

Model Matematika SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Ashraff Arsiyandi¹, Media Rosha²

^{1,2}Prodi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received May 11, 2023

Revised June 08, 2023

Accepted June 20, 2024

Keywords:

Leptospirosis

Rainfall

Zoonotics

Kata Kunci:

Leptospirosis

Curah hujan

Zoonosis

ABSTRACT

Leptospirosis is an illness spread from animals to humans brought on by *Leptospira* sp. This illness is widespread and can be found anywhere there is human habitation, although it is notably prevalent in the rainy Southeast Asian countries. The goal of this modelling is to analyse the results of mathematical models of the spread of leptospirosis illness under the effect of rainfall and to understand the implications of those results. This study offers a theoretical analysis of a fundamental problem in epidemiology: the spread of leptospirosis in response to rainfall. This study shows that rainfall has a significant impact on leptospirosis rates. The analysis of fundamental reproductive value demonstrates this effect, showing that an increase in rainfall leads to an epidemic of leptospirosis.

ABSTRAK

Leptospirosis yakni penyakit menular dari hewan ke manusia yang dibawa oleh *Leptospira* sp. Penyakit ini tersebar luas dan bisa ditemukan di mana saja ada tempat tinggal manusia, meskipun penyakit ini sangat umum di negara-negara hujan di Asia Tenggara. Tujuan dari pemodelan ini yakni untuk menganalisis hasil model matematis penyebaran penyakit leptospirosis di bawah pengaruh curah hujan dan memahami implikasi dari hasil tersebut. Studi ini menawarkan analisis teoretis tentang masalah mendasar dalam epidemiologi: penyebaran leptospirosis sebagai respons terhadap curah hujan. Studi ini menunjukkan bahwa curah hujan memiliki dampak yang signifikan terhadap tingkat leptospirosis. Analisis nilai reproduksi dasar menunjukkan efek ini, menunjukkan bahwa peningkatan curah hujan menyebabkan epidemi leptospirosis.

This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.



Penulis pertama

(Ashraff Arsiyandi)

Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, 25171

Padang, Sumatera Barat

Email: ashraffarsiyandi@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Leptospirosis yakni infeksi yang ditularkan dari hewan ke manusia (zoonotik) yang diakibatkan oleh bakteri *Leptospira* sp [1]. Leptospirosis yakni penyakit zoonosis yang menimbulkan ancaman bagi kesehatan masyarakat di negara-negara di seluruh dunia, terkhusus di negara yang iklimnya tropis ataupun subtropis yang lembab [2]. Kondisi cuaca ekstrem, seperti hujan lebat yang bisa menyebabkan banjir, berperan penting dalam menentukan apakah leptospirosis akan terjadi atau tidak [3]. Manusia akan lebih banyak terpapar bakteri *Leptospira* sp. karena meningkatnya kemungkinan air dan tanah yang terkontaminasi menyimpan tikus yang sakit selama periode hujan lebat. Karena tikus tumbuh subur di lingkungan basah, prevalensi leptospirosis meningkat di daerah dengan curah hujan tinggi karena lebih banyak tikus yang menyebarkan penyakit tersebut [4].



Leptospirosis bisa menyebar melalui kontak dengan air yang bergerak atau tenang [5]. Leptospirosis juga dihubungkan dengan banjir, air pasang di daerah pantai, daerah rawa bahkan lahan gambut [6] [7] [8]. Bakteri *Leptospira sp.* bisa bertahan sekitar sebulan di air bersih. Namun, bakteri *Leptospira sp.* tidak bisa bertahan hidup di air asin, air limbah, atau urin pekat. Lama waktu *Leptospira sp.* bisa bertahan hidup di air, terutama air tawar, bervariasi tergantung spesiesnya [9].

Leptospirosis yakni penyakit bakteri yang bisa ditularkan oleh manusia dan hewan melalui urin yang terinfeksi dari hewan yang terkontaminasi air atau tanah. Leptospirosis menular ke manusia melalui kontak pada urin hewan yang sedang sakit, yang selanjutnya terbawa oleh genangan air hingga mencemari lingkungan disekitar rumah yang lembab serta berlumpur [10]. Setelah direndam dalam air banjir dalam waktu lama, pori-pori kaki dan tangan menjadi pintu masuk bagi *Leptospira sp.* untuk masuk ke dalam tubuh [11]. *Leptospira sp.* bisa menginfeksi manusia begitu mereka menelan air atau makanan yang tercemar. *Leptospira sp.* bisa menginfeksi manusia jika bersentuhan dengan tubuh melalui luka, selaput lendir (seperti hidung, mulut, atau mata), bahkan air. Bakteri ini menyerang tubuh, berkembang biak pada darah, serta kemudian menyerang berbagai organ serta jaringan [12]. Demam, sakit kepala, mual, nyeri otot, dan muntah yakni gejala umum. Konjungtivitis, penyakit kuning, anemia, dan gagal ginjal jarang terjadi tetapi kejadian yang diamati [13].

