Penentuan Akar Persamaan Non Linear Menggunakan Metode Iterasi Tiga Langkah

Muchni Illahi Efendi[1], Muhammad Subhan[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam, Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received July 31, 2023
Revised October 13, 2023
Accepted December 20, 2023

Keywords:

Nonlinear Equations
Three-Step Iteration Method
Order of Covergence

Kata Kunci:

Persamaan Non Linier
Metode Iterasi Tiga Langkah
Orde Kekonvergenan

ABSTRACT

In determining the roots of non-linear equations can be solved analytically and numerically. Non-linear equations that are difficult to solve analytically can be solved by approaching them with numerical methods, namely the Newton method, the Ostrowski method, and the Bawazir method. However, this method is still slow in obtaining its roots because of its small convergence order. The Eighth Order Three-Step Iteration Method was formed because of the shortcomings of the existing methods. The purpose of this study is to examine the process of forming the formula of the Eighth Order Three-Step Iteration Method, develop the algorithm, and analyze the order of convergence. This type of research is basic research. From the research results, the algorithm is used in computer programs. The convergence order of the Three-Step Iteration Method is eight, so this method is faster than Newton's Method, Ostrowski's Method, and Bawazir's Method.

ABSTRAK

Dalam menentukan akar dari persamaan non linear dapat diselesaikan secara analitik dan numerik. Persamaan non linier yang sulit diselesaikan secara analitik dapat diselesaikan dengan melakukan pendekatan dengan metode numerik, yaitu Metode Newton, Metode Ostrowski, dan Metode Bawazir. Akan tetapi, metode ini masih lambat dalam memperoleh akarnya karena orde kekonvergenannya yang masih kecil. Metode Iterasi Tiga Langkah terbentuk karena kekurangan dari metode yang ada. Tujuan penelitian ini adalah Menelaah proses pembentukan formula Metode Iterasi Tiga Langkah, menyusun algoritma, dan menganalisis orde kekonvergenan. Jenis penelitian ini adalah penelitian dasar. Dari hasil penelitian, algoritma digunakan pada program komputer. Orde kekonvergenan dari Metode Iterasi Tiga Langkah adalah delapan, sehingga metode ini lebih cepat dari Metode Newton, Metode Ostrowski, dan Metode Bawazir.

Penulis pertama

(Muchni Illahi Efendi)
Program Studi Matematika,Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, Indonesia. Kode Pos: 25131
Email: contoh@fmipa.ac.id

1. PENDAHULUAN

Menentukan akar dari persamaan non linear merupakan permasalahan dalam bidang analisis numerik. Permasalahan ini terjadi pada penentuan akar dari persamaan non linear yang berbentuk $f(x) = 0$. Penyelesaian permasalahan tersebut dapat digunakan secara analitik maupun numerik. Suatu metode yang menggunakan rumus yang sudah ada disebut dengan metode Analitik. Metode ini digunakan apabila suatu persamaan berbentuk sederhana [1]. Namun, jika persamaan ini berbentuk persamaan yang rumit, maka akan sulit ditentukan dengan analitik. Oleh karena itu, dalam menentukan akar dari persamaan ini dapat menggunakan metode numerik. Metode numerik merupakan metode yang menggunakan perhitungan komputasi secara berulang-ulang untuk menyelesaikan penyelesaian numeriknya dimana hasil yang diperoleh adalah hampiran akar dari persamaan tersebut [2].

Beberapa metode yang digunakan untuk menentukan hampiran akar pada persamaan non linear adalah metode Bagi Dua, metode Posisi Palsu, metode Secant, dan metode Newton. Terdapat kekurangan dari metode tersebut, yaitu metode Bagi Dua dan metode Posisi Palsu dimana kekurangannya itu terdapat pada kekonvergenannya yang lambat [3]. Selanjutnya, metode Newton merupakan metode yang paling populer untuk penyelesaian persamaan non linear dikarenakan mempunyai kekonvergenan yang lebih cepat dari metode lainnya. Akan tetapi, metode newton hanya memiliki orde konvergensi kuadratik, sehingga kekonvergenannya masih dikatakan lambat [4]. Selanjutnya, metode Secant merupakan metode yang menghindari turunan pertama dari fungsi yang akan di evaluasi, namun kekonvergenannya lebih lambat dari metode Newton, dimana orde kekonvergenannya adalah 1,618 [5].

Untuk mengatasi permasalahan tersebut diperlukan metode baru dalam mengatasi kekonvergenan yang lambat dari metode-metode sebelumnya dengan cara meningkatkan orde kekonvergenannya [6]. Salah satu cara yang digunakan untuk membentuk suatu metode iterasi dengan meningkatkan orde kekonvergenan ialah membentuk suatu metode Newton menjadi metode iterasi beberapa langkah. [7].

