Interpretasi Kombinatorial Kongruensi Fungsi Partisi Biner Modulo 2

Agung Aldhi Prastya[1], Uha Isnaini[2]
[1,2],Prodi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Gadjah Mada (UGM)

Article Info

Article history:

Received January 30, 2023
Revised February 24, 2023
Accepted March 20, 2023

Keywords:

Integer Partition
Binary Partition
Congruence
Combinatorial Proof

Kata Kuncis:

Partisi Bilangan Bulat
Partisi Biner
Kongruensi
Bukti Kombinatorial

ABSTRACT

A partition of a positive integer n is a non-increasing sequence of finite positive integers such that the sum is equal to n. One thing that is studied by some researchers in integer partition is binary partition. A binary partition of a positive integer n is a non-increasing sequence of finite positive integers that are powers of 2 and sum to n. The number of binary partitions of n is denoted by $b(n)$ and is called the binary partition function. In this study, we provides a combinatorial interpretation of a congruence of binary partition functions modulo 2. The interpretation involves dividing all binary partitions of n into two sets with the same cardinality using a bijective function that maps binary partitions satisfying certain conditions to binary partitions satisfying other conditions.

ABSTRAK

Partisi bilangan bulat positif n adalah barisan tak naik atas bilangan bulat positif berhingga sehingga jumlahnya adalah n. Salah satu hal yang dikaji oleh beberapa peneliti dalam partisi bilangan bulat adalah partisi biner. Partisi biner dari bilangan bulat positif n adalah barisan tak naik atas bilangan bulat positif berhingga yang merupakan pangkat dari 2 dan jumlahnya adalah n. Banyaknya partisi biner dari n dinotasikan dengan $b(n)$ dan disebut fungsi partisi biner. Pada penelitian ini, diberikan interpretasi kombinatorial kongruensi fungsi partisi biner modulo 2. Interpretasi diberikan dengan cara membagi semua partisi biner dari n ke dalam dua himpunan dengan kardinalitas yang sama melalui konstruksi fungsi bijektif yang memetakan partisi biner dengan syarat tertentu ke partisi biner dengan syarat tertentu lainnya.

Agung Aldhi Prastya

(Agung Aldhi Prastya)
Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Gadjah Mada, Jl. Geografi, Sendowo, Sinduadi, Kec. Mlati, Kabupaten Sleman 55281 Sleman, Yogyakarta
Email: aldhiprastya@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Partisi bilangan bulat n adalah barisan bilangan bulat positif berhingga $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ dengan sifat

$$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \cdots \geq k_m$$

dan

$$n = \sum_{i=1}^{m} k_i \,;$$

ISSN: 2807-3460

dengan k_i disebut penjumlah pada partisi dari n. Dinotasikan $p(n)$ sebagai banyaknya partisi dari n dan ditetapkan $p(0) = 1$. Fungsi pembangkit partisi bilangan bulat diberikan sebagai berikut [1]:

$$P(q) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}, |q| < 1.$$

Selanjutnya, banyaknya partisi biner dari n, yaitu, banyaknya cara merepresentasikan bilangan bulat positif n sebagai

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \cdots + 2^{a_k},$$

untuk suatu bilangan bulat tak negatif $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ dengan sifat $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k$, dinotasikan dengan $b(n)$ dan disebut fungsi partisi biner.
Ditetapkan $b(0) = 1$. Sebagai contoh, dapat dicek bahwa $b(4) = 4$, yaitu

$$\begin{aligned} 4 &= 2^2, \\ 2+2 &= 2^1 + 2^1, \\ 2+1+1 &= 2^1 + 2^0 + 2^0, \\ 1+1+1+1 &= 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0. \end{aligned}$$

Untuk setiap bilangan kompleks q dengan $|q| < 1$, fungsi pembangkit untuk $b(n)$ diberikan sebagai berikut [2]:

$$B(q) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\, q^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2^n}}.$$

Selain itu, Churchhouse [2] telah membahas kongruensi modulo 2,4, dan 8 dari $b(n)$ beserta buktinya. Pada penelitian selanjutnya, [3]-[15] telah melengkapi penelitian Churchhouse, yaitu dengan mendaftar semua kongruensi yang mungkin dari $b(n)$ dalam modulo 8, 16, dan 32.

