Seputar Residu $b_{4,6}(n)$ Terhadap Modulo 2 dan Modulo 3

Fadhlan Zhaahiran[1], Uha Isnaini[2]
[1,2,]Prodi Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Gadjah Mada (UGM)
[3] Prodi Matematika, Universitas Gadjah Mada

Article Info

Article history:

Received February 03, 2023
Revised March 16, 2023
Accepted March 20, 2023

Keywords:

Number Theory
Integer Partition
Generating Function
Congruence
Residue

Kata Kuncis:

Teori Bilangan
Partisi bilangan bulat
Fungsi Pembangkit
Kongruensi
Residu

ABSTRACT

Integer partition is a branch of number theory that is still developing today. A partition of a positive integer n is a way to express n as a sum of positive integers without counting the order. Let $p(n)$ denote the number of partitions of n. We discover arithmetic properties of $b_{4,6}(n)$ which is the number of partitions of an integer n where the parts are not multiple by 4 or 6.

ABSTRAK

Teori partisi merupakan salah satu cabang ilmu di bidang teori bilangan yang masih berkembang hingga saat ini. Suatu partisi bilangan bulat positif n merupakan suatu cara untuk menyatakan n sebagai jumlahan dari bilangan bulat positif tanpa memperhatikan urutan. Selanjutnya $p(n)$ menyatakan banyaknya partisi dari n. Selanjutnya didefinisikan $b_{4,6}(n)$ yaitu banyaknya partisi dari bilangan bulat n dengan tidak ada penjumlahnya merupakan kelipatan 4 atau 6.

This is an open access article under the [CC BY-SA](#) license.

Fadhlan Zhaahiran

(Fadhlan Zhaahiran)
Prodi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Gadjah Mada, Bulaksumur, Yogyakarta, Indonesia 55281
Email: fadhlanzhaahiran23@gmail.com

ISSN: 2807-3460

1. PENDAHULUAN

Partisi dari bilangan bulat positif n adalah suatu cara untuk menyatakan n sebagai jumlahan dari bilangan bulat positif tanpa memperhatikan urutan. Sebagai contoh, semua partisi dari 5 adalah

5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1+1.

Selanjutnya notasi $p(n)$ menyatakan banyaknya partisi dari bilangan bulat n. Jadi, diperoleh $p(5) = 7$. Fungsi pembangkit $p(n)$ adalah

$$\sum_{n>0} p(n)q^n = (q,q)_\infty$$

dengan $(a,q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n), |q| < 1.$

Berbagai partisi dengan tambahan syarat telah dikembangkan, salah satunya adalah partisi t-regular sebagai berikut.

Definisi 1.1. (*Ramanujan)* Diberikan bilangan bulat positif n. Suatu partisi bilangan bulat n disebut t-regular jika tidak ada penjumlah yang habis dibagi oleh t.

Sebagai contoh, terdapat 6 partisi pada bilangan bulat 8 dengan penjumlahnya tidak habis dibagi oleh 2 yaitu,

7+1, 5+3, 5+1+1+1, 3+3+1+1, 3+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1+1.

Selanjutnya, $b_t(n)$ menyatakan banyaknya partisi t-regular. Jadi diperoleh $b_2(8) = 6$. Fungsi pembangkit dari $b_t(n)$ diberikan sebagai berikut

$$\sum_{n\geq 0} b_t(n)q^n = \frac{f_t}{f_1},$$

dengan $f_t = (q^t, q^t) = \prod_{k\geq 1} (1 - q^{kt}), |q| < 1.$

Beberapa kelompok peneliti telah mengkaji sifat-sifat aritmatika dari $b_t(n)$. Sebagai contoh Cui dan Gu [14] memperoleh beberapa keluarga tak hingga kongruensi untuk $b_t(n)$ dengan $t = 2,4,5,8,13$ dan 16 Sebagai contoh diberikan teorema berikut.

