = 5\text{x}10^{-7})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000003 \\ 1{,}5000000006 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	87
6	MFR $(\gamma = 5\text{x}10^{-6})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000003 \\ 1{,}5000000006 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	148
7	MFR $(\gamma = 1\text{x}10^{-4})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000004 \\ 1{,}5000000006 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	209
8	MFR $(\gamma = 5\text{x}10^{-3})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000001 \\ 1{,}5000000002 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	564
9	MFR $(\gamma = 1\text{x}10^{-2})$	$\begin{Bmatrix} -1{,}0000000004 \\ 1{,}5000000009 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	623
10	MFR $(\gamma = 5\text{x}10^{-1})$	$\begin{Bmatrix} -0{,}9999999996 \\ 1{,}4999999993 \end{Bmatrix}$	$-1{,}250$	703
11	MFR $(\gamma = 1)$	$\begin{Bmatrix} -0{,}9999993784 \\ 1{,}4999988158 \end{Bmatrix}$	$-1{,}249$	1000

Pada Tabel 1. dapat dilihat bahwa dengan nilai tebakan awal $\boldsymbol{x_1}$ dan batas galat toleransi ε yang sama, kedua metode berhasil menemukan solusi minimum global dengan kecepatan yang berbeda. Hasil numerik nomor 1 metode *Fletcher-Reeves* (FR) berhasil menemukan solusi minimum global pada iterasi ke-seratus empat belas. Hasil numerik nomor 3-10 modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) berhasil menemukan solusi minimum global dengan kecepatan yang berbeda-beda. Sedangkan, hasil numerik nomor 2 dan 11 modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) berhasil menghampiri solusi minimum global dalam 1000 iterasi. Solusi minimum global berhasil ditemukan paling cepat pada hasil numerik nomor 4 oleh modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) dengan $\gamma = 5\text{x}10^{-8}$, yaitu pada iterasi ke-lima puluh dua.

Grafik fungsi $f(x_1, x_2) = \left(-100 + x_1^2 + \left((5 - x_2)x_2 - 2\right)x_2\right)^2 + \left(-10 + x_1^3 + \left((x_2 + 5)x_2 - 14\right)x_2\right)^2$ telah diperlihatkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Grafik fungsi $f(x_1, x_2) = \left(-100 + x_1^2 + \left((5 - x_2)x_2 - 2\right)x_2\right)^2 + \left(-10 + x_1^3 + \left((x_2 + 5)x_2 - 14\right)x_2\right)^2$

Dengan tebakan awal $\boldsymbol{x}_0 = (-3{,}5; -2)$, hasil simulasi numerik pada fungsi $f(x_1, x_2) = \left(-100 + x_1^2 + \left((5 - x_2)x_2 - 2\right)x_2\right)^2 + \left(-10 + x_1^3 + \left((x_2 + 5)x_2 - 14\right)x_2\right)^2$ ditampilkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Hasil Simulasi Numerik fungsi $f(x_1, x_2) = \left(-100 + x_1^2 + \left((5 - x_2)x_2 - 2\right)x_2\right)^2 + \left(-10 + x_1^3 + \left((x_2 + 5)x_2 - 14\right)x_2\right)^2$

No.	Metode	$\boldsymbol{x}^*$	$f(\boldsymbol{x}^*)$	Iterasi
1	FR	$\begin{Bmatrix} -3{,}3069 \\ 3{,}5008 \end{Bmatrix}$	6117,181	1000
2	MFR ($\gamma = 1\text{x}10^{-7}$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}4575 \\ -3{,}1166 \end{Bmatrix}$	121,075	1000
3	MFR ($\gamma = 1\text{x}10^{-6}$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}$	$2\text{x}10^{-24}$	16
4	MFR ($\gamma = 1\text{x}10^{-5}$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}$	$2\text{x}10^{-25}$	33
5	MFR ($\gamma = 5\text{x}10^{-4}$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}$	$5\text{x}10^{-22}$	18
6	MFR ($\gamma = 9\text{x}10^{-3}$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}$	$8\text{x}10^{-24}$	15
7	**MFR ($\boldsymbol{\gamma = 1\text{x}10^{-2}}$)**	$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}}$	$\boldsymbol{2\text{x}10^{-23}}$	**14**
8	MFR ($\gamma = 5\text{x}10^{-1}$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}$	$9\text{x}10^{-23}$	1000
9	MFR ($\gamma = 1$)	$\begin{Bmatrix} -3{,}7366 \\ -3{,}1320 \end{Bmatrix}$	$4\text{x}10^{-24}$	1000