Leptospirosis merupakan masalah kesehatan yang persisten di beberapa daerah di Indonesia. Leptospirosis telah menjadi masalah kesehatan masyarakat sejak pertama kali diidentifikasi karena tidak bisa diberantas. DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Tengah, Daerah Istimewa Yogyakarta, Jawa Timur, Banten, dan Kalimantan Selatan menjadi tujuh provinsi yang melaporkan kasus leptospirosis ke Kementerian Kesehatan antara tahun 2014 dan 2016 [14]. Ada pola yang meningkat dalam jumlah kematian yang disebabkan leptospirosis dari waktu ke waktu. Di Indonesia, leptospirosis memiliki angka kematian manusia yang signifikan (2,5%-16,45%) [6]. Angka kematian meningkat hingga 56% bagi mereka yang hidup di atas usia 50 tahun. Meski berbagai intervensi telah dilakukan, namun belum optimal, dan jumlah kasus leptospirosis terus meningkat. Pengendalian leptospirosis di daerah endemis kurang memiliki dasar yang kuat karena kurangnya data faktor risiko yang mempengaruhi kejadian leptospirosis di daerah tersebut [15]. Oleh karena itu diperlukan suatu studi untuk mengatasi kejadian leptospirosis.

Pada penelitian ini akan digunakan model penyebaran penyakit leptospirosis dengan pengaruh curah hujan yang dimodelkan dalam bentuk SEIR (Susceptibles, Exposed, Infected, Recovered).



Gambar 1. Model SEIR

Berdasarkan populasinya, model SEIR ini dibagi dua populasi yaitu populasi manusia dan populasi vector. Ada empat kelompok orang dalam populasi manusia: mereka yang sehat dan kebal terhadap penyakit (SH), mereka yang sehat tetapi memiliki infeksi laten (EH), mereka yang secara aktif tertular penyakit (IH), dan mereka yang telah sembuh dari penyakit (R.H.). populasi vektor yang rentan (SV), populasi vektor yang terpapar (EV), dan populasi vektor yang terinfeksi (IV) yakni tiga kelompok yang membentuk total populasi vektor. Model ini menggambarkan bahwa individu yang rentan penyakit akan terjangkit penyakit dulu sebelum terinfeksi, kemudian individu yang terjangkit penyakit ini lama kelamaan akan terinfeksi penyakit, setelah itu individu yang terinfeksi akan sembuh dengan kekebalan sementara terhadap penyakit tersebut. Maka dari itu, untuk mengatasi penyebaran penyakit Leptospirosis digunakan model matematika SEIRS-SEI.

2. METODE

Studi fundamental sedang dilakukan di sini. Teknik deskriptif digunakan untuk penelitian ini. Para ilmuwan telah menemukan bahwa hujan bisa memperburuk penyebaran leptospirosis. Penyebaran leptospirosis sedang dipelajari untuk mengungkap pemicu, gejala, dan ambang pengendapan.

1. Buat model matematis penyebaran leptospirosis dengan memperhitungkan curah hujan.
2. Menentukan titik kesetimbangan leptospirosis di bawah pengaruh presipitasi.



3. Dampak curah hujan terhadap stabilitas lokal di sekitar titik kesetimbangan penyebaran leptospirosis
4. Model matematis penularan leptospirosis dengan mempertimbangkan dampak curah hujan dianalisis dan hasilnya diinterpretasikan.
5. Menarik kesimpulan

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Model Matematika SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Langkah pertama dalam mengembangkan model matematika yakni mengidentifikasi masalah melalui perumusan pertanyaan yang relevan. Pada tahap ini, kami mengidentifikasi aspek-aspek yang krusial atau relevan dengan situasi yang dihadapi, seperti variabel, parameter, dan hubungan di antara mereka.

Asumsi yang digunakan pada model ini yakni:

1. Sebuah populasi tertutup
2. Ada fase inkubasi (masa laten) untuk leptospirosis. Bayi baru lahir dianggap sensitif terhadap penyakit ini.
3. Setiap kelompok memiliki anggota yang meninggal karena sebab alamiah.
4. Leptospirosis yakni penyakit yang bisa menyebabkan kematian pada orang yang terkena.
5. Dalam populasi manusia, mereka yang telah mengalahkan penyakit dan sekarang dianggap kebal akan kambuh dan terinfeksi.
6. Tidak ada masa pemulihan bagi populasi vektor penyebar penyakit.
7. Infeksi terjadi ketika orang yang rentan bersentuhan dengan orang yang terinfeksi.
8. Hujan deras dan peningkatan paparan leptospirosis

Variabel yang dipakai saat membentuk model matematika SEIRS-SEI dari penyebaran penyakit leptospirosis yang dipengaruhi curah hujan:

1. Kompartemen individu rentan terhadap penyakit leptospirosis (*susceptible*) dengan lambang S_h
2. Kompartemen individu terinfeksi oleh penyakit leptospirosis namun belum bisa menularkan penyakit (*exposed*) dengan lambang E_h
3. Kompartemen individu terinfeksi oleh penyakit leptospirosis serta bisa menularkan penyakit (*infectious*) dengan lambang I_h
4. Kompartemen individu sembuh dari penyakit leptospirosis (*recovered*) dengan lambang R_h
5. Kompartemen vektor rentan terhadap penyakit leptospirosis (*susceptible*) dengan lambang S_v
6. Kompartemen vektor terinfeksi oleh penyakit leptospirosis namun belum bisa menularkan penyakit (*exposed*) dengan lambang E_v
7. Kompartemen vektor terinfeksi oleh penyakit leptospirosis serta bisa menularkan penyakit (*infectious*) dengan lambang I_v

