Matriks Toeplitz dan Determinannya Menggunakan Metode Salihu

Miftahul Jannah[1], Yusmet Rizal[2]
[1,2],Departemen Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received January 26, 2023
Revised February 09, 2023
Accepted June 30, 2023

Keywords:

Matrix
Toeplitz Matrix
Determinant
Salihu determinant

Kata Kunci:

Matriks
Matriks Toeplitz
Determinan
Determinan Salihu

ABSTRACT

The matrix is a rectangular array of numbers. In this range the numbers are called the entries of the matrix. In matrix calculations generally focus on square-shaped matrices. There is a matrix called the Toeplitz matrix. The Toeplitz matrix has the same operations and calculations as a square matrix in general, one method for calculating the determinant is the Sarrus method. There is an alternative method to solve the determinant of the matrix, namely the Salihu determinant. The purpose of this research is to know the determinant properties related to the Toeplitz matrix and to know the determinant of the $n \times n$ Toeplitz matrix with $n \geq 3$ using the Salihu method. The result of this study is that the completion of the Toeplitz matrix determinant calculation will produce the same value as the determinant calculation using the cofactor expansion method.

ABSTRAK

Matriks ialah susunan sekelompok bilangan dalam sebuah jajaran yang membentuk persegi panjang. Dalam jajarannya bilangan-bilangan itu disebut dengan entri dari matriks. Dalam perhitungan matriks umumnya berfokus pada matriks berbentuk persegi. Terdapat suatu matriks yang dinamakan matriks Toeplitz. Matriks ini mempunyai operasi dan perhitungan yang sama seperti matriks persegi umumnya, salah metode untuk menghitung determinan yaitu dengan metode Sarrus. Terdapat metode alternatif untuk menyelesaikan determinan matriks yaitu determinan Salihu. Adapun tujuan penelitian ini yaitu, mengetahui sifat-sifat determinan yang berkaitan dengan matriks Toeplitz serta mengetahui determinan matriks Toeplitz $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menggunakan metode Salihu. Hasil dari penelitian ini yaitu berupa penyelesaian perhitungan determinan matriks Toeplitz akan menghasilkan nilai yang sama dengan perhitungan determinan menggunakan metode ekspansi kofaktor.

Miftahul Jannah

(Miftahul Jannah)
Prodi Matematika,Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negari Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka,Air Tawar barat,Padang Utara, Padang, 25171 Padang,Sumatera Barat
Email: tamiftahul09@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Kegiatan belajar merupakan kegiatan terpenting dalam pendidikan, pada dasarnya dilaksanakan di pendidikan formal seperti sekolah, meskipun proses belajar dapat dilakukan kapanpun dan dimanapun [1]. Salah satu bidang pendidikan yang kita terima di tingkat sekolah yaitu matematika. Aljabar linear dalam matematika mempelajari tentang sistem persamaan linear dan matriks. Matriks merupakan susunan bilangan dalam sebuah jajaran yang membentuk persegi panjang, yang diatur menurut baris-baris dan kolom-kolom [2]. Ditulis $\{a_{ij}\}$, dimana $a_{i,j}$ adalah elemen dalam baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dengan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$[3]. Perhitungan matriks banyak melibatkan matriks berbentuk persegi. Matriks persegi yang biasa dikenal adalah matriks segitiga, diagonal, satuan, simetris, dan lain-lain. Selain jenis matriks yang telah disebutkan ini, terdapat suatu matriks yang dinamakan matriks Toeplitz. Matriks Toeplitz merupakan matriks persegi yang mempunyai struktur khusus. Dikatakan matriks Toeplitz jika dan hanya jika matriks yang tiap-tiap unsur diagonal dan sub-diagonal bersesuaian bernilai sama [4]. Secara matematis dapat ditulis

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{2-n} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Dengan

$$T_n = [t_{kj}; kj = 0,1, \dots, n-1] \text{ dimana } t_{k,j} = t_{k-j}$$

Pada dasarnya, matriks ini memiliki operasi serta perhitungan yang sama seperti matriks umumnya. Salah satu operasi nilai yang sering digunakan adalah determinan. Determinan dari suatu matriks persegi A adalah jumlah semua hasilkali elementer bertanda dari suatu matriks A. Jika matriks A berukuran $n \times n$, hasil kali elementer bertanda dari A adalah perkalian n entri yang tak satupun berada dalam baris ataupun kolom yang sama [5]. Nilai dari determinan A dilambangkan dengan $det(A)$ atau $|A|$ [6].