Pada Tabel 2. dapat dilihat bahwa dengan nilai tebakan awal $\boldsymbol{x}_1$ dan batas galat toleransi ε yang sama pada fungsi $f(x_1,x_2) = \left(-100 + x_1^2 + \left((5 - x_2)x_2 - 2\right)x_2\right)^2 + \left(-10 + x_1^3 + \left((x_2 + 5)x_2 - 14\right)x_2\right)^2$, terdapat perbedaan yang jelas bagi kedua metode dalam menemukan solusi minimum. Hasil simulasi numerik nomor 1, dapat dilihat metode *Fletcher-Reeves* (FR) menghampiri solusi minimum pada titik $\boldsymbol{x}^* = \begin{Bmatrix} -3{,}3069 \\ 3{,}5008 \end{Bmatrix}$ dengan nilai fungsi yang sangat besar yaitu $f(\boldsymbol{x}^*) = 6117{,}181$ dalam 1000 iterasi. Dengan kata lain, metode *Fletcher-Reeves* tidak berhasil menemukan solusi minimum global dan hanya menghampiri solusi minimum lokal setelah 1000 iterasi.Hasil simulasi numerik nomor 3-7, dapat dilihat modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) dengan nilai γ yang berbeda berhasil menemukan solusi minimum global dengan iterasi yang sedikit. Sedangkan, hasil simulasi numerik nomor 2, 8 dan 9, modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) berhasil menghampiri solusi minimum global dalam 1000 iterasi. Solusi minimum global berhasil ditemukan paling cepat pada hasil numerik nomor 7 oleh modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) dengan $\gamma = 1\text{x}10^{-2}$, yaitu pada iterasi ke-empat belas.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari penelitian ini, diperoleh:

a. Metode *Fletcher-Reeves* (FR) dimodifikasi guna menyelesaikan masalah minimasi pada fungsi tak linier tanpa kendala dua variabel.
b. Modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) terbukti konvergen ke solusi minimum global.
c. Modifikasi metode *Fletcher-Reeves* (MFR) menemukan solusi minimum global dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode *Fletcher-Reeves* (FR), namun, pemilihan nilai γ sangat berpengaruh pada hasil akhir, sehingga dibutuhkan pemilihan nilai γ yang tepat seperti berikut:
    1) Pada fungsi kuadrat, solusi minimum global akan lebih cepat ditemukan dengan memilih nilai γ pada rentang $1\text{x}10^{-7}$ sampai dengan $9\text{x}10^{-9}$.
    2) Pada fungsi tak kuadrat, solusi minimum global akan lebih cepat ditemukan dengan memilih nilai γ pada rentang $1\text{x}10^{-2}$ sampai dengan $9\text{x}10^{-6}$.

REFERENSI:

[1] M. Subhan, *Hand-Out Mata Kuliah Analisis Numerik*, Padang: Universitas Negeri Padang, 2021.

[2] R. Munir, *Metode Numerik Edisi Revisi*, Bandung: Informatika ITB, 2006.

[3] M. Elida, "Metode Gradient Conjugate untuk Menyelesaikan Masalah Optimasi Nonlinier Tanpa Kendala," *Universitas Negeri Padang,* 2015.

[4] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function Minimization by conjugate gradients," *Comput J,* vol. 7, pp. 149-154, 1964.

[5] J. H. Mathews and K. Fink, *International Edition Numerical Methods using Matlab Fourth Edition*, USA: Pearson Education International, 2004.

[6] L. E. Scales, *Introduction to Non-Linear Optimization*, London: Macmillan, 1985.

[7] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization Second Edition*, New York: Springer, 2006.

[8] I. N. Bronshtein, K. Semendyayev, G. Musiol and H. Muehlig, *Handbook of Mathematics*, Berlin: Springer, 2007.

[9] N. Andrei, "An Unconstrained Optimization Test Function Collection," *Advanced Modelling And Optimization,* vol. 10, no. Number 1, pp. 147-161, 2008.

[10] S. S. Rao, *Engineering Optimization Theory and Practice*, Coral Gables, Florida: University of Miami, 2009.

[11] W. Sun and Y.-X. Yuan, *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*, New York: Springer, 2010.

[12] S. Butenko and P. M. Pardalos, *Numerical Methods And Optimization: An Introduction*, Boca Raton: CRC Press, 2014.

[13] L. Grippo and M. Sciandrone*, Introduction to Methods for Nonlinear Optimization*, Italy: Springer, 2023.

[14] R. Farida, "Perbandingan Metode Conjugate Gradient Menggunakan Koefisien Update Conjugate Direction Fletcher-Reeves dan Dai-Liao Untuk Menyelesaikan Masalah Optimasi," *Universitar Brawijaya,* 2010.

[15] H. Wasi and M. A. K. Shiker, "A Modified of FR Method to Solve Unconstrained Optimization," *Journal of Physics: Conference Series*, 2021.