Fungsi Phi Euler Pada Grup *Gaussian Integer*

Febry Regina Manik[1], Yusmet Rizal[2]
[1,2],Prodi Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received January 26, 2023
Revised February 06, 2023
Accepted December 20, 2023

Keywords:

Phi Euler
Bilangan Bulat
Gaussian Integer
Gaussian Prime
Norm

Kata Kuncis:

Phi Euler
Integer
Gaussian Integer
Gaussian Prime
Norm

ABSTRACT

One of the function that working in integer is phi euler function. Phi euler is defined as a function that representing number of integer less than m and relatively prime with m. This function is many used in group theory. This study can be categorized as a basic study. The method using to do this study is doing analysis on theory study that related with the concept of definition of phi euler function in the group of gaussian integer. The results of this study is see phi euler function as a number of gaussian integer that invertible modulo with $(a+bi)$. Phi euler function in gaussian integer can be applicated using norm. Norm function is mapping gaussian integer to integer. Norm function is possible for us to determine the unit and gaussian prime so we can calculate the phi euler function.

ABSTRAK

Salah satu fungsi yang bekerja pada bilangan bulat adalah fungsi phi euler. Fungsi phi euler didefinisikan sebagai fungsi yang merepresentasikan banyaknya bilangan bulat yang kurang dari m yang relatif prima dengan m. Fungsi ini banyak digunakan dalam teori grup. Penelitian ini dapat dikategorikan sebagai penelitian dasar. Metode penelitian yang digunakan adalah dengan melakukan analisis pada kajian teori yang berkaitan dengan konsep pendefinisian fungsi phi euler pada grup *gaussian integer*. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini yakni memandang definisi fungsi phi euler sebagai jumlah *gaussian integer* yang invertibel modulo dengan $(a+bi)$. Fungsi phi euler pada bilangan bulat gaussian dapat diaplikasikan menggunakan fungsi norm. Fungsi norm berguna untuk memetakan *gaussian integer* ke bilangan bulat. Fungsi norm juga memungkinkan kita untuk dapat menentukan unit dan *gaussian prime* sehingga dapat dilakukan penghitungan fungsi phi euler.

Penulis Pertama

Febry Regina Manik
Prodi Matematika,Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka,Air Tawar barat,Padang Utara, Padang, 25171 Padang,Sumatera Barat
Email: febryfortune04f@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Aljabar merupakan salah satu bidang kajian dalam matematika. Aljabar dapat didefinisikan sebagai ilmu matematika yang memanipulasi simbol dan relasi. Relasi yang dibahas merupakan relasi antar himpunan. Himpunan merupakan kumpulan objek baik secara kongkrit maupun abstrak yang dapat didefinisikan dengan jelas. [1]

Salah satu contoh himpunan adalah himpunan bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$ dan terdiri atas bilangan bulat positif, negatif, dan nol. Pada bilangan bulat dapat dilakukan operasi-operasi hitung dasar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Untuk setiap operasi yang dilakukan pada himpunan bilangan bulat akan menyebabkan sifat yang berbeda pada bilangan bulat.

Dalam teori bilangan terdapat banyak fungsi yang bekerja pada bilangan bulat. Salah satu fungsi tersebut adalah fungsi phi euler. Fungsi phi euler biasa ditulis sebagai $\varphi(m)$ dapat didefinisikan sebagai fungsi yang merepresentasikan banyaknya bilangan bulat yang kurang dari m yang relatif prima dengan m [2]. Fungsi phi euler dalam dalam bilangan bulat dapat diaplikasikan dalam grup. Grup merupakan himpunan yang dilengkapi oleh operasi biner. Aplikasi fungsi phi euler terlihat dalam grup yang dibentuk atas bilangan bulat yaitu grup bilangan bulat modulo m. Fungsi phi euler diaplikasikan untuk mencari jumlah generator pada grup bilangan bulat modulo m [3]. Fungsi ini juga dapat diaplikasikan untuk mencari orde dari grup unit.