Tidak sulit untuk menentukan determinan matriks dengan ordo kecil. Namun ketika menghitung determinan berukuran besar, untuk menentukan determinannya akan sulit. Maka dari itu diperlukan langkah yang tepat agar dapat memudahkan menentukan determinan suatu matriks [7]. Dalam menghitung determinan matriks yang berorde $n \times n$ $(n \geq 3)$, metode Salihu merupakan salah satu pilihan untuk menghitung determinan matriks orde $n \times n$ $(n \geq 3)$ selain metode yang sudah ada sebelumnya [8]. Menyelesaikan determinan menggunakan metode Salihu yaitu dengan mereduksi determinan berordo $n \times n$ menjadi determinan matriks berordo 2×2 dengan menghitung empat determinan unik berordo $(n-1) \times (n-1)$ dan satu determinan interior berordo $(n-2) \times (n-2)$ dari suatu matriks [9]. Berdasarkan permasalahan yang dipaparkan, tujuan penelitian ini menjelaskan tentang konsep matriks Toeplitz serta determinannya menggunakan metode Salihu.

2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar (teoritis). Dalam penelitian ini digunakan metode deskriptif, dengan cara menganalisis teori yang relevan berdasarkan studi kepustakaan tentang matriks Toeplitz dan determinan metode Salihu. Langkah teori yang akan dilakukan adalah meninjau permasalahan yang dihadapi, mencari serta mengaitkan teori-teori yang telah diperoleh dengan permasalahan yang dibahas sebagai penunjang guna menjawab permasalahan tersebut. Adapun langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan adalah:

a. Mempelajari literatur mengenai matriks, matriks teoplitz, determinan metode Salihu.
b. Membahas konsep tentang penyelesaian determinan matriks teoplitz $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menggunakan metode Salihu.

Perhitungan determinan menggunakan metode Salihu di temukan oleh Armend Salihu pada tahun 2012, metode ini terinspirasi dari metode kondensasi CHIO dan metode kondensasi

Dodgson. Misalkan A merupakan matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ maka untuk menghitung determinannya adalah sebagai berikut:

$$|A| = \begin{vmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|B|}\begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}, \text{ dengan } |B| \neq 0 \quad (1)$$

Keterangan:
1) $|B|$ determinan berukuran $(n-2) \times (n-2)$ diperoleh dengan cara menghapus baris ke-1, kolom ke-1, baris ke$-n$ serta kolom ke$-n$ dari A.
2) $|C|$ determinan berukuran $(n-1) \times (n-1)$ diperoleh dengan cara menghapus kolom ke$-n$ serta baris ke$-n$ dari A.
3) $|D|$ determinan berukuran $(n-1) \times (n-1)$ diperoleh dengan cara menghapus baris ke$-n$ serta kolom ke-1 dari A.
4) $|E|$ determinan berukuran $(n-1) \times (n-1)$ diperoleh dengan cara menghapus baris ke-1 serta kolom ke-1 dari A.
5) $|F|$ determinan berukuran $(n-1) \times (n-1)$ diperoleh dengan cara menghapus baris ke-1 serta kolom ke$-n$ dari A [8].

c. Membahas konsep tentang sifat-sifat yang berkaitan dengan matriks Toeplitz.
d. Menarik kesimpulan.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

3.1 Menghitung Determinan Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Salihu

Secara umum, langkah-langkah penyelesaian determinan metode Salihu, yaitu:

a. Matriks Toeplitz berordo $\times n,\ \ n \geq 3$.
b. Tentukan determinan interior berukuran $(n-2) \times (n-2)$ dimisalkan dengan matriks B, dengan $|B| \neq 0$. Jika $|B| = 0$ maka lakukan operasi baris elementer untuk memperoleh $|B| \neq 0$.
c. Tentukan empat determinan unik berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang dimisalkan dengan $|C|, |D|, |E|,$ dan $|F|$.
d. Substitusikan setiap elemen matriks kedalam persamaan metode Salihu.
e. Untuk masing-masing $|B|, |C|, |D|, |E|,$ dan $|F|$ dapat diselesaikan menggunakan metode sarrus, reduksi baris atau ekspansi kofaktor.
   1) Metode sarrus

