# Metode Iterasi Orde Dua Trapesium untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear

**Hammi Faliha[1], Muhammad Subhan[2]**
[1,2],Departement Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

**Article Info**

***Article history:***

Received August 07, 2023
Revised August 21, 2023
Accepted September 20, 2023

***Keywords:***

Nonlinear Equation
Trapezoid Rule
Algorithm
Order of Convergence

***Kata Kunci:***

Persamaan Nonlinear
Aturan Trapesium
Algoritma
Orde Kekonvergenan

**ABSTRACT**

Mathematical problems in determining the roots of nonlinear equations can be solved analytically and numerically. However, very complex nonlinear equations are difficult to solve analytically, so numerical methods are used. Trapezoid Second Order Iteration Method is a method that emerge because of the shortcomings of the Newton Raphson Method and The Secant Method. The purpose of this study is to examine the process of forming the formula for the Trapezoid Second Order Iteration Method, develop an algorithm and find its convergence. This type of research is basic research. The result of numerical simulation tests on several function whose approach point are at two peaks show that The Trapezoidal Second Order Iteration Method is faster than Newton Raphson Method.

**ABSTRAK**

Permasalahan matematika pada penentuan akar persamaan nonlinear bisa dipecahkan dengan cara analitik serta numerik. Namun pada persamaan nonlinear yang sangat kompleks sulit diselesaikan secara analitik, sehingga digunakanlah metode numerik. Metode Iterasi Orde Dua Trapesium adalah metode yang muncul karena kekurangan dari Metode Newton Raphson dan Metode Secant. Tujuan dari penelitian untuk menelaah proses pembentukan formula Metode Iterasi Orde Dua Trapesium, menyusun algoritma dan menemukan kekonvergenannya. Jenis penelitian ini adalah penelitian dasar. Hasil uji simulasi numerik pada beberapa fungsi yang titik pendekatannya berada pada dua titik puncak menunjukkan bahwa Metode Iterasi Orde Dua Trapesium lebih cepat dibanding Metode Newton Raphson.



***Penulis pertama***

(Hammi Faliha)
Prodi Matematika,Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negari Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka,Air Tawar barat,Padang Utara, Padang, 25171 Padang,Sumatera Barat
Email: hammi1001@gmail.com

## 1. PENDAHULUAN

Dalam matematika permasalahan yang masih diteruskan sampai saat ini adalah pencarian solusi atau akar dari persamaan nonlinear. Pada persamaan nonlinear, masalah yang banyak muncul ialah mencari akar persamaan yang berbentuk $f(x) = 0$. Penyelesaiaan persamaan nonlinear dengan bentuk tersebut pada dasarnya sulit dipecahkan dengan cara analitik, namun memungkinkan untuk dipecahkan dengan menggunakan metode numerik. Metode analitik merupakan metode pemecahan model matematika menggunakan rumus-rumus aljabar yang telah baku (lazim) [1]. Metode numerik ialah suatu teknik yang digunakan untuk merumuskan permasalahan matematika supaya bisa dipecahkan menggunakan operasi perhitungan maupun aritmetika [2]. Solusi yang dihasilkan metode numerik diperoleh dengan cara menghampiri akar persamaan[3].

Beberapa dari metode numerik yang digunakan untuk mencari akar persamaan nonlinear yaitu Metode Bagi Dua, Metode Posisi Palsu, Metode Newton Raphson, Metode Secant dan metode lainnya. Setiap metode memiliki karakteristiknya masing-masing dan juga memiliki kelebihan dan kekurangan. Karakteristik dari Metode Bagi Dua terletak pada fungsi yang kontinu [4]. Metodenya sangat sederhana namun konvergenannya lambat. Sementara Metode Posisi Palsu/ Metode Regula Falsi merupakan metode penggalian akar persamaan yang memanfaatkan kemiringan serta perbedaan tinggi dari 2 titik pemisah range [5]. Namun kekurangan dari Metode Posisi Palsu adalah kekonvergenannya yang lambat [6]. Kemudian Metode Secant adalah metode yang diperoleh dari metode Newton namun menghindari perhitungan turunan dari fungsi. Sedangkan Metode Newton Raphson ialah metode yang memerlukan satu tebakan awal [7], kemudian dari tebakan awal itu ditarik garis singgung sehingga memotong sumbu x, begitu seterusnya sampai mendekati akar. Metode Newton Raphson memiliki orde kekonvergenan kuadrat. Hal ini menyatakan bahwa Metode Newton Raphson memiliki kecepatan untuk mencapai akar lebih lambat dibandingkan metode yang memiliki orde kekonvergenan tiga, empat dan seterusnya.