Selain pendefinisian fungsi phi euler pada bilangan bulat, terdapat pula pendefinisian fungsi phi euler pada bilangan kompleks atas bilangan bulat. Komponen penyusun bilangan kompleks adalah komponen real a yang dinyatakan sebagai $Re(z) = a$ dan komponen imajiner bi yang dinyatakan sebagai $Im(z) = b$ [4]. Bilangan kompleks yang komponen real dan imajinernya merupakan bilangan bulat disebut sebagai bilangan bulat gaussian. Bilangan bulat gaussian dilambangkan dengan $\mathbb{Z}[i]$.

Salah satu perbedaan paling mencolok antara bilangan real dan bilangan kompleks adalah konsep keterurutan. Pada bilangan kompleks tidak berlaku keterurutan[5]. Dalam bilangan kompleks tidak dapat ditentukan bilangan mana yang lebih besar atau lebih kecil ketika bagian imajiner tidak sama dengan nol. Sementara itu pendefinisian umum fungsi phi euler membutuhkan keterurutan. Hal ini yang kemudian menarik perhatian peneliti untuk mencaritahu pendefinisian fungsi phi euler pada grup bilangan kompleks atas komponen bilangan bulat atau yang dikenal dengan *gaussian integer*. Penelitian ini akan mencari tahu apakah fungsi phi euler dapat diaplikasikan pada domain *gaussian integer*.

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah ini adalah memandang phi euler dengan pendefinisian yang berbeda [5]. Untuk menyusun definisi baru tersebut dibutuhkan struktur yang jelas sehingga pendefinisiannyapun jelas. Penelitian [5] telah melakukan pendefinisian secara umum namun tidak gamblang. Hal baru dalam penelitian ini adalah menyajikan secara sistematis dan rinci mengenai pendefinisian fungsi phi euler pada himpunan-himpunan bagian dari *gaussian integer* yakni *gaussian unit*, *gaussian prime*, dan *gaussian non-unit* dan *non-prime*. Oleh sebab itu akan dirujuk kajian-kajian teori yang relevan dengan masalah ini.

2. BILANGAN BULAT GAUSSIAN

Himpunan bilangan bulat gaussian merupakan himpunan bagian dari bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Bilangan bulat gaussian dilambangkan dengan $\mathbb{Z}[i]$, dan domain integral dari bilangan bulat gaussian didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \quad (1)$$

Pada bilangan kompleks dikenal fungsi norm. Fungsi norm dari bilangan bulat gaussian memetakan $N: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}^+$dimana untuk $(a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$ berlaku.

$$N(a + bi) = |a^2 - (bi)^2| = (a^2 + b^2) \quad (2)$$

Fungsi norm memungkinan untuk mengidentifikasi unit pada $\mathbb{Z}[i]$. Jika elemen dalam sebuah ring memiliki invers perkalian maka elemen tersebut dinamakan unit. Berdasarkan definisi ini dapat dibentuk definisi unit pada grup *gaussian* integer. Elemen pada $\mathbb{Z}[i]$ disebut unit ketika memiliki invers perkalian pada grup *gaussian integer* dan memenuhi:

$$N(a+bi)\cdot N(a+bi)^{-1} = N\big((a+bi)\cdot(a+bi)^{-1}\big) = N(1) = 1 \quad (3)$$

Elemen yang memenuhi persamaan ini adalah ± 1 dan $\pm i$ [6]

Primalitas pada $\mathbb{Z}$ tidak mengimplikasilan primalitas pada $\mathbb{Z}[i]$. Hal ini berarti jika a adalah sebuah bilangan bulat prima, maka belum tentu a juga merupakan bilangan prima gaussian. Fungsi norm dapat digunakan untuk menentukan apakah bilangan bulat gaussian merupakan bilangan prima pada $\mathbb{Z}[i]$. Setelah mengetahui prima gaussian dan primalitas pada bilangan bulat gaussian juga dapat dibuat faktorisasi primanya. Grup *gaussian integer* merupakan domain Euclidean. Setiap elemen dalam domain euclidean memiliki faktorisasi prima yang unik [7]. Namun mencari faktorisasi prima dari bilangan bulat gaussian akan menjadi hal yang membingungkan. Oleh sebab itu dapat digunakan fungsi norm untuk memudahkan mengidentifikasi faktorisasi prima dari bilangan bulat gaussian.