Berbagai peneliti memodifikasi metode Newton untuk mendapatkan bentuk yang baru menjadi metode iterasi beberapa langkah dengan meningkatkan orde konvergensinya yang bertujuan untuk mempercepat suatu persamaan mencapai nilai hampiran. A.M Ostrowski membentuk suatu metode iterasi menjadi dua langkah optimal dengan orde kekonvergenan empat, dikenal dengan Metode Ostrowski [8]. H.M Bawazir memperoleh suatu metode iterasi menjadi dua langkah dengan orde kekonvergenan lima, dikenal dengan Metode Bawazir [9].

Selanjutnya, menggabungkan beberapa metode iterasi dengan menambahkan parameter juga merupakan salah satu cara dalam membentuk metode baru [10]. Metode Iterasi Tiga Langkah merupakan metode yang terbentuk dari beberapa metode iterasi yang melibatkan satu parameter real dengan memodifikasi Metode Bawazir menggunakan kombinasi linier untuk menggabungkan Metode Bawazir dan Metode Ostrowski, dan menambahkan Metode Newton sebagai langkah ketiganya. Metode Iterasi Tiga Langkah menghasilkan perhitungan yang lebih sedikit dari Metode Newton, Metode Ostrowski, dan Metode Bawazir dalam menentukan akar dari persamaan non linier.

Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menelaah bagaimana proses pembentukan dari Metode Iterasi Tiga Langkah dalam menentukan akar persamaan non linier, membuat algoritmanya, dan menganalisis orde kekonvergenannya.

2. DASAR TEORITIS KOMPREHENSIF

2.1 Metode Newton

Metode Newton adalah suatu metode untuk menentukan akar-akar persamaan non linear [11]. Metode ini memiliki orde kekonvergenan dua yang berbentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0 \quad (1)$$

2.2 Metode Ostrowski

Metode Ostrowski merupakan suatu metode iterasi dua langkah untuk menentukan akar hampiran dari persamaan non linear [8]. Metode ini memiliki orde konvergenana empat yang berbentuk:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n) - f(y_n)]}{f'(x_n)[f(x_n) - 2f(y_n)]} \tag{2}$$

2.3 Metode Bawazir

Metode Bawazir merupakan suatu metode iterasi dua langkah untuk menentukan akar hampiran dari persamaan non linear [9]. Metode ini memiliki orde konvergenana empat yang berbentuk:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}\left[1 + \frac{f(y_n)(f'(x_n) - f'(y_n))}{2f(x_n)f'(y_n)}\right] \tag{3}$$

3. METODE

Penelitian yang dilakukan adalah penelitian dasar (teoritis). Dimana pada penelitian ini melakukan pengumpulan informasi dari beberapa buku, jurnal, dan sumber-sumber lainnya yang berkaitan terhadap permasalahan dalam menentukan akar-akar persamaan non linear. Adapun langkah-langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membaca dan mempelajari literatur mengenai persamaan non linier, algoritma serta metode numerik dalam menentukan akar dari persamaan non linier.
2. Mengkaji prinsip dari metode Newton, metode Ostrowski, dan metode Bawazir dalam menentukan akar dari persamaan non linier.
3. Menelaah proses pembentukan formula Metode Iterasi Tiga Langkah dalam penentuan akar persamaan non linier.
4. Menyusun algoritma dalam bentuk diagram alir dari Metode Iterasi Tiga Langkah dalam penentuan akar persamaan non linier.
5. Menganalisis orde kekonvergenan metode Iterasi Tiga Langkah .
6. Menerapkan algoritma dari Metode Iterasi Tiga Langkah ke dalam program komputer Matlab.
7. Melakukan simulasi numerik untuk beberapa persamaan non linear serta membandingkan hasilnya dengan Metode Newton, Metode Ostrowski, dan Metode Bawazir menggunakan bantuan program Matlab.
8. Membuat kesimpulan dari hasil penelitian yang diperoleh.

4. HASIL DAN PAMBAHASAN

4.1. Proses Pembentukan Metode Iterasi Tiga Langkah

Metode Iterasi Tiga Langkah adalah suatu metode multistep yang digunakan dalam menentukan hampiran akar persamaan non linear. Metode ini dikembangkan dengan memodifikasi Metode Bawazir, menggunakan kombinasi linier untuk menggabungkan Metode bawazir dan Metode Ostrowski, serta menambahkan Metode Newton sebagai langkah ketiga dengan pendekatan turunannya. Pada langkah pertama, kita mengurangi fungsi evaluasi dari persamaan (3) dengan melakukan pendekatan $f'(y_n)$ yang dihasilkan oleh O.Ababneh [12], yaitu:

$$f'(y_n) = \frac{f'(x_n)f(x_n)^2}{f(x_n)^2 + 2f(x_n)f(y_n) + f(y_n)^2} \tag{4}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4) ke (3), maka