Seiring perkembangannya maka Metode Newton dimodifikasi dengan tujuan untuk mempercepat kekonvergenan serta memperkecil tingkat kesalahannya. Banyak dari ahli matematika terlebih dalam bidang numerik yang mencoba memperoleh metode-metode iterasi yang baru dengan harapan memperoleh metode yang lebih baik atau lebih efisien jika dibandingkan dengan metode-metode yang telah ada. Namun kadangkala metode-metode tersebut memiliki kekonvergenan yang juga belum cukup cepat dalam menentukan akar [8].

Oleh karena itu dibuatlah metode untuk memperkirakan akar tunggal persamaan nonlinear dengan menggunakan aturan trapesium yaitu Metode Iterasi Orde Dua Trapesium. Metode yang diusulkan memiliki orde kedua konvergensi [9]. Metode ini lebih cepat dari pada Metode Newton Rapshon dalam mencari solusi akar pada fungsi yang titik pendekatannya berada pada dua titik puncak.

Adapun tujuan pada penelitian ini yaitu untuk mempelajari proses pembentukan formula dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, membuat algoritma dari Dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium, dan menganalisis orde kekonvergenan metode tersebut.

## 2. METODE

Bentuk Penelitian yang diterapkan yaitu penelitian dasar atau teoritis. Penelitian dasar ialah metode yang bertujuan untuk mendapatkan pengetahuan baru yang sebelumnya belum pernah diketahui [10]. Penelitian dasar dilakukan dengan menggunakan studi kepustakaan dengan cara mengumpulkan data serta informasi yang dibutuhkan mengenai permasalahan dalam penentuan akar persamaan non linear yang berasal dari buku, jurnal, literatur dan sumber-sumber lain yang diperoleh melalui internet[11].

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk memecahkan permasalah dalam penelitian ini ialah sebagai berikut [12]:

1. Membaca dan mempelajari literatur mengenai persamaan nonlinear serta metode numerik untuk menentukan akar dari persamaan nonlinear.
2. Mengkaji prinsip dari Aturan Trapesium dan Metode Titik Tengah untuk menentukan akar dari persamaan nonlinear.
3. Menelaah proses pembentukan formula dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium untuk menentukan akar dari persamaan nonlinear
4. Menyusun algoritma dalam bentuk digram alir (*Flowchart*) dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium untuk menentukan akar dari persamaan nonlinear

5. Menganalisis orde kekonvergenan Metode Iterasi Orde Dua Trapesium
6. Menerapkan algoritma dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium ke program komputer menggunakan Matlab
7. Melakukan simulasi numerik pada beberapa persamaan non linear serta membandingkan hasilnya dengan Metode Newton Raphson.
8. Menyimpulkan hasil yang diperoleh.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1. Proses Pembentukan Metode Iterasi Orde Dua Trapesium

Metode iterasi Orde Dua Trapesium merupakan metode yang diperoleh dari penurunan aturan trapesium. Dengan menggunakan aturan trapesium dan metode titik tengah maka dapat untuk mengembangkan Metode Iterasi Orde Dua Trapesium. Metode ini dimulai dengan rumus aturan trapesium dan rumus aturan titik tengah. Adapun rumus aturan trapesium yaitu:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] \tag{1}$$

Dan rumus aturan titik tengah yaitu :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\, f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \approx h\, f\left(x_{1/2}\right)$$