      Definisi 1

      Misalkan matriks A merupakan matriks persegi dengan $A = [a_{ij}]$. Secara matematis, determinan dari A ditulis

      $$det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \pm a_{1j_1} . a_{2j_2} . \dots . a_{nj_n}$$

      Dimana $\sum$ menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk seluruh permutasi $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Aturan Sarrus hanya dapat digunakan untuk matriks 3×3 [10].
   2) Metode reduksi baris

      Dengan mereduksi matriks yang telah di berikan menjadi matriks dengan pola matriks segitiga atas yang didapatkan setelah dilakukannya operasi baris elementer (OBE), lalu hitung determinan matriks segitiga atas yang didapat [11].

Definisi 2
Jika A merupakan matriks segitiga dengan ukuran $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, ataupun diagonal) maka $\det(A)$ adalah hasilkali tiap-tiap entri yang terdapat pada diagonal utamanya, dimana $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

3) Metode ekpansi kofaktor
Jika A suatu matriks persegi, maka minor matriks a_{ij} dituliskan M_{ij} dan didefinisikan dengan determinan sub-sub matriks yang ada setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapuskan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dapat dinotasikan dengan C_{ij} dan dinyatakan sebagai kofaktor anggota a_{ij} [12].
Definisi 3
Determinan suatu matriks A berukuran $n \times n$, dihitung dengan perkalian antar entri disebarang baris (ataupun kolom) dengan kofaktor-kofaktornya kemudian jumlahkan hasilkalinya yang didapatkan, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor di sepanjang baris ke$-i$)
Atau

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor di sepanjang kolom ke$-j$)

f. Kemudian untuk setiap hasil determinan yang telah didapatkan pada poin e, kalikan $|C|$ dengan $|F|$ dan kalikan $|D|$ dengan $|E|$.

3.2 Sifat-Sifat Matriks Toeplitz

Matriks Toeplitz merupakan matriks dengan ordo $n \times n$. Sebuah matriks dikatakan matriks Toeplitz jika dan hanya jika dimana setiap unsur yang terdapat di diagonal utamanya bernilai sama, dan begitu pula dengan setiap unsur pada sub-diagonal yang bersesuaian denggan diagonal utamanya bernilai sama [4].
Definisi 4
Sebuah matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ adalah

$$T_n = \left[t_{kj}; kj = 0,1,\ldots,n-1\right] \text{ dimana } t_{k,j} = t_{k-j}$$

Secara matematis dapat ditulis

$$|A| = \begin{vmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_0 \end{vmatrix}$$

Terdapat beberapa sifat determinan matriks yang tidak berlaku pada matriks Toeplitz, seperti:

Teorema 1
Misalkan A merupakan matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ dan A' merupakan matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ yang dihasilkan dari satu baris matriks A dikalikan dengan skalar, maka

$$\det(A') = k \cdot \det(A) \tag{2}$$

Bukti
Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Menggunakan metode Sarrus, didapat
$|A| = {t_0}^3 + {t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} - t_{-2}t_0t_2 - 2t_0t_{-1}t_1$
Sehingga

ISSN: 2807-3460

$k \cdot |A| = k \cdot ({t_0}^3 + {t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} - t_{-2} t_0 t_2 - 2 t_0 t_{-1} t_1)$
$k \cdot |A| = k{t_0}^3 + k{t_{-1}}^2 t_2 + k{t_1}^2 t_{-2} - k t_2 t_0 t_{-2} - 2k t_0 t_{-1} t_1$ (3)
Selanjutnya dihitung determinan A'

$$A' = \begin{bmatrix} kt_0 & kt_1 & kt_2 \\ t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix}$$

Didapat

$$|A'| = k{t_0}^3 + k{t_{-1}}^2 t_2 + k{t_1}^2 t_{-2} - k t_2 t_0 t_{-2} - 2k t_0 t_{-1} t_1 \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) terlihat bahwa $|A'| = k \cdot |A|$, terbukti bahwa persamaan (2) benar. Namun karena matriks A^T tidak terdefinisi sebagai matriks Toeplitz, maka persamaan (2) tidak berlaku sebagai sifat determinan matriks toeplitz.