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{N_x}{f'(x_n)f(x_n)^5} \end{aligned} \tag{5}$$

dengan,

$$N_x = f(y_n)\left(f(x_n)^3 + f(y_n)^2 f(x_n) + \frac{1}{2}f(y_n)^3\right)\left(f(x_n) + f(y_n)\right)^2$$

Kemudian, menggabungkan persamaan (2) dan (5) menggunakan kombinasi linear. Sehingga nilai x_{n+1} pada persamaan (5) dapat diganti menjadi z_n.

$$z_n = x_n + (\beta - 1)\left(\frac{[f(x_n) - f(y_n)]}{f'(x_n)[f(x_n) - 2f(y_n)]}\right) - \beta\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{N_x}{f'(x_n)f(x_n)^5}\right) \tag{6}$$

Dimana $\beta \in R$ adalah parameter penyesuaian. Ketika $\beta = 0$, metode pada persamaan (6) direduksi menjadi persamaan (2). Ketika $\beta = 1$, akan menghasilkan persamaan (5). Selanjutnya, pada persamaan (6) mempunyai orde konvergenan empat, dan kinerjanya bergantung pada pilihan β yang sesuai.

Selanjutnya, untuk mendapatkan orde delapan, kita akan menambahkan metode Newton sebagai langkah ketiganya, yaitu:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n + (\beta - 1)\left(\frac{[f(x_n) - f(y_n)]}{f'(x_n)[f(x_n) - 2f(y_n)]}\right) - \beta\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{N_x}{f'(x_n)f(x_n)^5}\right) \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \end{aligned} \tag{7}$$

Metode di atas mempunyai orde konvergenan dengan lima fungsi evaluasi. Selanjutnya, mengurangi fungsi evaluasi dengan melakukan pendekatan $f'(z_n)$ mengunakan pendekatan yang dihasilkan oleh Sivakumaret [13] , yaitu:

$$f'(z_n) \approx q'(z_n) = a_1 + 2a_2(z_n - x_n) + 3a_3(z_n - x_n)^2 \tag{8}$$

Dimana,

$$a_1 = f'(x_n) \tag{9}$$

$$a_2 = \frac{f[y_n, x_n, x_n](z_n - x_n) - f[z_n, x_n, x_n](y_n - x_n)}{(z_n - y_n)} \tag{10}$$

$$a_3 = \frac{f[z_n, x_n, x_n, x_n] - f[y_n, x_n, x_n, x_n]}{(z_n - y_n)} \tag{11}$$

Dimana beda terbagi dapat dihitung dengan:

$$f[y_n, x_n] = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \tag{12}$$

$$f[y_n, x_n, x_n] = \frac{f[y_n, x_n] - f'(x_n)}{y_n - x_n} \tag{13}$$

$$f[z_n, x_n] = \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} \tag{14}$$