Berdasarkan rumus aturan titik tengah dengan ketentuan $h = x_1 - x_0$ . Kemudian nilai $h = x_1 - x_0$ yang diperoleh dari aturan titik tengah digunakan untuk pengganti nilai $h$ pada persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{x_1 - x_0}{2}[f(x_0) + f(x_1)] \tag{2}$$

Lalu persamaan ini diturunkan sehingga menjadi:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx = \frac{x_1 - x_0}{2}[f'(x_0) + f'(x_1)] \tag{3}$$

Dengan penempatan integrasi tertentu, maka didapat:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2}[f'(x_0) + f'(x_1)] \tag{4}$$

Berdasarkan permasalahan nonlinear yang sering muncul dalam penentuan akar persamaan nonlinear yaitu berbentuk $f(x) = 0$, maka persamaan ini dimasukkan ke persamaan (4) sehingga menjadi:

$$f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2}[f'(x_0) + f'(x_1)] = 0 \tag{5}$$

Kemudian sederhanakan persamaan (5)

$$\frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{f(x_0)}{[f'(x_0) + f'(x_1)]}$$

$$x_1 - x_0 = \frac{2f(x_0)}{[f'(x_0) + f'(x_1)]}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{2f(x_0)}{f'(x_0) + f'(x_1)} \tag{6}$$

Atau secara umum :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1})} \tag{7}$$

Gunakan kondisi numerik $h = x_1 - x_0$, dimana :

$$h = x_1 - x_0$$
$$x_1 - x_0 = h$$

ISSN: 2807-3460

$$x_1 = x_0 + h$$

Sehingga,

$$x_{n+1} = x_n + h \tag{8}$$

Dimana $h = \Delta(x_n) = f(x_n)$ dalam persamaan (8), maka persamaan (8) di substitusikan ke persamaan (7). Sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'\big(x_n+f(x_n)\big)} \tag{9}$$

Persamaan (9) inilah yang merupakan formula metode iterasi orde dua trapesium

### 3.2. Algoritma Metode Iterasi Orde Dua Trapesium

Algoritma ialah sekumpulan intruksi/langkah-langkah yang ditulis dengan sistematis serta digunakan untuk mengatasi masalah/persoalan logika juga matematika dengan bantuan komputer [13]. Adapun algoritma dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium dinotasikan kedalam bentuk diagram alir (*flowchart*), seperti gambar 1

Dilihat dari gambar 1 bahwa proses dalam mencari akar dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium terdiri dari tiga tahapan yaitu masukan, proses, dan keluaran. Masukan tersebut yaitu tebakan awal ($x_0$), maksimal iterasi ($M$), batas galat toleransi ($tol$), dan fungsi ($f$).

### 3.3. Analisis Orde Kekonvergenan Metode Iterasi Orde Dua Trapesium

Untuk memperoleh orde kekonvergenan dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium yaitu dengan menggunakan ekspansi deret taylor disekitar $a$. Dimana $a$ adalah akar dari $f(x)$ sehingga $f(a) = 0$ dengan memperkirakan $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f'\big(x_{n+1} + f'(x_{n+1})\big)$ dengan menggunakan kondisi $c = \frac{f''(a)}{2f'(a)}$ dan $e_n = x_n - a$.

Ekspansi deret taylor pada $f(x)$ disekitar $a$. Maka diperoleh

$$f(x_n) = f(a) + f'(a)\frac{(x_n - a)}{1!} + f''(a)\frac{(x_n - a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x_n - a)^3}{3!} + \cdots + f^m(a)\frac{(x_n - a)^m}{m!}$$

Karena $e_n = x_n - a$. Maka $f(x_n)$ diperoleh

$$f(x_n) = f(a) + f'(a)e_n + f''(a)\frac{e_n^2}{2!} + f'''(a)\frac{e_n^3}{3!} + \cdots + f^m(a)\frac{e_n^m}{m!}$$