Sebelumnya, Churchhouse [2] telah membuktikan kongruensi $b(n)$ modulo 2 menggunakan induksi matematika. Pada penelitian ini, diberikan bukti alternatif terkait kongruensi $b(n)$ modulo 2 melalui interpretasi kombinatorial menggunakan konstruksi fungsi bijektif yang memetakan partisi biner dengan syarat tertentu ke partisi biner dengan syarat tertentu lainnya. Akibat dari fungsi bijektif ini adalah kardinalitas dari kedua himpunan partisi biner tersebut sama, sehingga dapat disimpulkan bahwa $b(n)$ selalu bernilai genap untuk setiap bilangan bulat positif n dengan $n \geq 2$.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur buku ataupun penelitian sebelumnya tentang partisi bilangan bulat dan partisi biner. Referensi utama yang digunakan yaitu *paper* yang disusun oleh Churchhouse [2] dengan judul "*Congruences properties of the binary partition function*". Dari *paper* tersebut, penulis memberikan alternatif bukti berupa interpretasi kombinatorial terkait kongruensi fungsi partisi biner dalam modulo 2.

Langkah pertama yang dilakukan adalah mempelajari konsep dasar yang diperlukan, salah satunya konsep dasar partisi bilangan bulat dan partisi biner. Dalam mempelajari partisi bilangan bulat, dipelajari fungsi pembangkit dan pembuktian bijektif fungsi partisi. Langkah berikutnya adalah mempelajari partisi biner, dipelajari fungsi pembangkit dan relasi rekurensi fungsi partisi biner. Selain itu, juga dipelajari kongruensi fungsi partisi biner. Terakhir, dipelajari konsep interpretasi kombinatorial sebelum mempelajari interpretasi kombinatorial fungsi partisi biner.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

3.1. Interpretasi Kombinatorial Kongruensi Fungsi Partisi Biner Modulo 2

Pada subbab ini akan dibahas interpretasi kombinatorial kongruensi fungsi partisi biner modulo 2, yaitu

$$b(n) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \forall n \geq 2.$$

Sebelumnya, untuk setiap bilangan bulat n dengan $n \geq 2$, didefinisikan himpunan A_n dan B_n sebagai berikut:

$$A_n = \{x : x \text{ partisi biner dari } n \text{ dengan penjumlah sebanyak genap}\}$$

dan

$$B_n = \{x : x \text{ partisi biner dari } n \text{ dengan penjumlah sebanyak ganjil}\}.$$

Sebagai contoh, mudah dicek bahwa

$$A_4 = \{2^1 + 2^1, 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0\}$$

dan

$$B_4 = \{2^2, 2^1 + 2^0 + 2^0\}.$$

Selanjutnya, dibentuk pengaitan $f: A_n \to B_n, \quad x \mapsto x'$, dengan

$$x = \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s}$$

dan

$$x' = \begin{cases} \underbrace{2^{x_1-1} + 2^{x_1-1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s+1}, & x_1 \neq x_2; \\ \underbrace{2^{x_1+1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s-1}, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

untuk suatu bilangan bulat tak negatif s, dimana $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ merupakan bilangan bulat tak negatif dengan $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_k$.

Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi bijektif.

1. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi.

   Bukti. Diperhatikan bahwa $\mathrm{Dom}(f) = A_n$. Selanjutnya, diambil sebarang

   $$x = \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s}, y = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \in A_n,$$

   untuk suatu bilangan bulat tak negatif s dan t, dengan $x = y$. Akan dibuktikan bahwa $f(x) = f(y)$. Ditinjau 2 kasus yang mungkin sebagai berikut.

   a. Akan ditinjau kasus $x_1 \neq x_2$. Diperhatikan bahwa

   $$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{2^{x_1-1} + 2^{x_1-1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s+1} \\ &= \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} \\ &= \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &= \begin{cases} \underbrace{2^{y_1-1} + 2^{y_1-1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1}, & y_1 \neq y_2; \\ \underbrace{2^{y_1+1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t-1}, & y_1 = y_2 \end{cases} \\ &= f(y). \end{aligned}$$

ISSN: 2807-3460

b. Akan ditinjau kasus $x_1 = x_2$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{2^{x_1+1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s-1} \\ &= \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} \\ &= \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} \\ &= \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &= \begin{cases} \underbrace{2^{y_1-1} + 2^{y_1-1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1}, & y_1 \neq y_2; \\ \underbrace{2^{y_1+1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t-1}, & y_1 = y_2 \end{cases} \\ &= f(y). \end{aligned}$$

Karena pengambilan x dan y sebarang, berdasarkan Poin 1.a dan 1.b di atas, diperoleh bahwa f bersifat *well-defined*.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi. ■

2. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi injektif.