Metode yang digunakan adalah metode Conrad. Metode ini dilakukan dengan menuliskan bilangan prima menjadi jumlah dua buah bilangan kuadrat kemudian menentukan bilangan bulat gaussian yang fungsi normnya mungkin untuk dijadikan bilangan prima tersebut. Terakhir, bilangan bulat gaussian tersebut dimanipulasi dengan unit hingga menyajikan bilangan bulat gaussian yang dicari faktorisasi primanya.

3. FUNGSI PHI EULER

Secara sederhana, fungsi phi euler dari m suatu bilangan bulat $\varphi(m)$ dapat didefinisikan sebagai fungsi yang merepresentasikan jumlah bilangan bulat yang kurang dari m yang relatif prima dengan m. Fungsi phi euler ditulis sebagai $\varphi(m)$ dan didefensikan oleh:

$$\varphi(m) = |\{x \in \mathbb{Z}: 1 \le x < m; (x,m) = 1\}| \quad (4)$$

Untuk setiap bilangan prima p berlaku sifat dari fungsi phi euler yaitu:

$$\varphi(p) = p - 1 \quad (5)$$

Jika $\gcd(m,n) = 1$, maka $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Teorema ini mengimplikasikan bahwa fungsi phi euler memiliki sifat multiplikatif. Sehingga untuk memecahkan persoalan bilangan bulat yang lebih besar dapat dilakukan dengan mereduksi bilangan bulat tersebut menjadi perkalian bilangan prima. Bilangan bulat positif dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan prima. Untuk $(p_1{}^{\alpha_1})(p_2{}^{\alpha_2}) \dots (p_k{}^{\alpha_k})$ faktorisasi prima dari $m \in \mathbb{Z}^+$, maka berlaku.

$$\varphi(m) = \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1)(p_i{}^{a_k - 1}) \quad (6)$$

[8]. Sifat fungsi phi euler sebagai fungsi multiplikatif untuk $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $m|n$ maka $\varphi(m)|\varphi(n)$ [9]. Berdasarkan sifat dan pendefinisian fungsi phi euler secara umum domain dan range dari fungsi phi euler adalah bilangan bulat positif atau $\mathbb{Z}^+$ [10].

4. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang menganalisis teori-teori terdahulu yang relevan dengan masalah penelitian. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan oleh peneliti untuk memperoleh jawaban dari rumusan masalah adalah sebagai berikut:

a. Mempelajari kajian-kajian teori yang telah dikumpulkan sebelumnya yaitu tentang pendefinisian fungsi phi euler pada grup gaussian integer yaitu tentang konsep fungsi phi euler, konsep relatif prima pada bilangan kompleks, dan solusi atas ketidakterurutan *gaussian integer*;
b. Merancang suatu pembahasan yang terstruktur dan dapat dipahami tentang pendefinisian fungsi phi euler pada grup gaussian integer;
c. Menarik kesimpulan.

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk membuat suatu pembahasan tentang fungsi phi euler pada grup *gaussian integer* maka kita harus berpatokan pada alur pembentukan fungsi phi euler pada domain bilangan bulat. Oleh sebab itu pembahasan dimulai dari himpunan bagian terkecil dari *gaussian integer* yakni *gaussian unit*, *gaussian prime,* dan pembahasan umum tentang *gaussian integer non-unit* dan *non-prime*.