$$f[z_n, x_n, x_n] = \frac{f[z_n, x_n] - f'(x_n)}{z_n - x_n} \tag{15}$$

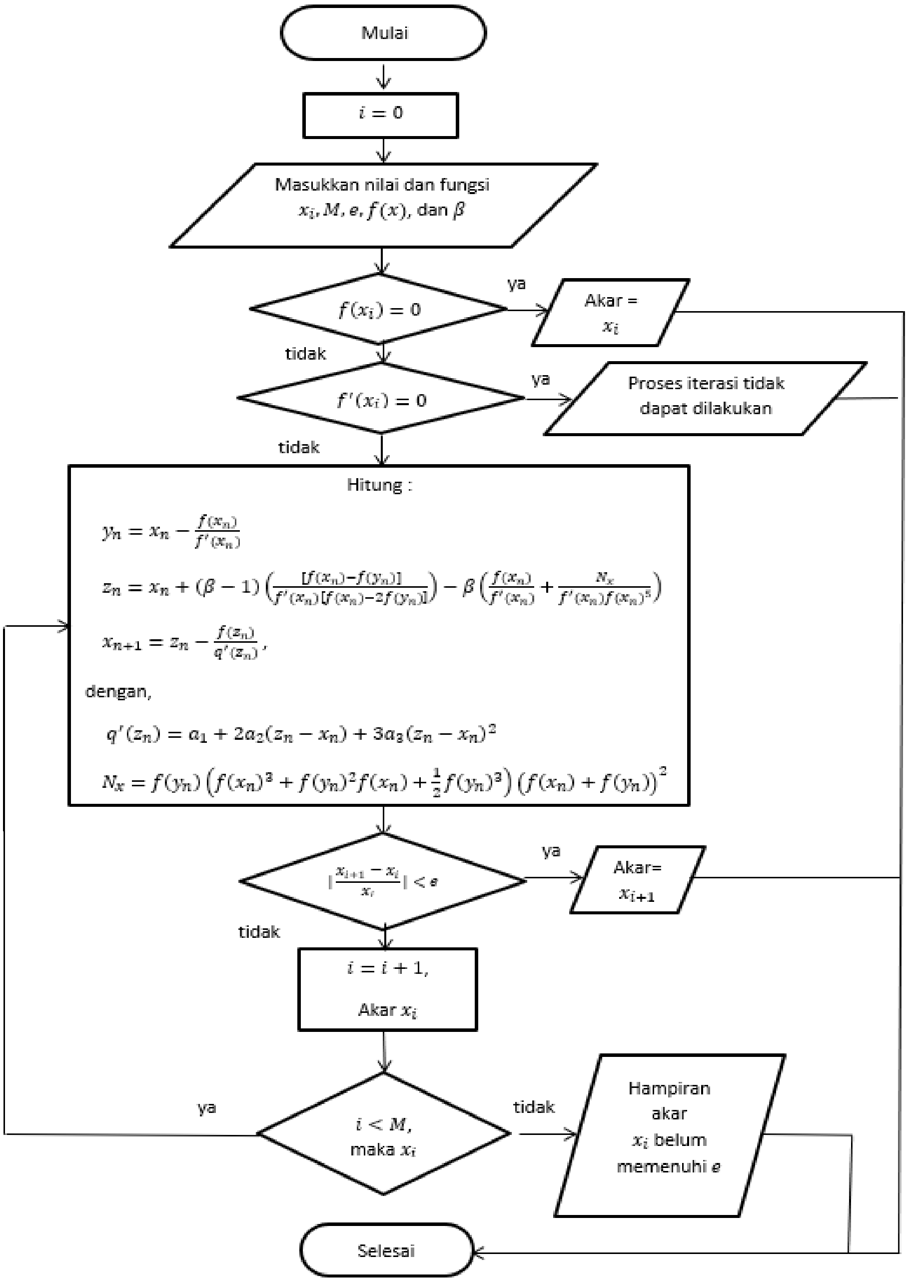
Dengan mensubstitusikan persamaan (8) pada persamaan (7), sehingga terbentuklah metode Iterasi Tiga Langkah , yaitu:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$z_n = x_n + (\beta - 1)\left(\frac{[f(x_n) - f(y_n)]}{f'(x_n)[f(x_n) - 2f(y_n)]}\right) - \beta\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{N_x}{f'(x_n)f(x_n)^5}\right)$$
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{q'(z_n)} \tag{16}$$

Persamaan di atas merupakan Metode Iterasi Tiga Langkah .

4.2. Algoritma Metode Iterasi Tiga Langkah

Algoritma Metode Iterasi Tiga Langkah dinotasikan ke dalam bentuk diagram alir (flowchart), seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Alir Metode Iterasi Tiga Langkah

4.3 Analisis Kekonvergenan Metode Iterasi Tiga Langkah

Teorema 1: Asumsikan α adalah solusi dari $f(x) = 0$ dalam interval terbuka I. Jika tebakan awal x_0 cukup dekat dengan α, maka Metode Iterasi Tiga Langkah mempunyai orde kekonvergenan delapan ketika $\beta \in R, \beta \neq 0$, dan $\beta \neq 1$.

Bukti : Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah galat pada iterasi ke-n, α merupakan akar dari fungsi $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$ dengan melakukan ekspansi Taylor dari $f(x)$ di sekitar $x = \alpha$ dan dievaluasi pada titik $x = x_n$ sampai orde delapan dan mengabaikan orde yang lebih tinggi, diperoleh

$f(x_n) = f'(\alpha)\{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + c_7e_n^7 + c_8e_n^8 + O(e_n^9)\}$ (17)

Dengan, $c_j = \frac{f^j(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)}, j = 2,3,4,5,\ldots$

$f'(x_n) = f'(a)\{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + 7c_7e_n^6 + 8c_8e_n^7 + O(e_n^8)\}$
(18)

Jika persamaan (17) dibagi dengan persamaan (18), maka diperoleh

$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (-4c_2{}^3 + 7c_2c_3 - 3c_4)e_n^4 + (8c_2{}^4 - 20c_2{}^2c_3 + 10c_2c_4 + 6c_3{}^2 - 4c_5)e_n^5 + (-16c_2{}^5 + 52c_2{}^3c_3 - 28c_2{}^2c_4 - 33c_2c_3{}^2 + 13c_2c_5 + 17c_3c_4 - 5c_6)e_n^6 + (32c_2{}^6 - 128c_2{}^4c_3 + 72c_2{}^3c_4 + 126c_2{}^2c_3{}^2 - 36c_2{}^2c_5 - 92c_2c_3c_4 - 18c_3{}^3 + 16c_2c_6 + 22c_3c_5 + 12c_4^2 - 6c_7)e_n^7 + (-64c_2{}^7 + 304c_2{}^5c_3 - 176c_2{}^4c_4 - 408c_2{}^3c_3{}^2 + 92c_2{}^3c_5 + 348c_2{}^2c_3c_5 + 135c_2c_3{}^3 - 44c_2{}^2c_6 - 118c_2c_3c_5 - 64c_2c_4{}^2 - 75c_3^2c_4 + 19c_2c_7 + 27c_3c_6 + 31c_4c_5 - 7c_8)e_n^8 + O(e_n^9)$ (19)