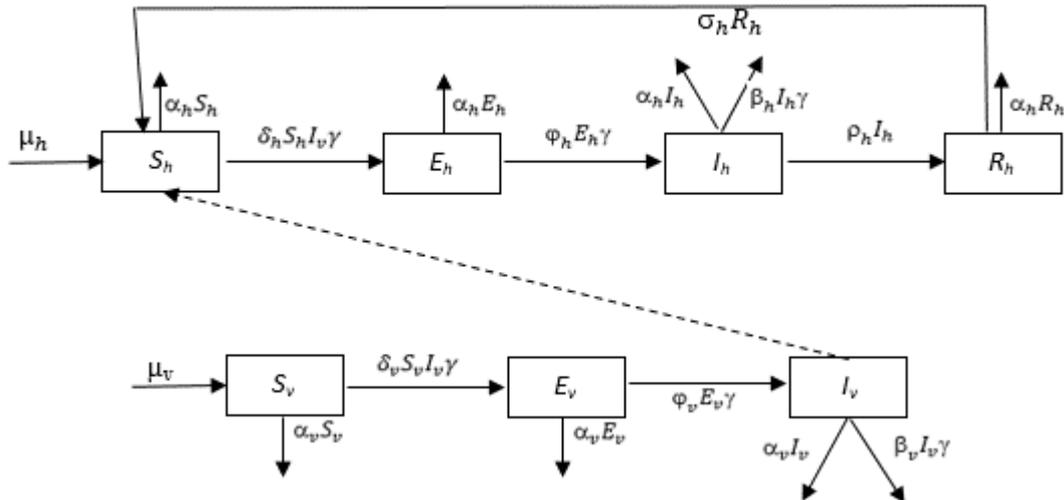
Parameter yang dipakai yakni:

1. μ_h yakni tingkat kelahiran dari manusia
2. μ_v yakni tingkat kelahiran dari vektor
3. α_h yakni tingkat kematian alami dari manusia
4. α_v yakni tingkat kematian alami dari vektor
5. β_h yakni tingkat kematian dari manusia sebab penyakit leptospirosis
6. β_v yakni tingkat kematian dari vektor sebab penyakit leptospirosis
7. δ_h yakni tingkat penularan penyakit ketika terjadi kontak antara manusia rentan dengan manusia terinfeksi
8. δ_v yakni tingkat penularan penyakit saat terjadi kontak diantara vektor rentan dan vektor terinfeksi
9. φ_h yakni tingkat perpindahan individu manusia laten menjadi manusia terinfeksi
10. φ_v yakni tingkat perpindahan individu vektor laten menjadi vektor terinfeksi



11. ρ_h yakni tingkat kesembuhan manusia terinfeksi
12. ρ_v yakni tingkat perubahan manusia yang sembuh menjadi manusia yang rentan kembali
13. γ yakni tingkat curah hujan (mm/hari)

Berlandaskan asumsi yang diberi, akibatnya bisa dibuat diagram model matematika SEIRS-SEI penyebaran penyakit leptospirosis dengan pengaruh curah hujan, seperti Gambar 2.



Gambar 2. Diagram Model Matematika SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Berlandaskan Gambar 2, bisa dibentuk model matematika seperti sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h + \sigma_h R_h - \alpha_h S_h - \delta_h S_h I_v \gamma \quad (1)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \delta_h S_h I_v \gamma - \alpha_h E_h - \phi_h E_h \gamma \quad (2)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \phi_h E_h \gamma - \alpha_h I_h - \beta_h I_h \gamma - \rho_h I_h \quad (3)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \rho_h I_h - \alpha_h R_h - \sigma_h R_h \quad (4)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v - \alpha_v S_v - \delta_v S_v I_v \gamma \quad (5)$$

$$\frac{dE_v}{dt} = \delta_v S_v I_v \gamma - \alpha_v E_v - \phi_v E_v \gamma \quad (6)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \phi_v E_v \gamma - \alpha_v I_v - \beta_v I_v \gamma \quad (7)$$