5.1. *Gaussian Unit*

Konsep dasar unit berasal dari konsep ring komutatif. Unit merupakan elemen yang memiliki invers perkalian pada ring [11]. Fungsi phi euler pada unit *gaussian integer* bernilai 1 [12]. Misalkan u adalah unit pada *gaussian integer* maka $\varphi(u) = 1$.

5.2. *Gaussian Prime*

Pada bilangan bulat prima p fungsi phi euler dapat dihitung menggunakan rumus $\varphi(p) = p - 1$. Oleh sebab itu penentuan bilangan prima gaussian menjadi penting untuk pendefinisian fungsi phi euler. Perbedaan definisi primalitas pada gaussian integer juga menyebabkan perbedaan definisi dari invertibel modulo pada gaussian integer. Hal ini menjadi penting karena di awal pembahasan telah disebutkan bahwa fungsi phi euler pada gaussian integer menyatakan jumlah gaussian integer yang invertibel modulo dengan suatu gaussian integer.

Definisi 5.2.1.
Misalkan $(a+bi), (p_1+p_2i) \in Z[i]$ dimana (p_1+p_2i)merupakan bilangan prima gaussian. Jika $(p_1+p_2i) \nmid (a+bi)$ maka $(a+bi)$ invertibel modulo (p_1+p_2i).

Teorema selanjutnya akan membantu dalam penggunaan fungsi phi euler pada grup bilangan bulat gaussian. Teorema ini didasari pada pendefinisian fungsi phi euler pada bilangan bulat prima. Karena pada bilangan kompleks tidak dikenal keterurutan maka digunakan fungsi norm yang memetakan bilangan kompleks pada bilangan bulat.

Teorema 5.2.2.
Misalkan $p = (p_1+p_2i) \in \mathbb{Z}[i]$ adalah bilangan prima gaussian, maka berlaku.

$$\varphi(p) = N(p) - 1 \tag{7}$$

Bukti
Misalkan (p_1+p_2i) adalah bilangan prima gaussian berdasarkan fakta bahwa

$$|Z_{a+bi}| = N(a+bi) \tag{8}$$

Beberapa elemen tak 0 dari $\mathbb{Z}[i]_{(a+bi)}$ merupakan elemen dari $U(\mathbb{Z}[i]_{(a+bi)})$. Karena elemen tak nol pada $\mathbb{Z}[i]_{(p_1+p_2i)}$ adalah $N(p_1+p_2i) - 1$ dapat diketahui bahwa:

$$\varphi(p_1+p_2i) = |U(\mathbb{Z}[i]_{(p_1+p_2i)})| = N(p_1+p_2i) - 1 \tag{9}$$

(May, 2015)

Berdasarkan definisi dan teorema fermat dapat disimpulkan pokok-pokok dari penentuan prima gaussian terbagi atas 2 bagian yaitu:

1. Jika p_1 dan p_2 adalah bilangan bulat tak nol (nonzero), maka $p_1 + p_2i$ adalah bilangan prima gaussian jika ${p_1}^2 + {p_2}^2$ merupakan bilangan prima pada $\mathbb{Z}$. Sebagai tambahan jika $N(a+bi) \equiv 1(mod\ 4)$ maka $(a+bi)$ dapat direduksi menjadi perkalian gaussian integer dengan konjugatnya yakni $(p_1+p_2i)(p_1-p_2i)$. Sehingga (p_1+p_2i) dan (p_1-p_2i) merupakan gaussian prime [13]. Contoh gaussian integer yang memenuhi kondisi ini adalah $(1+i), (1-i), (1+2i), (1-2i), (2+i)$, dan $(2-i)$.
2. Jika $p_2 = 0$ dan p_1 tak nol, maka p_1 adalah bilangan prima gaussian jika $|p_1|$ adalah bilangan prima dan $p_1 \equiv 3(mod\ 4)$. Contoh gaussian integer yang memenuhi kondisi ini adalah 3,7,11, dan 19.