Substitusi persamaan (19) dan $x_n = e_n - \alpha$ ke langkah pertama dari persamaan (16), diperoleh

$y_n = \alpha + c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (4c_2{}^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (-8c_2{}^4 + 20c_2{}^2c_3 - 6c_3{}^2 - 10c_2c_4 + 4c_5)e_n^5 + (16c_2{}^5 - 52c_2{}^3c_3 + 28c_2{}^2c_4 + 33c_2c_3{}^2 - 17c_3c_4 - 13c_2c_5 + 5c_6)e_n^6 + (-32c_2{}^6 + 128c_2{}^4c_3 - 72c_2{}^3c_4 - 126c_2{}^2c_3{}^2 + 36c_2{}^2c_5 + 18c_3{}^3 - 12c_4^2 + 92c_2c_3c_4 - 22c_3c_5 - 16c_2c_6 + 6c_7)e_n^7 + (64c_2{}^7 - 304c_2{}^5c_3 + 176c_2{}^4c_4 + 408c_2{}^3c_3{}^2 - 92c_2{}^3c_5 + 44c_2{}^2c_6 - 135c_2c_3{}^3 + 64c_2c_4{}^2 + 75c_3^2c_4 - 348c_2{}^2c_3c_5 + 118c_2c_3c_5 - 19c_2c_7 - 27c_3c_6 - 31c_4c_5 + 7c_8)e_n^8 + O(e_n^9)$ (20)

Selanjutnya dengan mengekspansi deret Taylor pada $f(x)$ di sekitar $x = \alpha$ dan dievaluasi pada titik $x = y_n$, diperoleh

$f(y_n) = f'(\alpha)\{c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (5c_2{}^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + (-12c_2{}^4 + 24c_2{}^2c_3 - 6c_3{}^2 - 10c_2c_4 + 4c_5)e_n^5 + (28c_2{}^5 - 73c_2{}^3c_3 + 34c_2{}^2c_4 + 37c_2c_3{}^2 - 17c_3c_4 - 13c_2c_5 + 5c_6)e_n^6 + (-64c_2{}^6 + 206c_2{}^4c_3 - 104c_2{}^3c_4 - 160c_2{}^2c_3{}^2 + 44c_2{}^2c_5 + 104c_2c_3c_4 + 18c_3{}^3 - 16c_2c_6 - 22c_3c_5 - 12c_4^2 + 6c_7)e_n^7 + (144c_2{}^7 - 552c_2{}^5c_3 + 297c_2{}^4c_4 + 582c_2{}^3c_3{}^2 - 134c_2{}^3c_5 - 455c_2{}^2c_3c_5 - 147c_2c_3{}^3 + 54c_2{}^2c_6 + 134c_2c_3c_5 + 73c_2c_4{}^2 + 75c_3^2c_4 - 19c_2c_7 - 27c_3c_6 - 31c_4c_5 + 7c_8)e_n^8 + O(e_n^9)$ (21)

Kemudian substitusi persamaan (17), (18), (21), dan $x_n = e_n + \alpha$ ke langkah kedua pada persamaan (16) diperoleh

$z_n = \alpha + (9\beta c_2^3 + 16\beta c_2c_3 + c_2^3 + 3\beta c_4 - c_2c_3)e_n^4 + (-56\beta c_2{}^4 - 73\beta c_2{}^2c_3 - 4c_2{}^4 + \beta c_2c_4 + 12\beta c_3^2 + 8c_2{}^2c_3 + 4\beta c_5 - 2c_2c_4 - 2c_3^2)e_n^5 + (190\beta c_2{}^5 + 55\beta c_2{}^3c_3 + 10c_2{}^5 - 65\beta c_2{}^2c_4 - 183\beta c_2c_3{}^2 - 30c_2{}^3c_3 - 10\beta c_2c_5 + 8\beta c_3c_4 + 12c_2{}^2c_4 + 18c_2c_3{}^2 + 5\beta c_6 - 3c_2c_5 - 7c_3c_4)e_n^6 + (-440\beta c_2{}^6 + 695\beta c_2{}^4c_3 - 20c_2{}^6 + 301\beta c_2{}^3c_4 + 710\beta c_2{}^2c_3{}^2 + 80c_2{}^4c_3 + 20\beta c_2{}^2c_5 - 356\beta c_2c_3c_4 - 122\beta c_3{}^3 - 40c_2{}^3c_4 - 80c_2{}^2c_3{}^2 - 12\beta c_2c_6 - 12\beta c_3c_5 - 6\beta c_4^2 + 16c_2{}^2c_5 + 52c_2c_3c_4 + 12c_3{}^3 - 6\beta c_7 - 4c_2c_6 - 10c_3c_5 - 6c_4^2)e_n^7 + (940\beta c_2{}^7 - 2777\beta c_2{}^5c_3 + 36c_2{}^7 - 438\beta c_2{}^4c_4 + 1553\beta c_2{}^3c_3{}^2 - 178c_2{}^5c_3 - 41\beta c_2{}^3c_5 + 3281\beta c_2{}^2c_3c_4 + 1716\beta c_2c_3{}^3 + 101c_2{}^4c_4 + 252c_2{}^3c_3{}^2 24\beta c_2{}^2c_6 + 50\beta c_2c_3c_5 - 54\beta c_2c_4{}^2 - 263c_3^2c_4 - 51c_3^2c_4 - 209c_2{}^2c_3c_4 - 91c_2c_3{}^3 - 14\beta c_2c_7 - 14\beta c_3c_6 - 14\beta c_4c_5 + 20c_2{}^2c_6 + 68c_2c_3c_5 + 37c_2c_4{}^2 + 50c_3^2c_4 + 7\beta c_8 - 5c_2c_7 - 13c_3c_6 - 17c_4c_5)e_n^8 + O(e_n^9)$ (22)