Dengan

$$T_1 = \alpha_h + \phi_h \gamma$$

$$T_2 = \alpha_h + \beta_h \gamma + \rho_h$$

$$T_3 = \alpha_h + \sigma_h$$

$$T_4 = \alpha_v + \phi_v \gamma$$

$$T_5 = \alpha_v + \beta_v \gamma$$

Titik ekuilibrium dari (1)-(7) yakni $(S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v)$ didapat saat $\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dE_h}{dt} = 0, \frac{dI_h}{dt} = 0, \frac{dR_h}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0, \frac{dE_v}{dt} = 0, \frac{dI_v}{dt} = 0$ sehingga diperoleh:

$$\mu_h + \sigma_h R_h - \alpha_h S_h - \delta_h S_h I_v \gamma = 0 \quad (8)$$

$$\delta_h S_h I_v \gamma - E_h T_1 = 0 \quad (9)$$

$$\phi_h E_h \gamma - I_h T_2 = 0 \quad (10)$$

$$\rho_h I_h - R_h T_3 = 0 \quad (11)$$

$$\mu_v - \alpha_v S_v - \delta_v S_v I_v \gamma = 0 \quad (12)$$



$$\delta_v S_v I_v \gamma - E_v T_4 = 0 \quad (13)$$

$$\phi_v E_v \gamma - I_v T_5 = 0 \quad (14)$$

3.2. Analisa Model Matematika SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, serta bilangan reproduksi dasar semuanya dihitung selama analisis model. Analisis model matematika, termasuk simulasi titik kesetimbangan di mana penyakit tidak ada dan di mana penyakit itu endemik,

- 1) Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit $P_0 = (S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v)$

Ketika leptospirosis di suatu komunitas mencapai titik kesetimbangan bebas yang disebabkan oleh pengaruh curah hujan, penyakit tidak lagi menyebar. Secara matematis bisa diapresikan dengan $S_h > 0, E_h = 0, I_h = 0, R_h = 0, S_v > 0, E_v = 0, I_v = 0$. akibatnya titik bebas penyebaran penyakit leptospirosis yakni:

$$P_0 = \left(\frac{\mu_h}{\alpha_h}, 0, 0, 0, \frac{\mu_v}{\alpha_v}, 0, 0 \right)$$

- 2) Titik Kesetimbangan Endemik dari Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan $P_1 = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, E_v^*, I_v^*)$

Titik kesetimbangan endemik menunjukkan bahwa persentase populasi tertentu rentan terhadap leptospirosis karena pengaruh cuaca terhadap penularan penyakit. Secara matematis bisa diekspresikan dengan $S_h^* > 0, E_h^* > 0, I_h^* > 0, R_h^* > 0, S_v^* > 0, E_v^* > 0, I_v^* > 0$. Akibatnya didapat titik endemik dari penyebaran penyakit leptospirosis dengan pengaruh curah hujan yakni:

$$P_1 = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, E_v^*, I_v^*)$$

$$S_h^* = \frac{\mu_h T_1 T_2 T_3}{I_v^* (\delta_h \gamma T_1 T_2 T_3 - \sigma_h \delta_h \phi_h \delta_h \gamma^2) + \alpha_h T_1 T_2 T_3}$$

$$= \frac{\mu_h T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \delta_v}{-T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \alpha_v \delta_h \gamma + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \alpha_h \delta_v + T_1 T_2 T_3 \mu_v \delta_v \phi_v \delta_h \gamma^2 + T_4 T_5 \alpha_v \sigma_h \rho_h \phi_h \gamma - \mu_v \delta_v \sigma_h \rho_h \phi_h \phi_v \gamma^3}$$

$$E_h^* = \frac{\delta_h S_h^* I_v^* \gamma}{T_1}$$

$$= \frac{\mu_h T_2 T_3 \delta_h (-\alpha_v T_4 T_5 + \mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2)}{-T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \alpha_v \delta_h \gamma + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \alpha_h \delta_v + T_1 T_2 T_3 \mu_v \delta_v \phi_v \delta_h \gamma^2 + T_4 T_5 \alpha_v \sigma_h \rho_h \phi_h \gamma - \mu_v \delta_v \sigma_h \rho_h \phi_h \phi_v \gamma^3}$$

$$I_h^* = \frac{\phi_h E_h^* \gamma}{T_2}$$

$$= \frac{\phi_h \mu_h T_3 \delta_h \gamma (-\alpha_v T_4 T_5 + \mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2)}{-T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \alpha_v \delta_h \gamma + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \alpha_h \delta_v + T_1 T_2 T_3 \mu_v \delta_v \phi_v \delta_h \gamma^2 + T_4 T_5 \alpha_v \sigma_h \rho_h \phi_h \gamma - \mu_v \delta_v \sigma_h \rho_h \phi_h \phi_v \gamma^3}$$

$$R_h^* = \frac{\rho_h I_h^*}{T_3} = \frac{\rho_h \phi_h \mu_h \delta_h \gamma (-\alpha_v T_4 T_5 + \mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2)}{-T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \beta_H \lambda_A + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \beta_A \lambda_H + T_1 T_2 T_3 \beta_H \beta_A \mu_A \epsilon_A + T_4 T_5 \beta_H \sigma_H \delta_H \epsilon_H \lambda_A - \mu_A \beta_H \beta_A \sigma_H \delta_H \epsilon_H \epsilon_A}$$

$$S_v^* = \frac{T_4 T_5}{\delta_v \phi_v \gamma^2}$$

$$I_v^* = \frac{-\alpha_v T_4 T_5 + \mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2}{T_4 T_5 \delta_v \gamma}$$

$$E_v^* = \frac{T_5 I_v^*}{\phi_v \gamma} = \frac{-\alpha_v T_4 T_5 + \mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2}{T_4 \delta_v \phi_v \gamma^2}$$