Teorema 2
Misalkan A dan B adalah matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ yang hanya berbeda pada satu baris dimisalkan dengan baris ke$-r$, dan C di dapatkan dengan cara menjumlahkan seluruh entrinya yang bersesuaian pada baris ke$-r$ dari matriks A dan B, maka

$$\det(C) = \det(A) + \det(B) \quad (5)$$

Bukti
Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2}' \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Gunakan metode Sarrus untuk menghitung $|A|$ dan $|B|$, didapat

$|A| = {t_0}^3 + {t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} - t_{-2} t_0 t_2 - 2 t_0 t_{-1} t_1$
$|B| = {t_0}^3 + {t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 {t_{-2}}' - {t_{-2}}' t_0 t_2 - 2 t_0 t_{-1} t_1$
sehingga
$|A| + |B| = 2{t_0}^3 + 2{t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} + {t_1}^2 {t_{-2}}' - t_2 t_0 t_{-2} - t_2 t_0 {t_{-2}}' - 4 t_0 t_{-1} t_1$ (6)

Selanjutnya akan dihitung $|C|$

$$C = \begin{bmatrix} 2t_0 & 2t_{-1} & t_{-2} + {t_{-2}}' \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

$|C| = 2{t_0}^3 + 2{t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} + {t_1}^2 {t_{-2}}' - t_2 t_0 t_{-2} - t_2 t_0 {t_{-2}}' - 4 t_0 t_{-1} t_1$ (7)

Dari persamaan (6) dan (7) terlihat bahwa persamaan (5) terbukti benar, namun karena matriks C tidak terdefinisi sebagai matriks toeplitz maka persamaan (5) tidak berlaku sebagai sifat determinan matriks Toeplitz.

Teorema 3
Misalkan matriks A dan B adalah matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ dan AB adalah matriks yang diperoleh dari perkalian matriks A dan B, maka

$$\det(AB) = \det(A) . \det(B) \quad (8)$$

Bukti
Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} t_0' & t_{-1}' & t_{-2}' \\ t_1' & t_0' & t_{-1}' \\ t_2' & t_1' & t_0' \end{bmatrix}$$

Gunakan metode Sarrus untuk menghitung $|A|$ dan$|B|$, didapat

$$|A| = {t_0}^3 + {t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} - t_{-2} t_0 t_2 - 2 t_0 t_{-1} t_1$$

$$|B| = {t_0'}^3 + {t_{-1}'}^2 t_2' + {t_1'}^2 t_{-2} - t_{-2}' t_0' t_2' - 2 t_0' t_{-1}' t_1'$$