Teorema 1.2 (Cui dan Gu [14]). Untuk setiap bilangan bulat $\alpha \geq 0$ dan $n \geq 0$,

$$b_5\left(4.5^{2\alpha+1}n + \frac{31.5^{2\alpha} - 1}{6}\right) \equiv 0 \ (mod\ 2)$$
$$b_5\left(4.5^{2\alpha+1}n + \frac{79.5^{2\alpha} - 1}{6}\right) \equiv 0 \ (mod\ 2)$$
$$b_5\left(4.5^{2\alpha+2}n + \frac{83.5^{2\alpha+1} - 1}{6}\right) \equiv 0 \ (mod\ 2)$$
$$b_5\left(4.5^{2\alpha+2}n + \frac{107.5^{2\alpha+1} - 1}{6}\right) \equiv 0 \ (mod\ 2)$$

Begitu juga, oleh Abinash, K. dkk. [1] memperoleh beberapa keluarga tak hingga kongruensi untuk $b_t(n)$ dengan $t = 13, 17$ dan 23. Sebagai contoh diberikan teorema berikut.

Teorema 1.2 (Abinash, K. dkk. [1]). Untuk setiap bilangan bulat $k \geq 0$ dan $n \geq 0$,

$$b_{13}(7^{4k}n + \frac{7^{4\alpha}-1}{2}) \equiv 2^k b_{13}(n)\ (mod\ 2)$$
$$b_{17}(5^{4k}n + \frac{2(5^{4k}-1)}{3}) \equiv 2^k b_{17}(n)\ (mod\ 2)$$

Selanjutnya akan dilihat sifat aritmatika terkait $b_{t,m}(n)$, yaitu banyaknya partisi dari bilangan bulat positif n dengan tidak ada penjumlah yang habis dibagi oleh t atau m. Sebagai contoh, terdapat partisi pada bilangan bulat 10 dimana penjumlahnya tidak habis dibagi 4 atau 6 yaitu,

10,	5+1+1+1+1+1,	2+1+1+1+1+1+1+1+1,
9+1,	3+3+3+1,	1+1+1+1+1+1+1+1+1+1,
7+3,	3+3+2+2,	2+2+2+1+1+1+1,
7+2+1,	3+2+2+1+1,	2+2+1+1+1+1+1,
7+1+1+1,	3+2+1+1+1+1+1,	2+2+2+2+2,
5+5,	3+1+1+1+1+1+1+1,	5+2+1+1+1,
5+3+2,	3+3+2+1+1,	2+2+2+1+1.
5+3+1+1,	3+3+1+1+1+1,	
5+2+2+1,	3+2+2+2+1,	

Jadi, $b_{4,6}(10) = 25.$ Diberikan tabel nilai $b_{4,6}(n)$ untuk $n = 0,2,\ldots,15$ sebagai berikut

Tabel 1. Nilai antara n dan $b_{4,6}(n)$

n	$b_{4,6}(n)$
0	1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	8
7	11
8	14
9	19
10	25
11	32
12	41
13	52
`14	66
15	83

Pada paper ini, akan dibahas mengenai residu $b_{4,6}(n)$ terhadap modulo 2 dan 3.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian pada paper ini merupakan penelitian yang bersifat teoritis. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode deskriptif, yaitu dengan menganalisa teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas, serta berdasarkan pada studi kepustakaan. Langkah-langkah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

ISSN: 2807-3460

a. Mempelajari teori dasar mengenai partisi bilangan bulat,
b. Mempelajari teori dasar mengenai teori bilangan, mencakup sifat-sifat dasar kongruensi,
c. Mengamati nilai $b_{4,6}(n)$ untuk suatu bilangan bulat positif n.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pertama-tama diberikan definisi dari fungsi theta ramanujan sebagai berikut.

Definisi 3.1. (Fungsi theta Ramanujan). Didefinisikan fungsi theta $f(a,b)$ sebagai berikut

$$f(a,b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad |ab| < 1.$$

Berikutnya, diberikan tiga buah kasus khusus fungsi theta Ramanujan

$$\varphi(q) = f(q,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \frac{(q^2,q^2)_\infty^5}{(q,q)_\infty^2 (q^4,q^4)_\infty^2},$$

$$\psi(q) = f(q,q^3) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(q^2,q^2)_\infty^2}{(q,q)_\infty},$$

$$(q,q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

Bukti : Dapat dilihat pada [4].