Kemudian dengan mengekspansi deret Taylor pada $f(x)$ di sekitar $x = \alpha$ dan dievaluasi pada titik $x = z_n$, diperoleh

$$f(z_n) = f'(\alpha)((9\beta c_2^3 + 16\beta c_2 c_3 + c_2^3 + 3\beta c_4 - c_2 c_3)e_n^4 + (-56\beta {c_2}^4 - 73\beta {c_2}^2 c_3 - 4{c_2}^4 + \beta c_2 c_4 + 12\beta c_3^2 + 8{c_2}^2 c_3 + 4\beta c_5 - 2c_2 c_4 - 2c_3^2)e_n^5 + \left(190\beta {c_2}^5 + 55\beta {c_2}^3 c_3 + 10{c_2}^5 - 65\beta {c_2}^2 c_4 - 183\beta c_2 {c_3}^2 - 30{c_2}^3 c_3 - 10\beta c_2 c_5 + 8\beta c_3 c_4 + 12{c_2}^2 c_4 + 18 c_2 {c_3}^2 + 5\beta c_6 - 3c_2 c_5 - 7c_3 c_4\right)e_n^6 + \left(-440\beta {c_2}^6 + 695\beta {c_2}^4 c_3 - 20{c_2}^6 + 301\beta {c_2}^3 c_4 + 710\beta {c_2}^2 {c_3}^2 + 80{c_2}^4 c_3 + 20\beta {c_2}^2 c_5 - 356\beta c_2 c_3 c_4 - 122\beta {c_3}^3 - 40{c_2}^3 c_4 - 80{c_2}^2 {c_3}^2 - 12\beta c_2 c_6 - 12\beta c_3 c_5 - 6\beta c_4^2 + 16{c_2}^2 c_5 + \beta 52 c_2 c_3 c_4 + 12{c_3}^3 - 6\beta c_7 - 4c_2 c_6 - 10c_3 c_5 - 6c_4^2\right)e_n^7 + \left(81\beta^2 {c_2}^7 + 288\beta^2 {c_2}^5 c_3 + 922\beta {c_2}^7 + 54\beta^2 {c_2}^4 c_4 + 256\beta^2 {c_2}^3 {c_3}^2 - 2763\beta {c_2}^5 c_3 + 37{c_2}^7 + 96\beta^2 {c_2}^2 c_3 c_4 - 432\beta {c_2}^4 c_4 + 1521\beta {c_2}^3 {c_3}^2 - 180{c_2}^5 c_3 + 9\beta^2 c_2 {c_4}^2 - 41\beta {c_2}^3 c_5 + 1716\beta c_2 {c_3}^3 + 101{c_2}^4 c_4 + 252{c_2}^3 {c_3}^2 + 24\beta {c_2}^2 c_6 + 50\beta c_2 c_3 c_5 - 54\beta c_2 {c_4}^2 - 263 c_3^2 c_4 - 51 c_3^2 c_4 - 209{c_2}^2 c_3 c_4 - 91 c_2 {c_3}^3 - 14\beta c_2 c_7 - 14\beta c_3 c_6 - 14\beta c_4 c_5 + 20{c_2}^2 c_6 + 68 c_2 c_3 c_5 + 37 c_2 {c_4}^2 + 50 c_3^2 c_4 + 7\beta c_8 - 5c_2 c_7 - 13 c_3 c_6 - 17 c_4 c_5\right)e_n^8 + O(e_n^9)) \quad (23)$$