Dengan mengabaikan suku orde tinggi maka diperoleh:

$$f(x_n) = f'(a)(e_n + ce_n^2) \tag{10}$$

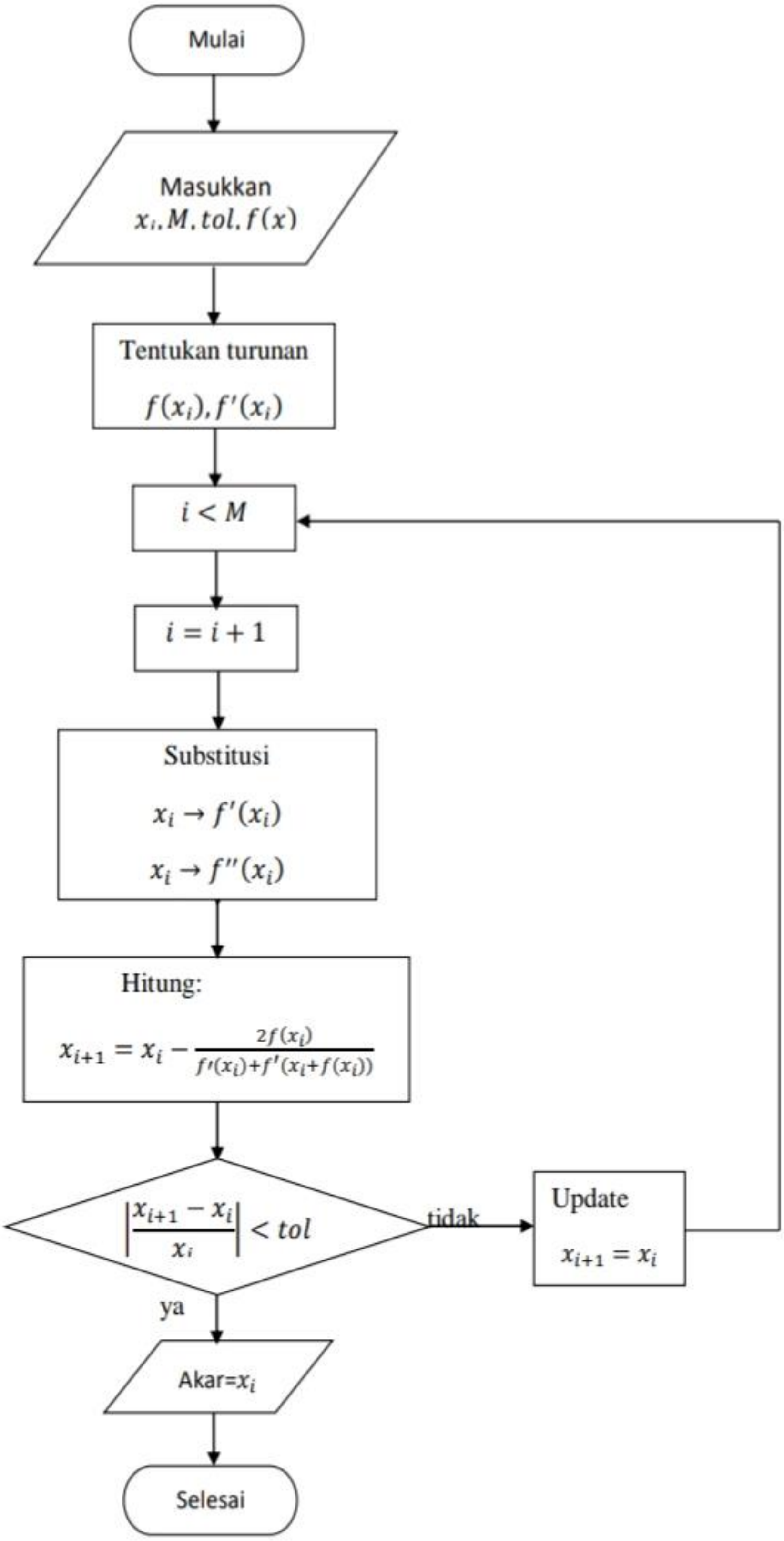
$$f'(x_n) = f'(a)(1 + 2ce_n) \tag{11}$$

Dan

$$f'\big(x_n + f(x_n)\big) = f'(a)\big(1 + f'(x_n)\big)[1 + 2c(e_n + f(x_n)] \tag{12}$$