Selanjutnya, akan diberikan fungsi pembangkit pada $b_{4,6}(n)$ sebagai berikut.

Teorema 3.2. Untuk setiap bilangan kompleks q dengan $|q| < 1$. Fungsi pembangkit dari $b_{4,6}(n)$ adalah sebagai berikut.

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n = \frac{(q^4,q^4)_\infty (q^6,q^6)_\infty}{(q,q)_\infty (q^{12},q^{12})_\infty}, \quad |q| < 1.$$

Bukti.

Diketahui bahwa $b_{4,6}(n)$ yaitu banyaknya partisi bilangan bulat positif n dimana tidak ada penjumlah yang habis dibagi oleh 4 atau 6 . Sehingga, diperoleh

$$\sum_{n\geq 0} b_{4,6}(n)q^n$$

$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^9)(1-q^{10})(1-q^{11})(1-q^{13})(1-q^{14})(1-q^{15})(1-q^{17}}$$

$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})(1-q^{20})(1-q^{24})(1-q^{28})(1-q^{32})(1-q^{36})(1-q^{40})(1-q^{44})(1-q^{48})\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)(1-q^7)(1-q^8)(1-q^9)(1-q^{10})(1-q^{11})(1-q^{12})\ \ldots}$$

$$\frac{(1-q^{6})(1-q^{12})(1-q^{18})(1-q^{24})(1-q^{30})(1-q^{36})(1-q^{42})(1-q^{48})(1-q^{54})(1-q^{60})(1-q^{66})(1-q^{72})\ldots\ldots}{(1-q^{12})(1-q^{24})(1-q^{36})(1-q^{48})(1-q^{60})(1-q^{72})(1-q^{84})(1-q^{96})(1-q^{108})(1-q^{120})(1-q^{132})(1-q^{144})\ldots\ldots}$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q^{4k})(1-q^{6k})}{(1-q^{k})(1-q^{12k})} = \frac{(q^4,q^4)_\infty (q^6,q^6)_\infty}{(q,q)_\infty (q^{12},q^{12})_\infty}$$

Berikutnya, akan diberikan beberapa teorema mengenai residu yang berlaku pada $b_{4,6}(n)$ dalam modulo 2 dan 3 sebagai berikut.

Teorema 3.3. Untuk setiap bilangan kompleks q dengan sifat $|q| < 1$ serta untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n \equiv \frac{f_1^3}{f_6} \quad (mod\ 2),$$

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(3n)q^n \equiv \frac{f_1}{f_2} \quad (mod\ 2),$$

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(3n+1)q^n \equiv \frac{f_3^3}{f_2} \quad (mod\ 2),$$

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(3n+2)q^n \equiv 0 \quad (mod\ 2).$$

Bukti.

Dengan menggunakan ekspansi binomial, dapat dibuktikan bahwa

$$f_1^2 \equiv f_2\ (mod\ 2).$$

Berdasarkan Teorema 3.2. dan Persamaan diperoleh

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n = \frac{(q^4,q^4)_\infty (q^6,q^6)_\infty}{(q,q)_\infty (q^{12},q^{12})_\infty} \equiv \frac{f_1^3}{f_6} \quad (\,mod\ 2).$$

Baruah dan Ojah [3] telah dibuktikan bahwa

$$\frac{f_4}{f_1} = \frac{f_{12}f_{18}^4}{f_3^3 f_{36}^2} + \frac{f_6^2 f_9^3 f_{36}}{f_3^4 f_{18}^2} + 2q^2 \frac{f_6 f_{18} f_{36}}{f_3^3}.$$

Sehingga, diperoleh

$$\frac{f_4}{f_1} \equiv f_3 + q f_9^3\ (mod\ 2).$$

ISSN: 2807-3460

Dengan demikian, diperoleh

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n = \frac{f_4 f_6}{f_1 f_{12}} = \frac{f_6 f_{18}^4}{f_3^3 f_{36}^2} + \frac{f_6^3 f_9^3 f_{36}}{f_{12} f_3^4 f_{18}^2} + 2q^2 \frac{f_6^2 f_{18} f_{36}}{f_{12} f_3^3} \equiv \frac{f_3}{f_6} + q\frac{f_9^3}{f_6} \ (mod\ 2).$$