Substitusi persamaan (17), (18) dan (20)-(23), kita dapatkan

$$q'(z_n) = f'(\alpha)[1 + (18\beta {c_2}^4 + 32\beta {c_2}^2 c_3 + 2{c_2}^4 + 6\beta c_2 c_4 - 2{c_2}^2 c_3 + c_2 c_4)e_n^4 + \left(-112\beta {c_2}^5 - 146\beta {c_2}^3 c_3 - 8{c_2}^5 + 2\beta {c_2}^2 c_4 + 24\beta c_2 {c_3}^2 + 16{c_2}^3 c_3 + 8\beta c_2 c_5 - 6{c_2}^2 c_4 - 4c_2 {c_3}^2 + 2c_2 c_5 + 2c_3 c_4\right)e_n^5 + \left(380\beta {c_2}^6 + 110\beta {c_2}^4 c_3 + 20{c_2}^6 - 139\beta {c_2}^3 c_4 - 366\beta {c_2}^2 {c_3}^2 - 60{c_2}^4 c_3 - 20\beta {c_2}^2 c_5 + 27{c_2}^3 c_4 + 36{c_2}^2 {c_3}^2 + 10\beta c_2 c_6 - 3\beta c_4^2 - 9{c_2}^2 c_5 - 20 c_2 c_3 c_4 + 3c_2 c_6 + 4c_3 c_5 + 3c_4^2\right)e_n^6 + O(e_n^7)] \quad (24)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (22)-(24) ke dalam langkah terakhir pada persamaan (16), kita dapatkan

$$x_{n+1} = \alpha + (81\beta^2 {c_2}^7 + 288\beta^2 {c_2}^5 c_3 + 18\beta {c_2}^7 + 54\beta^2 {c_2}^4 c_4 + 256\beta^2 {c_2}^3 {c_3}^2 + 14\beta {c_2}^5 c_3 + {c_2}^7 + 96\beta^2 {c_2}^2 c_3 c_4 + 15\beta {c_2}^4 c_4 - 32\beta {c_2}^3 {c_3}^2 - 2{c_2}^5 c_3 + 9\beta^2 c_2 {c_4}^2 + 10\beta {c_2}^2 c_3 c_4 + {c_2}^4 c_4 + {c_2}^3 {c_3}^2 + 3\beta c_2 {c_4}^2 - {c_2}^2 c_3 c_4)e_n^8 + O(e_n^9) \quad (25)$$

Berdasarkan persamaan (25) terbukti bahwa Metode Iterasi Tiga Langkah memiliki orde kekonvergenan delapan.

4.4 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, melakukan perbandingan jumlah iterasi dari Metode Iterasi Tiga Langkah (MITL) dengan menggunakan parameter $\beta = 2$, Metode Newton (MN) yang memiliki orde kekonvergenanan dua, Metode Ostrowski (MO) yang memiliki orde kekonvergenanan empat, dan Metode Bawazir (MB) yang memiliki orde kekonvergenanan lima untuk membuktikan kecepatan Metode Iterasi Tiga Langkah dalam menentukan akarnya. Perbandingan simulasi numerik ini menggunakan software MATLAB 2016b dengan kriteria pemberhentian saat $f'(x_n) = 0$ dan $\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| < \varepsilon$ dimana batas galat toleransi $\varepsilon = 10^{-7}$ dan maksimal iterasi (M)=100.

Berikut beberapa persamaan non linier yang akan digunakan untuk simulasi numerik;

1. $f_1(x) = x^3 - (sin(x))^2 + 3\,cos(x) + 5$
2. $f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$
3. $f_3(x) = \sqrt{x} - cos(x)$
4. $f_4(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
5. $f_5(x) = (3x - 2)^7 - 1$

Tabel 1. Perbandingan Jumlah Iterasi dari beberapa metode

Fungsi f(x)	Tebakan Awal x_0	Jumlah Iterasi				Akar Hampiran
		MN	MO	MB	MITL	
$f_1(x)$	-1,4	4	3	3	2	-1,582687
$f_2(x)$	0,6	4	3	3	2	0,257530
$f_3(x)$	2,5	8	4	4	3	0,641714
$f_4(x)$	4	7	4	4	3	1,365230
$f_5(x)$	3,3	18	9	9	8	1,000000

Berdasarkan pada Tabel 1. dapat ditarik kesimpulan Metode Iterasi Tiga Langkah lebih cepat menemukan akarnya dari pada Metode Newton (MN), Metode Ostrowski (MO), dan Metode Bawazir (MB).

Selanjutnya untuk melihat pengaruh kinerja Metode Iterasi Tiga Langkah terhadap parameter β, maka dilakukan perbandingan dengan beberapa nilai β , yaitu 2, -2, 0.5, 4.