5.3. *Phi Euler Function in General Gaussian Integer*

Dalam bilangan bulat dikenal istilah bilangan komposit dimana bilangan tersebut bukan merupakan unit dan bilangan prima, Namun dalam banyak jurnal yang ada belum ditemukan istiilah *gaussian composite.* Oleh sebab itu kelompok terakhir dari pembahasan ini akan digeneralisasi sebagai *general gaussian integer.* Pembahasan yang dimaksudkan disini adalah *gaussian integer* yang bukan merupakan unit dan prima. Seperti yang dijelaskan pada pendahuluan bahwa kita haya akan memandang fungsi phi euler dengan definisi yang berbeda namun tidak merubah sifat dari fungsi phi euler. Fungsi phi euler merupakan fungsi multiplikatif. Kemultiplikatifan dalam fungsi phi euler dibahas dalam teorema berikut.

Teorema 5.3.1.
Untuk $(a+bi),(c+di) \in \mathbb{Z}[i]$ dimana $(a+bi)$ dan $(c+di)$ relatif prima berlaku:

$$\varphi\big((a+bi)(c+di)\big) = \varphi(a+bi)\varphi(c+di) \tag{10}$$

Bukti
Misalkan $(a+bi),(c+di) \in \mathbb{Z}[i]$ dimana $(a+bi)$ dan $(c+di)$ relatif prima maka dapat digunakan sifat multiplikatif dari fungsi phi euler.

$$\varphi\big((a+bi)(c+di)\big) = \left|U(\mathbb{Z}[i]_{(a+bi)(c+di)}\right| \tag{11}$$

$$\varphi\big((a+bi)(c+di)\big) = \left|U(\mathbb{Z}[i]_{(a+bi)}) \times U(\mathbb{Z}[i]_{(c+di)}\right| \tag{12}$$

$$\varphi\big((a+bi)(c+di)\big) = \left|U(\mathbb{Z}[i]_{(a+bi)})\right|\left|U(\mathbb{Z}[i]_{(c+di)}\right| \tag{13}$$

$$\varphi\big((a+bi)(c+di)\big) = \varphi(a+bi)\varphi(c+di) \tag{14}$$

Gaussian integer $(a+bi)$ dan $(c+di)$ dikatakan relative prima jika *greatest common divisor* dari kedua bilangan tersebut adalah *gaussian unit* [14]. Sifat kemultiplikatifan ini kita dapat membuat rumus paling mendekati untuk mengevaluasi nilai fungsi phi euler pada $\mathbb{Z}[i]$.

Teorema 5.3.2.
Misalkan $(a+bi) \in \mathbb{Z}[i]$ dan $(p_1+k_1i)^{\alpha_1}(p_2+k_2i)^{\alpha_2} \dots (p_n+k_ni)^{\alpha_n}$ merupakan faktorisasi prima dari $(a+bi)$ maka berlaku.

$$N(a+bi) = (N(p_1+k_1i)-1)N(p_2+k_2i)^{\alpha_2-1}(N(p_2+k_2i) - 1) \dots N(p_n+k_ni)^{\alpha_n-1}(N(p_n+k_ni)-1) \tag{15}$$

Bukti
Untuk membuktikan teorema ini digunakan teorema berikut.
Misalkan $(a+bi)$ adalah elemen taknol dari $\mathbb{Z}[i]$ maka

$$\left|\,\mathbb{Z}[i]_{(a+bi)}\right| = N(a+bi) \tag{16}$$

Teorema 5.3.3.
Misalkan (p_m+k_mi) merupakan elemen prima dari $\mathbb{Z}[i]$ kita dapat mempertimbangkan dua kasus, yakni:

1. Kasus Pertama

   Asumsikan p_m dan k_m adalah bilangan tak nol. Berdasarkan teorema diketahui bahwa:

$$\left|\mathbb{Z}[i]_{(p_m+k_mi)^{\alpha_m}}\right| = N((p_m+k_mi)^{\alpha_m}) = N(p_m+k_mi)^{\alpha_m} \tag{17}$$

   Rumus ini mengimplikasikan jumlah bilangan bulat gaussian modulo $(p_m+k_mi)^{\alpha_m}$. Untuk menghitung $\varphi(a+bi)$ kita harus mengurangi dari seluruh elemen ini yang tidak invertibel. Dengan kata lain kita harus mengurangi seluruh elemen yang membagi $(p_m+k_mi)^{\alpha_m}$. Berdasarkan teorema dapat diketahui bahwa:

$$\{(a+bi) \in \mathbb{Z}[i] : (a+bi) | (p_m+k_mi)^{\alpha_m}\} = \{(a+bi) \in \mathbb{Z}[i] : N(a+bi) | N((p_m+k_mi)^{\alpha_m})\} \tag{18}$$

Berdasarkan definisi diketahui bahwa $N((p_m + k_m i)^{\alpha_m})$ merupakan prima pada $\mathbb{Z}$. Sehingga pembagi-pembagi dari $N((p_m + k_m i)^{\alpha_m})$ adalah $1, N\big((p_m + k_m i)\big), N((p_m + k_m i)^2), \dots, N((p_m + k_m i)^{\alpha_m - 1}, N((p_m + k_m i)^{\alpha_m})$. Terdapat $N((p_m + k_m i)^{\alpha_m - 1}$ dari pembagi-pembagi ini, sehingga:

$$\varphi((p_m + k_m i)^{\alpha_m}) = N((p_m + k_m i)^{\alpha_m}) - N((p_m + k_m i)^{\alpha_m - 1} \tag{19}$$
$$= N((p_m + k_m i)^{\alpha_m - 1}(N\big((p_m + k_m i)\big) - 1$$

2. Kasus Kedua

Misalkan $(p_m + k_m i) = ua$ dimana u adalah unit pada bilangan bulat gaussian dan a adalah sebuah bilangan prima ganjil pada $\mathbb{Z}[i]$ dimana $a \equiv 3(mod\ 4)$. Dengan teorema dapat diketahui bahwa

$$\left|\mathbb{Z}[i]_{(p_m + k_m i)^{\alpha_m}}\right| = N((p_m + k_m i)^{\alpha_m}) = N(p_m + k_m i)^{\alpha_m} \tag{20}$$

Jadi total bilangan bulat gaussian modulo $((p_m + k_m i)^{\alpha_m})$ adalah $a^{2\alpha m}$. Sama dengan kasus 1, kita harus mengurangkan seluruh bilangan bulat yang tidak relatif prima dengan $a^{2\alpha m}$. Karena a adalah bilangan prima, maka pembagi-pembagi $a^{2\alpha m}$ adalah $a^2, a^3, \dots, (a^2)^{\alpha_m - 1}, (a^2)^{\alpha_m}$. Karena terdapat $(a^2)^{\alpha_m - 1}$ maka dapat diketahui bahwa:

$$\varphi((p_m + k_m i)^{\alpha_m}) = a^{2\alpha m} - (a^2)^{\alpha_m - 1} \tag{21}$$
$$= N((p_m + k_m i)^{\alpha_m - 1}(N\big((p_m + k_m i)\big) - 1$$

[5]. Untuk $(a + bi) = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots {p_n}^{\alpha_n}$ dimana $p_n \in \mathbb{Z}[i]$ dan $\alpha_n \in \mathbb{Z}$akan berlaku sifat multiplikatif dari fungsi phi euler yakni:

$$\varphi(a + bi) = \prod_{n=1}^{\infty}(N(p_n) - 1)\big(N(p_n)\big)^{\alpha_n} \tag{22}$$