Substitusi persamaan (10) dan persamaan (11) di persamaan (12), maka:

$$f'\big(x_n + f(x_n)\big) = f'(a)\big[1 + f'(a) + 2ce_n[1 + 3f'(a) + f''(a)]\big] \tag{13}$$




Gambar 1. Diagram Alir Metode Iterasi Orde Dua Trapesium

Tambahkan persamaan (11 ) dan (13)

$$f'\big(x_n + f(x_n)\big) + f'(x_n) = f'(a)\big[2 + f'(a) + 2ce_n\big(1 + 3f'(a) + f''(a)\big)\big] \tag{14}$$

Dari persamaan (10) dan persamaan (14) masukkan kedalam persamaan (9), diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{2f'^{(a)(e_n + ce_n^2)}}{f'(a)[2 + f'(a) + 2ce_n(1 + 3f'(a) + f''^{(a)})]}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n(1 + ce_n)}{\left[1 + \frac{f'(a) + 2ce_n\left(1 + 3f'(a) + f''(a)\right)}{2}\right]}$$

$$e_{n+1} = e_n - e_n(1 + ce_n)\left[1 + \frac{f'(a) + 2ce_n\left(1 + 3f'(a) + f''(a)\right)}{2}\right]^{-1}$$

$$e_{n+1} = e_n - e_n(1 + ce_n)\left[1 - \frac{f'(a) + 2ce_n\left(1 + 3f'(a) + f''(a)\right)}{2}\right]$$

$$e_{n+1} = \left[\frac{e_n^2 f'(a)}{2} + ce_n^2\left(2 + \frac{5f'(a)}{2} + f''(a)\right)\right] \tag{15}$$

Untuk persamaan nonlinear seperti $f(x_n) = 0$ dalam menggunakan persamaan (10), lalu persamaan (10) disubstitusikan kedalam persamaan (15), sehingga di dapat

$$e_{n+1} = \left[\frac{-e_n^2 f'(a)}{4} + ce_n^2\left(2 + \frac{5f'(a)}{2} + f''(a)\right)\right]$$

$$e_{n+1} = e_n^2\left[\frac{f''(a)}{4} + c\left(2 + \frac{5f'(a)}{2} + f''(a)\right)\right] \tag{16}$$

Berdasarkan persamaan (16) diperoleh bahwa Metode Iterasi Trapesium memiliki orde kekonvergenan dua (kuadratik).

## 3.4. Simulasi Numerik

Disini gunakan uji simulasi numerik untuk membandingkan kecepatan dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium (MIODT) dalam menentukan akar. Metode yang dibandingkan dalam simulasi ini adalah Metode Newton Raphson (MNR). Perbandingan uji simulasi numerik dilakukan dengan bantuan software pada komputer yaitu MATLAB 16[14]. Uji simulasi ini digunakan pada beberapa persamaan nonlinear berikut:

$$f_1(x) = x^3 - 2x + 4$$
$$f_2(x) = -x + e^x \cos x - 2$$
$$f_3(x) = e^{-x} + \sin x - 3$$

Pada persamaan nonlinear $f_1(x)$, $f_2(x)$, dan $f_3(x)$ dilakukan uji simulasi dengan kriteria pemberhentian pada $f'(x_i) = 0$ dan $\left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}\right| < tol$ yang sama untuk setiap metode yang digunakan. Dengan batas galat toleransi $tol = 10^{-10}$, dengan iterasi maksimal adalah 100 seperti pada Tabel 1.