Bukti. Diambil sebarang

$$x = \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s}, y = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \in A_n,$$

untuk suatu bilangan bulat tak negatif s dan t, dengan $f(x) = f(y)$.

Akan dibuktikan bahwa $x = y$. Ditinjau 4 kasus yang mungkin sebagai berikut.

a. Akan ditinjau kasus $x_1 \neq x_2$ dan $y_1 \neq y_2$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1-1} + 2^{x_1-1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s+1} \\ &\quad = \underbrace{2^{y_1-1} + 2^{y_1-1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

b. Akan ditinjau kasus $x_1 \neq x_2$ dan $y_1 = y_2$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1-1} + 2^{x_1-1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s+1} \\ &\quad = \underbrace{2^{y_1+1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t-1} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

c. Akan ditinjau kasus $x_1 = x_2$ dan $y_1 \neq y_2$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1+1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s-1} = \underbrace{2^{y_1-1} + 2^{y_1-1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

d. Akan ditinjau kasus $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1+1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s-1} = \underbrace{2^{y_1+1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t-1} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_1} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow \underbrace{2^{x_1} + 2^{x_2} + 2^{x_3} + \cdots + 2^{x_k}}_{2s} = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Berdasarkan Poin 2.a, 2.b, 2.c, dan 2.d di atas, diperoleh $x = y$. Karena pengambilan x dan y sebarang, disimpulkan bahwa f merupakan fungsi injektif. ■

3. Akan dibuktikan bahwa f merupakan fungsi surjektif.

Bukti. Diambil sebarang

$$y = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1} \in B_n,$$

untuk suatu bilangan bulat tak negatif t, dimana $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ merupakan bilangan bulat tak negatif dengan $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \cdots \geq y_k$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat $x \in A_n$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Ditinjau 2 kasus yang mungkin sebagai berikut.

a. Akan ditinjau kasus $y_1 \neq y_2$. Dipilih

$$x = \underbrace{2^{y_1-1} + 2^{y_1-1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2(t+1)} \in A_n.$$

Diperoleh

$$f(x) \quad = \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1} = y.$$

b. Akan ditinjau kasus $y_1 = y_2$. Dipilih

$$x = \underbrace{2^{y_1+1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t} \in A_n.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_1} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1} \\ &= \underbrace{2^{y_1} + 2^{y_2} + 2^{y_3} + \cdots + 2^{y_k}}_{2t+1} \\ &= y. \end{aligned}$$

Berdasarkan Poin 3.a dan 3.b di atas, diperoleh $f(x) = y$. Karena pengambilan y sebarang, dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi surjektif. ■

Dengan demikian, berdasarkan Poin 1, 2, dan 3 di atas, dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi bijektif. ■
Akibatnya, diperoleh $|A_n| = |B_n|$, sehingga

$$b(n) = |A_n| + |B_n| = 2|A_n| \equiv 0 \pmod 2.$$

Jadi, terbukti bahwa $b(n) \equiv 0 \pmod 2$ untuk setiap $n \geq 2$. ■

3.2. Ilustrasi Bukti Kombinatorial

Pada subbab ini diberikan ilustrasi bukti kombinatorial pada Subbab 3.1 di atas. Diperhatikan contoh berikut. Diberikan $n = 8$. Semua partisi biner dari 8 diberikan pada tabel berikut.

Simbol	Partisi biner dari 8
λ_1	2^3,
λ_2	$2^2 + 2^2$,
λ_3	$2^2 + 2^1 + 2^1$,
λ_4	$2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^0$,
λ_5	$2^2 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$,
λ_6	$2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^1$,
λ_7	$2^1 + 2^1 + 2^1 + 2^0 + 2^0$,
λ_8	$2^1 + 2^1 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$,
λ_9	$2^1 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$,
λ_{10}	$2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$.