Sehingga

$$\begin{aligned} |A| \cdot |B| = {} & ({t_0}^3 + {t_{-1}}^2 t_2 + {t_1}^2 t_{-2} - t_{-2} t_0 t_2 - 2 t_0 t_{-1} t_1) \cdot ({t_0'}^3 + {t_{-1}'}^2 t_2' + {t_1'}^2 t_{-2} - t_{-2}' t_0' t_2' \\ & - 2 t_0' t_{-1}' t_1') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| \cdot |B| = {} & {t_0}^3 {t_0'}^3 + t_{-2} {t_1}^2 {t_0'}^3 - 2 t_0 t_{-1} t_1 {t_0'}^3 - t_0 t_{-2} t_2' {t_0'}^3 + {t_{-1}}^2 {t_0'}^3 t_2' \\ & - 4 t_0 t_{-1} t_1 t_0' t_{-1}' t_1' + 2 t_{-2} t_0' t_{-1}' t_1' {t_1}^2 + 2 t_0' t_{-1}' t_1' {t_0}^3 - 2 t_0 t_{-2} t_2' t_0' t_{-1}' t_1' \\ & + 2 t_2' t_0' t_{-1}' t_1' {t_{-1}}^2 - t_{-2} t_0' t_{-2}' t_2' {t_1}^2 - t_0' t_{-2}' t_2' {t_0}^3 + 2 t_0 t_{-1} t_1 t_0' t_{-2}' t_2' \\ & + t_0 t_{-2} t_2' t_0' t_{-2}' t_2' - t_2' t_0' t_{-2}' t_2' {t_{-1}}^2 + t_{-2}' {t_1}^2 {t_1'}^2 + t_{-2}' {t_1'}^2 {t_0}^3 \\ & - 2 t_0 t_{-1} t_1 t_{-2}' {t_1'}^2 - t_0 t_{-2} t_2 t_{-2}' {t_1'}^2 + t_2' t_{-2}' {t_{-1}}^2 {t_1'}^2 + t_{-2} t_2' {t_1}^2 {t_{-1}'}^2 \\ & + t_2' {t_{-1}'}^2 {t_0}^3 - 2 t_0 t_{-1} t_1 t_2' {t_{-1}'}^2 - t_0 t_{-2} t_2' t_2' {t_{-1}'}^2 + t_2' t_2' {t_{-1}}^2 {t_{-1}'}^2 \end{aligned} \qquad (9)$$

Selanjutnya akan dihitung determinan matriks AB

$$AB = \begin{pmatrix} t_0 t_0' + t_{-1} t_1' + t_{-2} t_2' & t_0 t_{-1}' + t_{-1} t_0' + t_{-2} t_1' & t_0 t_{-2}' + t_{-1} t_{-1}' + t_{-2} t_0' \\ t_1 t_0' + t_0 t_1' + t_{-1} t_2' & t_1 t_{-1}' + t_0 t_0' + t_{-1} t_1' & t_1 t_{-2}' + t_0 t_{-1}' + t_{-1} t_0' \\ t_2 t_0' + t_1 t_1' + t_0 t_2' & t_2 t_{-1}' + t_1 t_0' + t_0 t_1' & t_2 t_{-2}' + t_1 t_{-1}' + t_0 t_0' \end{pmatrix}$$

Didapat

$$\begin{aligned} |AB| = {} & (t_0 t_0' + t_{-1} t_1' + t_{-2} t_2')(t_1 t_{-1}' + t_0 t_0' + t_{-1} t_1')(t_2 t_{-2}' + t_1 t_{-1}' + t_0 t_0') \\ & + (t_0 t_{-1}' + t_{-1} t_0' + t_{-2} t_1')(t_1 t_{-2}' + t_0 t_{-1}' + t_{-1} t_0')(t_2 t_0' + t_1 t_1' + t_0 t_2') \\ & + (t_0 t_{-2}' + t_{-1} t_{-1}' + t_{-2} t_0')(t_1 t_0' + t_0 t_1' + t_{-1} t_2')(t_2 t_{-1}' + t_1 t_0' + t_0 t_1') \\ & - (t_0 t_{-2}' + t_{-1} t_{-1}' + t_{-2} t_0')(t_1 t_{-1}' + t_0 t_0' + t_{-1} t_1')(t_2 t_0' + t_1 t_1' + t_0 t_2') \\ & - (t_0 t_{-1}' + t_{-1} t_0' + t_{-2} t_1')(t_1 t_0' + t_0 t_1' + t_{-1} t_2')(t_2 t_{-2}' + t_1 t_{-1}' + t_0 t_0') \\ & - (t_0 t_0' + t_{-1} t_1' + t_{-2} t_2')(t_1 t_{-2}' + t_0 t_{-1}' + t_{-1} t_0')(t_2 t_{-1}' + t_1 t_0' + t_0 t_1') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AB| = {} & {t_0}^3 {t_0'}^3 + t_{-2} {t_1}^2 {t_0'}^3 - 2 t_0 t_{-1} t_1 {t_0'}^3 - t_0 t_{-2} t_2' {t_0'}^3 + {t_{-1}}^2 {t_0'}^3 t_2' \\ & - 4 t_0 t_{-1} t_1 t_0' t_{-1}' t_1' + 2 t_{-2} t_0' t_{-1}' t_1' {t_1}^2 + 2 t_0' t_{-1}' t_1' {t_0}^3 - 2 t_0 t_{-2} t_2' t_0' t_{-1}' t_1' \\ & + 2 t_2' t_0' t_{-1}' t_1' {t_{-1}}^2 - t_{-2} t_0' t_{-2}' t_2' {t_1}^2 - t_0' t_{-2}' t_2' {t_0}^3 + 2 t_0 t_{-1} t_1 t_0' t_{-2}' t_2' \\ & + t_0 t_{-2} t_2' t_0' t_{-2}' t_2' - t_2' t_0' t_{-2}' t_2' {t_{-1}}^2 + t_{-2}' {t_1}^2 {t_1'}^2 + t_{-2}' {t_1'}^2 {t_0}^3 \\ & - 2 t_0 t_{-1} t_1 t_{-2}' {t_1'}^2 - t_0 t_{-2} t_2 t_{-2}' {t_1'}^2 + t_2' t_{-2}' {t_{-1}}^2 {t_1'}^2 + t_{-2} t_2' {t_1}^2 {t_{-1}'}^2 \\ & + t_2' {t_{-1}'}^2 {t_0}^3 - 2 t_0 t_{-1} t_1 t_2' {t_{-1}'}^2 - t_0 t_{-2} t_2' t_2' {t_{-1}'}^2 + t_2' t_2' {t_{-1}}^2 {t_{-1}'}^2 \end{aligned} \qquad (10)$$