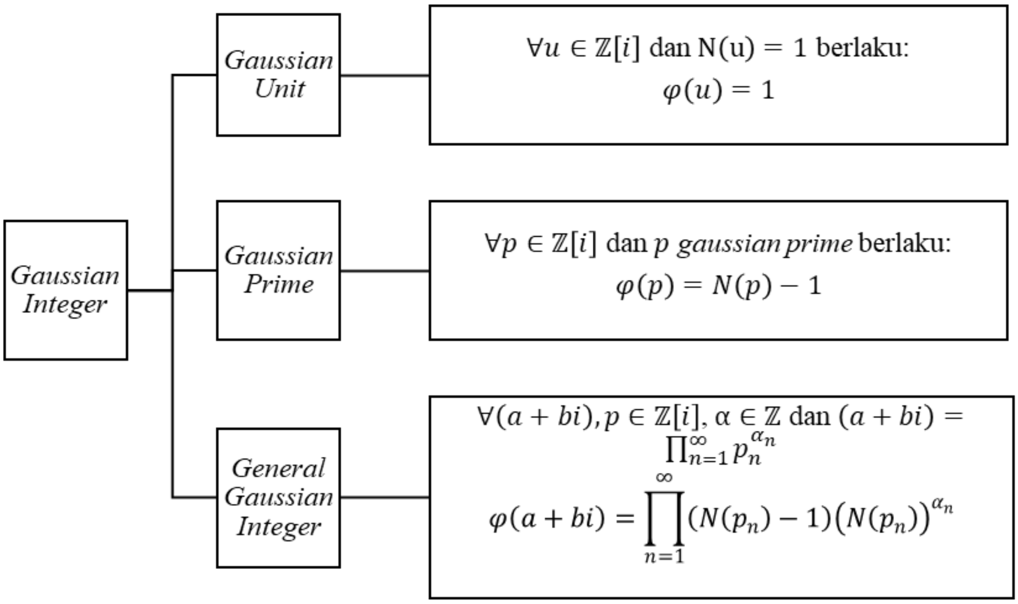
Untuk bisa menerapkan rumus phi euler pada *gaussian integer* terlebih dahulu kita harus memahami konsep dari pemfaktoran *gaussian integer*. Metode yang kerap kali digunakan adalah metode Conrad. Namun dalam pengaplikasiannya dikarenakan dalam domain *gaussian integer* memiliki 4 buah unit sering sekali ditemukan kasus pemfaktoran yang tidak unik. Sebagai contoh paling sederhana faktorisasi *gaussian integer* dari 2. 2 dapat direduksi menjadi $2 = (1 + i)(1 - i)$ dimana baik $(1 + i)$ dan $(1 - i)$ merupakan *gaussian prime*. Tetapi 2 juga dapat direduksi menjadi $2 = -i(1 + i)^2$. Hal ini memiliki nilai yang sama namun apabila diaplikasikan pada rumus fungsi phi euler akan menghasilkan angka yang berbeda. Oleh sebab itu digunakan beberapa pedoman berikut dalam proses faktorisasi prima gaussian $(a + bi)$.

1. Jika $2|N(a + bi)$ maka pemfaktorannya adalah sebagai berikut.

$$a + bi = (1 + i)\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}i\right) \tag{23}$$

2. Jika $N(a + bi) \equiv 3(mod\ 4)$ maka bilangan tersebut dikategorikan *gaussian prime*
3. Jika $N(a + bi) \equiv 1(mod\ 4)$ maka bilangan tersebut memiliki faktor perkalian *gaussian integer* yang saling konjugat atau dapat ditulis sebagai $(\pi \cdot \bar{\pi}) = a + bi$. Karena *gaussian integer* merupakan domain maka *gaussian prime* hanya memiliki satu bentuk faktorisasi yang formal dan baku. Oleh sebab itu faktorisasi menjadi $(a + bi) = u\pi^{\alpha}$ dimana u merupakan *gaussian unit*, π merupakan *gaussian prime* sebagai faktor dari $(a + bi)$, dan α merupakan bilangan bulat positif sebagai perpangkatan dari π [15].