Tabel 1. Semua Partisi Biner dari 8

Berdasarkan definisi, A_8 dan B_8, berturut-turut, merupakan himpunan semua partisi biner dari 8 dengan penjumlah sebanyak genap dan himpunan semua partisi biner dari 8 dengan penjumlah sebanyak ganjil. Sebagai contoh, $\lambda_6 \in A_8$ sebab banyaknya penjumlah pada partisi λ_6 ada sebanyak 4 (genap). Akibatnya, diperoleh

$$A_8 = \{\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_8, \lambda_{10}\} \qquad \text{dan} \qquad B_8 = \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_7, \lambda_9\}.$$

Lebih lanjut, $f: A_8 \to B_8$ dengan

$$\lambda_2 \mapsto \lambda_1;$$
$$\lambda_4 \mapsto \lambda_7;$$
$$\lambda_6 \mapsto \lambda_3;$$
$$\lambda_8 \mapsto \lambda_5;$$
$$\lambda_{10} \mapsto \lambda_9;$$

Dengan demikian, $|A_8| = 5 = |B_8|$ sehingga $b(8) = |A_8| + |B_8| = 5 + 5 = 10 \equiv 0 \pmod 2$.

4. KESIMPULAN

Dalam membuktikan kongruensi $b(n) \equiv 0 \pmod 2$ untuk setiap $n \geq 2$ menggunakan interpretasi kombinatorial, ide yang digunakan adalah mengelompokkan semua partisi biner dari n ke dalam dua himpunan dengan kardinalitas yang sama besar. Dalam pembahasan, dinotasikan dua himpunan ini dengan A_n dan B_n, yaitu, berturut-turut, himpunan semua partisi biner dari n dengan penjumlah sebanyak genap dan himpunan semua partisi biner dari n dengan penjumlah sebanyak ganjil. Hal ini dapat dilakukan dengan mengonstruksi fungsi bijektif $f: A_n \to B_n$. Setelah fungsi bijektif f terbentuk, menggunakan fakta bahwa

$$b(n) = |A_n| + |B_n|,$$

diperoleh kesimpulan bahwa $b(n)$ merupakan bilangan genap untuk setiap $n \geq 2$.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat diselidiki interpretasi kombinatorial dari kedua kongruensi berikut berlaku:

$$b(n) \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow n \vee n - 1 = 4^m(2k + 1), m \geq 1;$$
$$b(n) \not\equiv 0 \pmod 8, \forall n \geq 1.$$

REFERENSI

[1] Andrews, G. E. (1984). *The Theory of Partitions*. Cambridge University Press.
[2] Churchhouse, R.F. (1969). Congruences properties of the binary partition function. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 2, 66,* 371-376.
[3] Hirschhorn, M. D. & Loxton, J. H. (1975). Congruence properties of the binary partition function, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 78,* 437-442.
[4] Kachi, Y. & Tzermias, P. (2018). On the m-ary partition numbers, *Algebra and Discrete Mathematics,* 1, 19, 67-76.
[5] Anders, K., Dennison, M., Lansing, J. W., & Reznick, B. (2013). Congruence properties of binary partition functions. *Annals of Combinatorics*, *17*(1), 15-26.
[6] Sobolewski, B., & Ulas, M. (2022). Values of binary partition function represented by a sum of three squares. *arXiv preprint arXiv:2211.16622*.
[7] Ulas, M., & Żmija, B. (2019). On arithmetic properties of binary partition polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, *110*, 153-179.
[8] Andrews, G. E., Fraenkel, A. S., & Sellers, J. A. (2015). Characterizing the Number of m-ary Partitions Modulo m. *The American Mathematical Monthly*, *122*(9), 880-885.
[9] Rucci, L. E. (2016). *The K th M-ary Partition Function*. Indiana University of Pennsylvania.
[10] Folsom, A., Homma, Y., Ryu, J. H., & Tong, B. (2016). On a general class of non-squashing partitions. *Discrete Mathematics*, *339*(5), 1482-1506.
[11] Dilcher, K., & Ericksen, L. (2019). Polynomial Analogues of Restricted b-ary Partition Functions. *J. Integer Seq.*, *22*(3), 19-3.
[12] Dilcher, K., & Ericksen, L. (2021). Polynomial analogues of restricted multicolor b-ary partition functions. *International Journal of Number Theory*, *17*(02), 371-391.
[13] Sun, L. H., & Zhang, M. (2018). On the enumeration and congruences for m-ary partitions. *Journal of Number Theory*, *185*, 423-433.
[14] Blair, D. (2018). Recurrence Identities of b-ary Partitions. In *Combinatorial and Additive Number Theory II: CANT, New York, NY, USA, 2015 and 2016* (pp. 53-83). Cham: Springer International Publishing.
[15] Latapy, M. (2021). Partitions of an Integer into Powers. *arXiv preprint arXiv:2101.08312*.