Dari persamaan (9) dan (10) terlihat bahwa persamaan (8) terbukti benar, namun karena matriks C tidak terdefinisi sebagai matriks toeplitz maka persamaan (8) tidak berlaku sebagai sifat determinan matriks Toeplitz.

Sifat-sifat determinan yang berlaku pada matriks Toeplitz, yaitu:
Definisi 5
Jika A matriks berukuran $m \times n$, maka transpos dari A, di notasikan sebagai A^T, didefenisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkansetelah pertukaran baris kolom yang berkorespondensi [13]. Sehingga kolom ke-1 dari A^T adalah baris ke-1 dari A, kolom ke-2 dari A^T adalah baris ke-2 dari A, dan begitu selanjutna hingga baris dan kolom ke$-n$ [5].

Teorema 4

ISSN: 2807-3460

Misalkan A suatu matriks Toeplitz dan A^T adalah matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ yang telah di transpos, maka

$$\det(A^T) = \det(A) \tag{11}$$

Bukti

akan diuji menggunakan matriks Toeplitz berukuran 3×3

$A = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$ dan $A^T = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{bmatrix}$

Gunakan persamaan (1) untuk menghitung determinan A^T

$$|A^T| = \frac{1}{|t_0|} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_0 & t_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} t_{-1} & t_0 \\ t_{-2} & t_{-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_0 & t_1 \\ t_{-1} & t_0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$|A^T| = \frac{1}{t_0} \cdot \left((t_0{}^2 - t_1 \cdot t_{-1}) \cdot (t_0{}^2 - t_1 \cdot t_{-1}) \right) - \left((t_1{}^2 - t_2 \cdot t_0) \cdot (t_{-1}{}^2 - t_0 . t_{-2}) \right)$$

$$|A^T| = t_0 \cdot t_0 \cdot t_0 + t_1 \cdot t_1 \cdot t_{-2} + t_2 \cdot t_{-1} \cdot t_{-1} - t_2 \cdot t_0 \cdot t_{-2} - t_0 \cdot t_1 \cdot t_{-1} - t_1 \cdot t_{-1} \cdot t_0 \tag{12}$$

selanjutnya akan dihitung $|A|$ menggunakan metode sarrus

$$|A| = t_0 \cdot t_0 \cdot t_0 + t_1 \cdot t_1 \cdot t_{-2} + t_2 \cdot t_{-1} \cdot t_{-1} - t_2 \cdot t_0 \cdot t_{-2} - t_0 \cdot t_1 \cdot t_{-1} - t_1 \cdot t_{-1} \cdot t_0 \tag{13}$$

Dari persamaan (12) dan (13) terlihat bahwa $\det(A^T) = \det(A)$ sehingga persamaan (11) terbukti benar.