Syarat eksistensi titik tetap endemik:

Diperlukan syarat untuk hidup, seperti jumlah populasi di setiap kompartemen, untuk menjamin kelangsungan hidup suatu populasi yakni $S_h, E_h, I_h, R_h, S_v, E_v, I_v$ bernilai nonnegatif. Titik tetap endemik S_v^* bisa dijamin eksistensinya dikarenakan seluruh nilai parameter nilainya positif. Titik tetap endemik I_v^* bisa dijamin eksistensinya bila $\alpha_v < \frac{\mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2}{T_4 T_5}$ ini memberi arti bahwasanya guna tercapainya kondisi endemik tingkat kematian alami daripada individu vektor tak boleh melalui ambang batas senilai $\frac{\mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2}{T_4 T_5}$. Titik tetap endemik E_v^* bisa dijamin eksistensinya sebab I_v^* nilainya nonnegatif. Titik tetap endemik



S^*_h bisa dijamin eksistensinya sebab I^*_v nilainya nonnegatif dan $\delta_h\gamma T_1 T_2 T_3 > \sigma_h \delta_h \varphi_h \delta_h \gamma^2$. Titik tetap endemik E^*_h bisa dijamin eksistensinya sebab S^*_h dan I^*_v nilainya nonnegatif. Titik tetap endemik I^*_h bisa dijamin eksistensinya sebab E^*_h nilainya nonnegatif. Titik tetap endemik R^*_h bisa dijamin eksistensinya sebab I^*_h nilainya nonnegatif.

3) Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Dalam matematika epidemiologi, bilangan reproduksi dasar berfungsi sebagai kuantitas kunci, berfungsi sebagai ambang penularan penyakit. [16]. Untuk menganalisis bagaimana penyakit itu menyebar, para peneliti menghitung angka reproduksi fundamentalnya, yang diwakili oleh R_0 . Jumlah rata-rata infeksi sekunder yang disebabkan oleh infeksi primer yang menyebar ke subpopulasi yang rentan dengan lambang dengan R_0 . Anda bisa menggunakan Matriks Generasi Selanjutnya untuk mencari tahu apa itu R_0 . Model matematis SEIRS-SEI dari penularan leptospirosis di bawah pengaruh curah hujan bisa digunakan untuk menghitung bilangan reproduksi dasar, r_0 .

$$R_0 = \frac{(\mu_v \delta_v \varphi_v \gamma^2)}{(\alpha_v T_4 T_5)}$$

4) Kestabilan Model Matematika SEIRS-SEI Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Analisis di kestabilan titik tetap bisa dicari dengan cara memakai nilai eigen pada matrik Jacobian sistem (1)-(7) yang didapat:

$$J = \begin{vmatrix} -\delta_h I_v \gamma - \alpha_h & 0 & 0 & \sigma_h & 0 & 0 & -\delta_h S_h \gamma \\ \delta_h I_v \gamma & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_h S_h \gamma \\ 0 & \varphi_h \gamma & -T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_h & -T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_v I_v \gamma - \alpha_v & 0 & -\delta_v S_v \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_v I_v \gamma & -T_4 & \delta_v S_v \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_v \gamma & -T_5 \end{vmatrix}$$

Sebab terdapatnya dua jenis titik ekuilibrium, akibatnya analisis kestabilan titik ekuilibrium juga dilaksanakan pada kedua titik ekuilibrium.

a. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit dari Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan $P_0 = (\frac{\mu_h}{\alpha_h}, 0, 0, 0, \frac{\mu_v}{\alpha_v}, 0, 0)$

Nilai eigen negatif diperlukan untuk kestabilan titik kesetimbangan bebas pada perkembangbiakan leptospirosis di bawah pengaruh curah hujan. Matriks Jacobian untuk bebas dari penyakit ini:

$$J(P_0) = \begin{vmatrix} -\alpha_h & 0 & 0 & \sigma_h & 0 & 0 & -\frac{\delta_h \mu_h \gamma}{\alpha_h} \\ 0 & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta_h \mu_h \gamma}{\alpha_h} \\ 0 & \varphi_h \gamma & -T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_h & -T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_v & 0 & -\frac{\delta_v \mu_v \gamma}{\alpha_v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_4 & \frac{\delta_v \mu_v \gamma}{\alpha_v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_v \gamma & -T_5 \end{vmatrix}$$

Akibatnya persamaan yang terbentuk karakteristik dari matriks $J(P_0)$ yakni:

$$(\lambda + \alpha_h) (\lambda + \alpha_v) (\lambda + T_3)(\lambda + T_2) (\lambda + T_1) (\lambda^2 + (T_4 + T_5) \lambda + T_4 T_5 - \frac{\delta_v \mu_v \varphi_v \gamma^2}{\alpha_v}) = 0$$

bisa diperoleh nilai karakteristik:



$$\lambda_1 = -\alpha_h, \lambda_2 = -\alpha_v, \lambda_3 = -(\alpha_h + \sigma_h), \lambda_4 = -(\alpha_v + \varphi_v), \lambda_5 = -(\alpha_v + \beta_v\gamma)$$