Lebih lanjut, dengan menyamakan koefisien suku-suku yang melibatkan $q^{3n}, q^{3n+1}, q^{3n+2}$ pada kedua ruas dan mensubstitusi q^3 dengan q dan berdasarkan Teorema 3.2. secara berturut-turut diperoleh

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(3n)q^n \equiv \frac{f_1}{f_2} \quad (mod\ 2).$$

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(3n+1)q^n \equiv \frac{f_3^3}{f_2} \ (mod\ 2).$$

$$\sum_{n\geq 0} b_{4,6}(3n+2)q^n = 0 \quad (\ mod\ 2).$$

□

Akibat 3.4. Untuk setiap bilangan bulat positif n, $b_{4,6}(3n+2)$ merupakan bilangan genap.

Bukti. Berdasarkan Teorema 3.3. pada Poin 4, diketahui bahwa

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(3n+2)q^n = 0 \quad (mod\ 2).$$

Sehingga, untuk setiap bilangan kompleks q dengan sifat $|q| < 1$, diperoleh $b_{4,6}(n) \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Dengan demikian diperoleh $b_{4,6}(n) = 2k$ untuk suatu bilangan bulat positif k.

□

Teorema 3.5. Untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku

$$\sum_{4k+1 \ adalah \ bilangan \ kuadrat \ sempurna} b(3n-k) \equiv 1(\ mod\ 2)$$

jika dan hanya jika $24n+1$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

Bukti. Diketahui bahwa

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n = \frac{f_4f_6}{f_1f_{12}} = \frac{f_6f_{18}^4}{f_3^3f_{36}^2} + \frac{f_6^3f_9^3f_{36}}{f_{12}f_3^4f_{18}^2} + 2q^2\frac{f_6^2f_{18}f_{36}}{f_{12}f_3^3} \equiv \frac{f_3}{f_6} + q\frac{f_9^3}{f_6} (\ mod\ 2).$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\sum_{n\geq 0} b_{4,6}(n)q^n \sum_{s=-\infty}^{\infty} q^{3s(3s-1)} \equiv \sum_{n\geq 0} b_{4,6}(n)q^n \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s q^{3s(3s-1)}$$
$$\equiv f_3 + qf_9^3\ (mod\ 2).$$

Mudah ditunjukan bahwa

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n \sum_{s=-\infty}^{\infty} q^{3s(3s-1)} = \sum_{n>0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{4,6}(n-9s^2+3s)q^n.$$

Jadi, diperoleh

$$\sum_{n>0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{4,6}(n-9s^2+3s)q^n \equiv f_3 + qf_9^3\ (mod\ 2).$$

Lebih lanjut, menyamakan koefisien dari suku berupa q^{3n} dan mengubah q^3 dengan q, diperoleh

$$\sum_{n>0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{4,6}(3n-9s^2+3s)q^n \equiv f_1\ (mod\ 2).$$

Diketahui bahwa

$$f_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m\frac{3m-1}{2}} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m\frac{3m-1}{2}}\ (mod\ 2).$$

Jadi, diperoleh

$$\sum_{n>0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{4,6}(3n-9s^2+3s)q^n \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m\frac{3m-1}{2}}\ (mod\ 2).$$