Berikut beberapa persamaan non linier yang akan digunakan untuk simulasi numerik;

1. $f_1(x) = (sin(x))^2 - x^2 + 1$
2. $f_2(x) = (x + 2)e^x - 1$
3. $f_3(x) = log(x^2 + x + 2) - x + 1$
4. $f_4(x) = e^{-x} - cos(x)$
5. $f_5(x) = (x - 1)^3 - 2$

Tabel 2. Perbandingan Pengaruh β terhadap Kinerja Metode Iterasi Tiga Langkah

Fungsi f(x)	Tebakan Awal x_0	Jumlah Iterasi MITL				Akar Hampiran
		$\beta = 2$	$\beta = -2$	$\beta = 0,5$	$\beta = 4$	
$f_1(x)$	1,5	2	2	2	2	1,404492
$f_2(x)$	0,5	3	NC	NC	NC	-0,442854
$f_3(x)$	-1,4	4	NC	3	NC	4,152591
$f_4(x)$	-2	5	5	5	5	0,000000
$f_5(x)$	3,2	3	NC	NC	3	2,259921

Berdasarkan Tabel 2. Pada persamaan $f_1(x)$ dan $f_4(x)$ berhasil menemukan akarnya dengan beberapa nilai β yaitu 2, -2, 0.5, 4. Selanjutnya persamaan $f_2(x)$ berhasil menemukan akarnya hanya saat $\beta = 2$. Persamaan $f_3(x)$ berhasil menemukan akarnya hanya saat $\beta = 2$ dengan jumlah iterasi empat dan $\beta = 0{,}5$ dengan jumlah iterasi tiga . Persamaan $f_5(x)$ berhasil menemukan akarnya hanya saat $\beta = 2$ dan 3. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa kinerja dari Metode Iterasi tiga langkah sangat berpengaruh terhadap nilai β.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, formula dari Metode Iterasi Tiga Langkah terdapat pada persamaan (16). Metode Iterasi Tiga Langkah memiliki orde kekonvergenan delapan. Uji simulasi numerik membuktikan bahwa Metode Iterasi Tiga Langkah lebih cepat dalam menemukan akarnya dari pada Metode Newton (MN), Metode Ostrowski (MO), dan Metode Bawazir (MB) dan parameter β sangat mempengaruhi kinerja dari Metode Iterasi Tiga Langkah.

REFERENSI

[1] Santoso, F.G.I. *Analisis Perbandingan Metode Numerik dalam Menyelesaikan Persamaan-Persamaan Serentak*. Jakarta: Gramedia, 2011
[2] Singh, M.K dan Singh, S.R. *A Six-Order Modification of Newton's Method For Solving Nonlinear Equations*. International Journal Of Computational Cognition.Vol. 9, No. 2, 2011
[3] Munir, R. *Metode Numerik Edisi Revisi.* Bandung :Informatika. Munir, R, 2006.

[4] Singh, M.K dan Singh, S.R. *A Six-Order Modification of Newton's Method For Solving Nonlinear Equations*. International Journal Of Computational Cognition.Vol. 9, No. 2, 2011.
[5] Nurazmi, Putra,S, dan Musraini,M. Famili Dari Metode Newton-Like dengan Orde Konvergensi Empat. JOM FMIPA Unri, Volume 1 No.2, 2014.
[6] Nazeer, W., Naseem, A., Kang, S. M., & Kwun, Y. C. Generalized Newton Raphson's Method Free From Second Derivative. Journal Nonlinear Sci. Appl, 9(1), 2823-2831, 2016.
[7] F. Sains, U. I. N. Sultan, and S. Kasim, "Metode Iterasi Dua Langkah Satu Parameter Untuk Penyelesaian Persamaan Nonlinear," no. November, pp. 627–632, 2018
[8] Ostrowski. A,. M. Solution of equations in Euclidean and Banach spaces. Academic Press, 1973
[9] Bawazir, H. M. Fifth and Eleventh-Order Iterative Methods for Roots of Nonlinear Equations. 17(2), 2020.
[10] S. A. Djumadila and W. Wartono, "Modifikasi Metode Iterasi Dua Langkah dengan Satu Parameter," *Semin. Nas. Teknol. ...*, pp. 18–19, 2017, [Online]. Available: http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/SNTIKI/article/view/3371.
[11] Heister. T, G. Rebholz. L, dan Xue. F. Numerical Analysis : an Introduction. Berlin : Walter de Gruyter GmbH and Co KG, 2019.
[12] O. Ababneh, "New Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations and Their Basins of Attraction," *WSEAS Trans. Math.*, vol. 21, pp. 9–16, 2022, doi: 10.37394/23206.2022.21.2.
[13] P. Sivakumar, K. Madhu, and J. Jayaraman, "Optimal eighth and sixteenth order iterative methods for solving nonlinear equation with basins of attraction," Appl. Math. E-notes, vol. 21, pp. 320–343, 2021.
[14] Rostami, M., dan Esmaeili. A Modification of Chebyshev-Halley Method Free from Second Derivatives for Nonlinear Equations. Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS). Vol. 3, No. 1, hal. 133-140.22, 2014.
[15] Sharma, J. R. Some Modified Newton's Methods with Fourthorder Convergence". Pelagia Research Library. Advances in Applied Science Research, Vol.2, No.1, hal. 240-247, 2011