Nilai karakteristik dari $(\lambda^2 + (T_4+T_5) \lambda + T_4T_5 - \frac{\delta_v\mu_v\varphi_v\gamma^2}{\alpha_v})$ dicari dengan cara memakai rumus persamaan kuadrat dan didapat hasil:

$$\lambda_6 = \frac{-(T_4 + T_5) + \sqrt{(T_4 + T_5)^2 - 4 \left(\frac{\alpha_v(T_4T_5) - \delta_v\mu_v\varphi_v\gamma^2}{\alpha_v} \right)}}{2}$$

$$\lambda_7 = \frac{-(T_4 + T_5) - \sqrt{(T_4 + T_5)^2 - 4 \left(\frac{\alpha_v(T_4T_5) - \delta_v\mu_v\varphi_v\gamma^2}{\alpha_v} \right)}}{2}$$

Keterangan:

$$T_4 = \alpha_v + \varphi_v\gamma$$

$$T_5 = \alpha_v + \beta_v\gamma$$

- b. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik dari Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan $P_1=(S_h^*, E_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, E_v^*, I_v^*)$

Titik kesetimbangan akan stabil bila seluruh nilai eigen dari matriks jacobian nilainya negative. Matriks jacobian dari titik kesetimbangan endemik ini yakni :

$$J(P_1) = \begin{vmatrix} -\delta_h I_v \gamma - \alpha_h & 0 & 0 & \sigma_h & 0 & 0 & -\delta_h S_h \gamma \\ \delta_h I_v \gamma & -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_h S_h \gamma \\ 0 & -\varphi_h \gamma & -T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_h & -T_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_v I_v \gamma - \alpha_v & 0 & -\delta_v S_v \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_v I_v \gamma & -T_4 & \delta_v S_v \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varphi_v \gamma & -T_5 \end{vmatrix}$$

Akibatnya persamaan yang terbentuk karakteristik dari matriks $J(P_1)$ yakni:

$$[(\lambda + \delta_v I_v \gamma + \alpha_v) ((\lambda + T_4)(\lambda + T_5) + (\delta_v S_v \varphi_v \gamma^2)) - (\delta_v^2 I_v S_v \gamma^2)][(\lambda - \delta_h I_v \gamma + \alpha_h) (\lambda + T_3)(\lambda + T_2)(\lambda + T_1) - (\delta_v I_v \rho_h \sigma_h \varphi_v \gamma^2)] = 0$$

- 5) Simulasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Nilai masing-masing parameter diperoleh melalui simulasi numerik model matematis penyebaran leptospirosis di bawah pengaruh curah hujan dengan menggunakan software Maple 18.

- a. Simulasi Model Matematika dengan Titik Tetap Bebas Penyakit Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Tabel 1. Nilai Parameter Bebas Penyakit

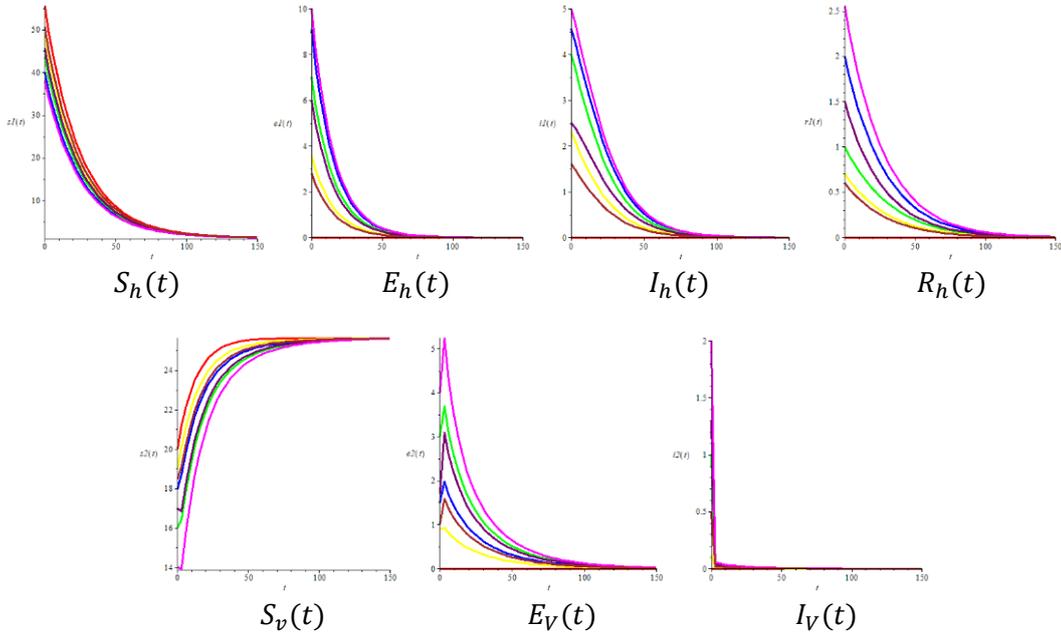
Parameter	Nilai
μ_h	0,05
μ_v	2
δ_h	0,04
δ_v	0,078
α_h	0,0009
α_v	0,1
φ_h	0,000002
φ_v	0,01
β_h	0,0008
β_v	0,001
σ_h	0,00285
ρ_h	0,0021
γ	30