Tampilan pada Tabel 1 adalah hasil perbandingan dari dua metode yang berbeda. Dengan penjelasan tabel sebagai berikut :

a. Kolom pertama adalah fungsi nonlinear $f(x)$[15]
b. Kolom kedua adalah tebakan awal $x_0$

c. Kolom ketiga dan keempat adalah metode yang akan dibandingkan
d. Dan kolom kelima merupakan akar hampiran a*

**Tabel 1. Perbandingan hasil iterasi dari dua metode pada beberapa fungsi**

| fungsi $f(x)$ | Tebakan Awal $x_0$ | MNR | MIODT | Akar Hampiran a* |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 0.2 | 29 | 19 | -2.000000000000 |
| $f_2(x)$ | 3 | 9 | 7 | -2.059887654354 |
| $f_3(x)$ | 1 | - | 8 | -1.381834367422 |

Terlihat pada Tabel 1 bahwa Metode Iterasi Orde Dua Trapesium selalu paling cepat dalam menemukan akar dari pada Metode Newton Raphson pada persamaan nonlinear yang titik pendekatannya berada pada dua titik puncak meskipun kedua metode memiliki orde kekonvergenan yang sama.

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dari penelitian diperoleh formula dari Metode Iterasi Orde Dua Trapesium,algoritma dan orde kekonvergenan. Metode Iterasi Orde Dua Trapesium memiliki orde kekonvergenan dua seperti Metode Newton Raphson. Dan hasil uji simulasi numerik menunjukkan bahwa Metode Iterasi Orde Dua Trapesium lebih unggul dari pada Metode Newton Raphson dalam mencari solusi akar yang titik pendekatannya berada pada dua titik puncak.

## REFERENSI

[1] Munir, R. *Metode Numerik Revisi Ketiga*. Bandung: Informatika. 2003
[2] Triadmodjo, B. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Peta Offset. 1992
[3] Syafii. *Metode Numerik Algoritma dan Pemprograman Visual C++*. Padang: Andalas University Press. 2014
[4] Susila, I. N. *Metode Numerik*. Bandung: FMIPA ITB. 1992
[5] Amang. *BAB III: Penyelesaian Persamaan Non Linier*. Diakses dari http;//lecturer.eepis-its.edu/~amang/pdf/ , tanggal 29 Oktober 2017.
[6] Munir, R. *Metode Numerik*. Bandung: Infornatika. 2006
[7] Kincaid, D., dan Cheney, E. W. *Numerical Analysis: Mathematics Of Scientific Computing* (Vol. 2). New York: American Mathematical Soc. 2009
[8] Singh, M K. dan Sing, S.R., ‘’ *A Six-Order Modification of Newto’s Method Solving Nonlinear Equations*,’’ Internasional Jurnal Of Computation Cognition. Vol.9, No. 2, Jume 2011.
[9] Kalhoro Zubair Ahmed, Umair K. Q., Asif A. S., Abdul R. N., ‘’*Trapezoidal Second Order Iterated Method For Solving Nonlinear Problems*,’’ USJICT (University Of Sindh Journal Of International And Communication Technology,Vol.2, pp. 111-114, 2018.
[10] Sugiyono. *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung: Alfabeta. 2018
[11] Pringgar Rizaldy Fatha, Bambang Sujatmiko, *‘’ Penelitian Kepustakaan (Library Reseaech) Modul Pembelajaran BerbasiS Augmented Reality Pada Pembelajaran Siswa,’’* IT-Edu: Jurnal Information Technology and Education,5(01),2021
[12] Putra, E.M., Subhan, M. dan Rizal, Y. *Metode Tipe Newton Bebas Turunan untuk Menentukan Akar Persamaan Tak Linea*. Journal Of Mathematics, Vol.4, No.2, 2019
[13] Muanalifah, Ani, ‘’*Pemanfaatan Software Matlab Dalam Pembelajaran Metode Numerik Pokok Bahasan Sistem Persamaan Linear Simulation,’’* Jurnal Phenomenon,Vol.1, No.1, 2013
[14] H. Sismoro. *Pengantar Logika Informatika Algoritma dan Pemprograman Komputer*. Yogyakarta: Andi. 2005
[15] Aprilla, Y dan Subhan, M. *Metode Iterasi Prediktor Korektor Jarrat-Householder untuk Penentuan Akar Persamaan Non Linear*. Journal Of Mathematics UNP, Vol.8, No.1,2023