Lebih lanjut, diperhatikan bahwa

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{4,6}(3n-9s^2+3s) \equiv 1\ (mod\ 2),$$

jika dan hanya jika $n = \frac{m(3m-1)}{2}$. Mudah ditunjukan bahwa $4k+1$ adalah bilangan kuadrat sempurna jika dan hanya jika $k = 9s^2 - 3s$ untuk setiap bilangan bulat s. Jadi, diperoleh

$$\sum_{4k+1\ adalah\ bilangan\ kuadrat\ sempurna} b(3n-k) \equiv 1(\ mod\ 2)$$

ISSN: 2807-3460

Mudah ditunjukan pula bahwa $24n+1$ merupakan bilangan kuadrat sempurna jika dan hanya jika $n=\frac{m(3m-1)}{2}$. Dengan demikian diperoleh

$$\sum_{4k+1 \text{ adalah bilangan kuadrat sempurna}} b(3n-k) \equiv 1(\bmod 2)$$

jika dan hanya jika $24n+1$ merupakan bilangan kuadrat. ▢

Teorema 3.6. Untuk setiap bilangan kompleks q dengan sifat $|q|<1$ berlaku

$$\sum_{n>0} b_{4,6}(n)q^n \equiv \frac{\varphi(q)f_1}{f_2^2} \ (\bmod 3)$$

Bukti. Mudah ditunjukan bahwa

$$(q,q)_\infty^3 \equiv (q^3,q^3)_\infty \ (\bmod 3).$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$\sum_{n\geq 0} b_{4,6}(n)q^n = \frac{(q^4,q^4)_\infty(q^6,q^6)_\infty}{(q,q)_\infty(q^{12},q^{12})_\infty} = \frac{(q^4,q^4)_\infty^3(q^6,q^6)_\infty}{(q,q)_\infty(q^4,q^4)_\infty^2(q^{12},q^{12})_\infty} \equiv \frac{(q^2,q^2)_\infty^3}{(q,q)_\infty(q^4,q^4)_\infty^2} \equiv \frac{\varphi(q)f_1}{f_2^2} \ (\bmod 3).$$

▢

4. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan pada penelitian ini didapat kesimpulan bahwa residu dari deret pangkat formal $b_{4,6}(n)$ terhadap modulo 2 yaitu $\frac{f_1^3}{f_6}$. Di sisi lain, didapat bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, $b_{4,6}(3n+2)$ merupakan bilangan genap. Adapun residu dari deret pangkat formal $b_{4,6}(n)$ terhadap modulo 3 yaitu $\frac{\varphi(q)f_1}{f_2^2}$.

REFERENSI

[1] Abinash, S., Kathiravan, T., & Srilakshmi, K. (2019). Some New Congruences for l-Regular Partitions Modulo l. *arXiv preprint arXiv:1907.08848*.

[2] Andrews, G. E., 1984, The Theory of Partition. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

[3] Andrews, G. E., and Eriksson, K. (2004). Integer partitions. Cambridge University Press.

[4] Andrews, G. E. dan Berndt, B. C., 2005, Ramanujan Lost Notebook Part I. Springer Science+Business Media, Inc., NewYork.

[5] Andrews, G. E. dan Berndt, B. C., 2005, Ramanujan Lost Notebook Part II. Springer Science+Business Media, Inc., NewYork.

[6] Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R., Roy, R., & Askey, R. (1999). *Special functions* (Vol. 71,

pp. xvi+-664). Cambridge: Cambridge university press.
[7] Baruah, N. D., and Ojah, K. K. (2012). Analogues of Ramanujan’s partition identities and congruences arising from his theta functions and modular equations. The Ramanujan Journal, 28(3), 385-407.
[8] Baruah, N. D., and Ojah, K. K. (2015). Partitions With Designated Summands in Which All Parts Are Odd. Integers, 15(A9), 16.
[9] Berndt, B. C. (2006). Number theory in the spirit of Ramanujan (Vol. 34). American Mathematical Soc..
[10] Berndt, B. (2019). The Power of q: A Personal Journey.
[11] Berndt, B. C. 2012. Ramanujan’s notebooks: Part III. Springer Science and Business Media.
[12] Chan, H. C. (2011). *An invitation to q-series: from Jacobi's triple product identity to Ramanujan's" most beautiful identity"*. World Scientific.
[13] Chen, C. C., Koh, K. M., & Khee-Meng, K. (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific.
[14] Cui, S. P., dan Gu, N. S. (2013). Arithmetic properties of ℓ-regular partitions. Advances in Applied Mathematics, 51(4), 507-523.
[15] Hardy, G. H., dkk. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford Mathematics.