Daripada nilai parameter di atas dihitung dahulu nilai R_0 yang didapat :

$$R_0=0.69420$$

Didapatlah $R_0 < 1$. Pada simulasi model matematika penyebaran penyakit leptospirosis dipakai tujuh nilai awal yakni $S_h = 55.5556, E_h = 0, I_h = 0, R_h = 0, S_v = 20, E_v = 0, I_v = 0$ serta didapat grafik setiap kompartemen terhadap waktu t yakni:



Gambar 3. Trayektori di Sekitar Titik Tetap Bebas Penyakit

Berlandaskan gambar 3, dengan menyesuaikan nilai awal dan parameter yang diberikan, bisa dilihat bahwasanya populasi individu rentan menurun lalu stabil di titik itu, populasi vektor rentan mengalami kenaikan serta stabil di titik itu. Sedangkan pada populasi individu laten, populasi individu terinfeksi, populasi individu sembuh, populasi vektor laten, dan populasi vektor terinfeksi tidak ada. Sehingga bisa dikatakan bahwa pada waktu tertentu penyebaran penyakit leptospirosis akan hilang.

- b. Simulasi Model Matematika dengan Titik Tetap Endemik Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Curah Hujan

Tabel 1. Nilai Parameter Endemik

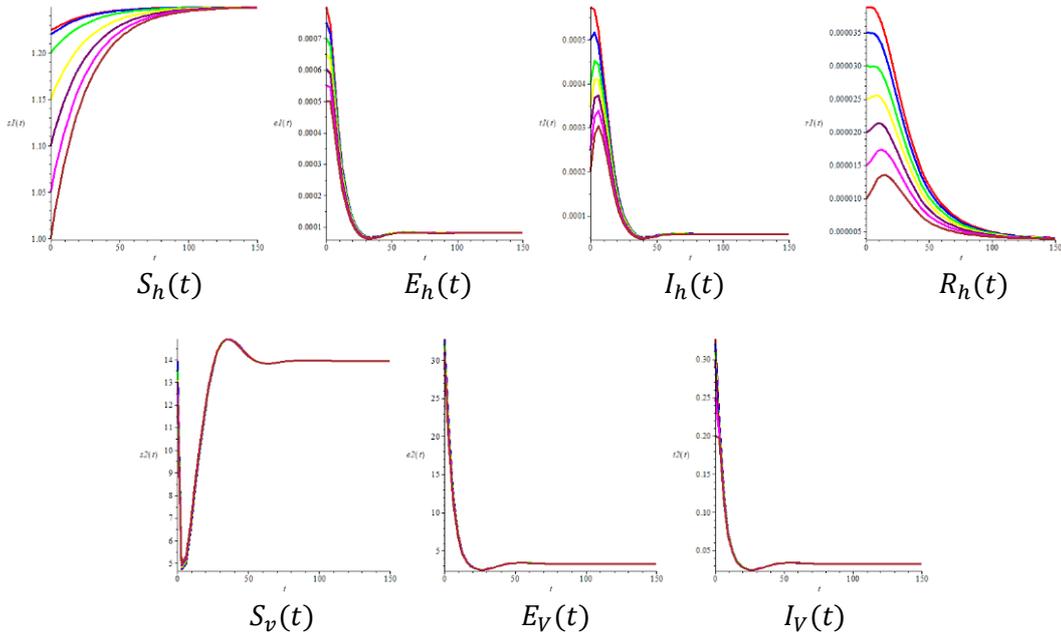
Parameter	Nilai
μ_h	0,05
μ_v	2
δ_h	0,04
δ_v	0,078
α_h	0,0009
α_v	0,1
ϕ_h	0,000002
ϕ_v	0,01
β_h	0,0008
β_v	0,001
σ_h	0,00285
ρ_h	0,0021
γ	200

Dengan nilai parameter seperti tabel di atas, dihitung nilai R_0 serta didapat hasil berikut:

$$R_0=1.83751$$



Didapat $R_0 > 1$. Pada simulasi model matematika penyebaran penyakit leptospirosis dipakai tujuh nilai awal yakni $S_h = 1.22412, E_h = 0.00079, I_h = 0.00057, R_h = 0.00004, S_v = 13.95421, E_v = 32.79035, I_v = 0.32663$ serta didapat grafik setiap kelompok terhadap waktu t yakni:



Gambar 4. Trayektori di Sekitar Titik Tetap Endemik

Berlandaskan pada gambar 4, dengan menyesuaikan nilai awal dan parameter yang diberikan, bisa dilihat bahwa populasi individu rentan stabil, populasi individu laten stabil, populasi individu terinfeksi stabil, populasi individu sembuh stabil, populasi vektor rentan mengalami penurunan dan terjadi peningkatan pada waktu tertentu, populasi vektor laten mengalami penurunan dan stabil pada waktu tertentu, dan populasi vektor terinfeksi mengalami penurunan dan stabil pada waktu tertentu. Sehingga bisa dikatakan bahwasanya pada waktu tertentu penyebaran penyakit leptospirosis akan mewabah.