Berdasarkan pembahasan tersebut untuk membentuk suatu hasil yang lebih ringkas dan mudah dipahami maka pembahasan tersebut dirangkum dalam gambar 1.



Gambar 1 Fungsi Phi Euler pada Grup *Gaussian Integer*

6. Kesimpulan

Fungsi phi euler pada bilangan bulat gaussian dapat diaplikasikan menggunakan fungsi norm karena pada bilangan bulat gaussian merupakan subgrup dari grup bilangan kompleks dimana bilangan kompleks tidak memiliki sifat keterurutan seperti pada bilangan bulat. Jika dilihat secara praktis konsep dari fungsi phi euler pada gaussian integer mengambil konsep dari fungsi phi euler pada domain bilangan bulat. Perbedaannya bahwa pada domain *gaussian integer* dimanfaatkan fungsi norm. Hal ini terjadi karena *gaussian integer* bersifat imajiner sehingga harus dipetakan pada domain yang konkret yakni bilangan bulat. $N(a+bi) = a^2 + b^2$. Fungsi norm memudahkan pendefinisian fungsi phi euler pada gaussian integer yang merupakan subset dari bilangan kompleks. Fungsi norm juga memungkinkan kita untuk dapat menentukan unit dan gaussian prime. Nilai fungsi phi euler pada *gaussian unit* adalah 1. Nilai fungsi phi euler pada *gaussian prime* adalah norm *gaussian prime* dikurangi 1. Sementara untuk *gaussian integer* secara umum harus terlebih dahulu di reduksi menjadi *gaussian prime* dan digunakan rumus seperti gambar 1.

REFERENSI

[1] A. Setiawan, *Dasar-Dasar Aljabar Modern: Teori Grup dan Teori Ring*. Surakarta: Penerbit Tisara Grafika, 2014.
[2] T. Koshy, *Elementary Number Theory With Application*, 2nd ed. USA: Academic Press, 2007.
[3] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1975.
[4] N. H. Asmar and L. Grafakos, *Complex Analysis with Application*. Springer, 2018.
[5] C. A. May, "Application of The Euler Phi Function in the Set of Gaussian Integers," *Honors Theses*, 2015.
[6] R. G. Stein, "Exploring the Gaussian Integers," *The Two-Year College Mathematics Journal*, vol. 7, Dec. 1976.
[7] M. F. Ruchte and R. W. Ryden, "A Proof of Uniqueness of Factorization in the Gaussian Integers," *The American Mathematical Monthly*, pp. 58–59, 1973.
[8] S. Shanmugavelan, "The Euler Function Graph G(Φ(n))," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 116, no. 1, pp. 45–48, 2017.
[9] R. A. Syirazi, Thresye, and N. Huda, "Sifat-Sifat Fungsi Phi Euler dan Batas Prapeta Fungsi Phi Euler," *Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon,"* vol. 11, no. 1, pp. 30–37, Aug. 2017.
[10] M. Plytage, P. Loomis, and J. Polhill, "Summing Up the Euler φ Function," *The College Mathematics Journal*, pp. 34–42, Jan. 2008.
[11] J. B. Fraleigh and V. J. Katz, *A First Course in Abstract Algebra*, 7th ed. Boston: Addison-Wesley, 2003.
[12] Eoinmackal, "The Euler Phi function for the Gaussian integers," Oct. 22, 2018.
[13] J. T. Cross, "The Euler Phi Function in the Gaussian Integers," *The American Mathematical Monthly*, pp. 518–528, 1983.

[14] M. F. Willerding, “Divisibility and Factorization of Gaussian Integers,” *The Mathematics Teacher*, vol. 59, no. 7, pp. 634–637, 1966.
[15] University of California, “Gaussian Integers and Rings of Algebraic Integers.” pp. 1–20, 2021.