Teorema 5

Misalkan A adalah matriks Toeplitz berukuran $n \times n$ dengan k adalah skalar, maka

$$\det(kA) = k^n \det(A) \tag{14}$$

Bukti

Akan diuji menggunakan matriks Toeplitz berukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Kalikan setiap elemen pada matriks A dengan skalar k, maka

$$kA = \begin{bmatrix} kt_0 & kt_{-1} & kt_{-2} \\ kt_1 & kt_0 & kt_{-1} \\ kt_2 & kt_1 & kt_0 \end{bmatrix}$$

Gunakan persamaan (1) untuk menghitung determinan kA

$$|kA| = \frac{1}{|kt_0|} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} kt_0 & kt_{-1} \\ kt_1 & kt_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} kt_{-1} & kt_{-2} \\ kt_0 & kt_{-1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} kt_1 & kt_0 \\ kt_2 & kt_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} kt_0 & kt_{-1} \\ kt_1 & kt_0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |kA| = \frac{1}{kt_0} &\cdot \left(((kt_0)^2 - kt_{-1} \cdot kt_1) \cdot ((kt_0)^2 - kt_{-1} \cdot kt_1) \right) \\ &- \left(((kt_{-1})^2 - kt_{-2} \cdot kt_0) \cdot ((kt_1)^2 - kt_0 . kt_2) \right) \end{aligned}$$

$$|kA| = k^3 (t_0 \cdot t_0 \cdot t_0 + t_{-1} \cdot t_{-1} \cdot t_2 + t_{-2} \cdot t_1 \cdot t_1 - t_{-2} \cdot t_0 \cdot t_2 - t_0 \cdot t_{-1} \cdot t_1 - t_{-1} \cdot t_1 \cdot t_0) \tag{15}$$

Selanjutnya akan dihitung $|A|$ menggunakan metode sarrus

$|A| = t_0 \cdot t_0 \cdot t_0 + t_1 \cdot t_1 \cdot t_{-2} + t_2 \cdot t_{-1} \cdot t_{-1} - t_2 \cdot t_0 \cdot t_{-2} - t_0 \cdot t_1 \cdot t_{-1} - t_1 \cdot t_{-1} \cdot t_0$, maka

$$k^n |A| = k^3 (t_0 \cdot t_0 \cdot t_0 + t_{-1} \cdot t_{-1} \cdot t_2 + t_{-2} \cdot t_1 \cdot t_1 - t_{-2} \cdot t_0 \cdot t_2 - t_0 \cdot t_{-1} \cdot t_1 - t_{-1} \cdot t_1 \cdot t_0) \tag{16}$$

Dari persamaan (15) dan (16) terlihat bahwa $\det(kA) = k^n \det(A)$ sehingga persamaan (14) terbukti benar.

Teorema 6
Misalkan suatu matriks Toeplitz $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, ataupun diagonal), maka determinannya merupakan hasil kali seluruh entri pada diagonal utamanya, dimana

$$\det(A) = t_0 \cdot t_0 \cdot \ldots \cdot t_0 \text{, dengan } t_0 \text{ sebanyak } n \tag{17}$$

Bukti
Akan diuji satu-persatu matriks Toeplitz segitiga atas, segitiga bawah, dan diagonal menggunakan matriks Toeplitz berukuran $3 \times 3, 4 \times 4,$ dan 5×5, yang dimisalkan dengan matriks P, Q dan R.