4. KESIMPULAN

Analisis dan pemodelan telah menunjukkan bahwa intensitas curah hujan merupakan faktor utama dalam menentukan tingkat penyebaran leptospirosis melalui suatu populasi. Pengaruh faktor ini bisa dilihat dari nilai R_0 ,

$$R_0 = \frac{(\mu_v \delta_v \phi_v \gamma^2)}{(\alpha_v T_4 T_5)}$$

Hal ini terlihat bahwasanya tingkat penyebaran leptospirosis melalui kontak pribadi berhubungan dengan R_0 . Leptospirosis menjadi epidemi ketika tingkat penularan tinggi. Seperti yang terlihat dari simulasi, kondisi dengan parameter curah hujan 30 mm/hari menyebabkan grafik pada kelas manusia mendekati titik tetap bebas leptospirosis, yang menandakan bahwa penyebaran penyakit akan berhenti dalam waktu yang telah ditentukan. Sedangkan pada kondisi dengan parameter curah hujan 200 mm/hari, simulasi menunjukkan bahwa grafik kelas manusia bergerak menjauh dari titik tetap bebas penyakit serta mendekati titik tetap endemik leptospirosis, hal ini terlihat bahwasanya pada waktu tertentu penyebaran penyakit leptospirosis akan menjadi epidemi. Karena kebersihan sangat mempengaruhi tingkat penularan leptospirosis, maka setiap orang harus mempraktikkan



kebersihan diri dan lingkungan yang baik untuk mencegah penyebaran penyakit dan mencegah epidemi.

REFERENSI

- [1] I. M. Setiawan, "Pemeriksaan Laboratorium untuk Mendiagnosis Penyakit Leptospirosis," *Media Litbang Kesehatan*, pp. 87-94, 2008.
- [2] M. Okatini, R. Purwana and I. M. Djaja, "Hubungan Faktor Lingkungan dan Karakteristik Individu terhadap Kejadian Penyakit Leptospirosis," *Makara Kesehatan*, pp. 17-24, 2007.
- [3] Rejeki, D. S. S., Nurlaela, S and Octaviana, D., "Pemetaan dan Analisis Faktor Risiko Leptospirosis," *Kesmas Jurnal Kesehatan Nasional*, vol. 8, no. 4, pp. 179-186, 2008.
- [4] T. Ramadhani and B. Yunianto, "Reservoir dan Kasus Leptospirosis di Wilayah Kejadian Luar Biasa," *Kesmas Jurnal Kesehatan Masyarakat Nasional*, pp. 162-168, 2012.
- [5] Ristiyanto, F. D. H., "Distribusi dan Faktor Risiko Lingkungan Penularan Leptospirosis di Kabupaten Demak, Jawa Tengah," *Media Litbang Kesehatan*, vol. 18, no. 4, pp. 193-201, 2008.
- [6] Widoyono, *Penyakit Tropis: Epidemiologi, Penularan, Pencegahan & Pemberantasan*, Jakarta: Penerbit Erlangga, 2008.
- [7] Pramestuti N, Djati AP, Kesuma AP, "Faktor Risiko Kejadian Luar Biasa (KLB) Leptospirosis Paska Banjir di Kabupaten Pati Tahun 2014," *Vektora*, vol. 7, no. 1, pp. 1-6, 2015.
- [8] Departemen Kesehatan RI, *Pedoman Diagnosis dan Penatalaksanaan Kasus Penanggulangan Leptospirosis di Indonesia*, Jakarta: Departemen Kesehatan RI, 2008.
- [9] Masriadi, *Epidemiologi Penyakit Menular*, Depok: PT. Rajagrafindo Persada, 2014.
- [10] T. Ramadhani and B. Yunianto, "Kondisi Lingkungan Pemukiman yang Tidak Sehat Berisiko terhadap Kejadian Leptospirosis (Studi Kasus di Kota Semarang)," *Suplemen Media Penelitian dan Pengembangan Kesehatan*, vol. 20, no. 1, pp. 46-54, 2010.
- [11] Murtiningsih, *Faktor Risiko Leptospirosis di Provinsi Yogyakarta dan Sekitarnya*, Yogyakarta: Program Pascasarjana Ilmu Kesehatan Masyarakat, Universitas Gajah Mada, 2003.
- [12] W. Widjajanti, "Epidemiologi, Diagnosis dan Pencegahan Leptospirosis," *Journal of Health Epidemiology and Communicable Disease*, p. 64, 2019.
- [13] Rejeki, D. S. S., *Faktor Risiko Lingkungan yang Berpengaruh Terhadap Kejadian Leptospirosis Berat*, Semarang: UNDIP, 2005.
- [14] Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI, *Data dan Informasi Profil Kesehatan Indonesia 2006*, Jakarta, 2017.
- [15] N. H. Rampengan, "Leptospirosis," *Jurnal Biomedik (JBM)*, pp. 143-150, 2016.
- [16] F. Brauer, "Epidemic Models with Heterogeneous Mixing and Treatment," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 70, no. 1869, 2008.