1) Matriks Toeplitz segitiga atas
   a) Matriks toeplitz 3×3

$$P = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ 0 & t_0 & t_{-1} \\ 0 & 0 & t_0 \end{bmatrix}$$

Substitusikan elemen-elemen matriks P ke persamaan (1)

$$|P| = \frac{1}{|t_0|} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} t_0 & t_{-1} \\ 0 & t_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_{-1} & t_{-2} \\ t_0 & t_{-1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & t_0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_0 & t_{-1} \\ 0 & t_0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$|P| = \frac{1}{t_0} \cdot \left((t_0{}^2 - t_{-1} \cdot 0) \cdot (t_0{}^2 - t_{-1} \cdot 0) \right) - \left((t_{-1}{}^2 - t_{-2} \cdot t_0) \cdot (0 - t_0 . 0) \right)$$

$$|P| = \frac{1}{t_0} \cdot (t_0{}^4) = t_0{}^3$$

   b) Matriks toeplitz 4×4
   Menggunakan langkah yang sama pada poin a), maka diperoleh $|P| = t_0{}^4$
   c) Matriks toeplitz 5×5
   Menggunakan langkah yang sama pada poin a), maka diperoleh $|P| = t_0{}^5$

2) Matriks Toeplitz segitiga bawah
   a) Matriks toeplitz 3×3

$$Q = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_0 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Substitusikan elemen-elemen matriks Q ke persamaan (1)

$$|Q| = \frac{1}{|t_0|} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ t_1 & t_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ t_0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} t_1 & t_0 \\ t_2 & t_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ t_1 & t_0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$|Q| = \frac{1}{t_0} \cdot \left((t_0{}^2 - 0 \cdot t_1) \cdot (t_0{}^2 - 0 \cdot t_1) \right) - \left((0 - 0 \cdot t_0) \cdot (t_1{}^2 - t_0 . t_2) \right)$$

$$|Q| = \frac{1}{t_0} \cdot (t_0{}^4) = t_0{}^3$$

   b) Matriks toeplitz 4×4
   Seperti langkah yang pada poin a), maka diperoleh $|P| = t_0{}^4$
   c) Matriks toeplitz 5×5
   Seperti langkah yang pada poin a), maka diperoleh $|P| = t_0{}^5$

3) Matriks Toeplitz diagonal
   a) Matriks toeplitz 3×3

$$R = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 \end{bmatrix}$$

Substitusikan elemen-elemen matriks R ke persamaan (1)

$$|R| = \frac{1}{|t_0|} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ t_0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & t_0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$|R| = \frac{1}{t_0} \cdot \left((t_0{}^2 - 0) \cdot (t_0{}^2 - 0)\right) - \left((0 - 0) \cdot (0 - 0)\right)$$

$$|R| = \frac{1}{t_0} \cdot (t_0{}^4) = t_0{}^3$$

b) Matriks toeplitz 4×4
Seperti langkah yang pada poin a), maka diperoleh $|P| = t_0{}^4$

c) Matriks toeplitz 5×5
Seperti langkah yang pada poin a), maka diperoleh $|P| = t_0{}^5$

Dari 1), 2), dan 3), untuk tiap-tiap matriks Toeplitz segitiga atas, bawah dan diagonal maka dapat didefinisikan bahwa $\det(A) = t_0{}^n$.

Pada bagian selanjutnya akan dibahas beberapa sifat determinan matriks Toeplitz dengan bentuk khusus:

Definisi 6

Suatu matriks k-tridiagonal dinotasikan dengan $A_n^{(k)}$, dituliskan dalam bentuk umum sebagai berikut

$$A_n^{(k)} = [a_{ij}]_{n \times n}$$

jika

$$\begin{cases} a, & i = j \\ b, & i - j = k \\ c, & j - i = k \\ 0, i, j, i - j, k, j - i, k & \end{cases}$$

Teorema 7

Andaikan T_n adalah matriks Toeplitz Tridiagonal berukuran $n \times n$ [14]. Dimana

$$T_n = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \neq 0$$

Determinan T_n dapat dinyatakan sebagai berikut

$$|T_n| = a|T_{n-1}| - bc|T_{n-2}| \tag{18}$$

Dimana $|T_0| = 1$ dan $|T_1| = a$.

Bukti

Akan diuji menggunakan matriks Toeplitz Tridiagonal berukuran 3×3

$$T_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$$

Menggunakan (1) diperoleh

$$|T_n| = \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & 0 \\ a & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & a \\ 0 & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$|T_n| = \frac{1}{a} \cdot \left((a^2 - bc) \cdot (a^2 - bc)\right) - \left((b^2 - 0) - (c^2 - 0)\right)$$

$$|T_n| = \frac{1}{a} \cdot (a^4 - a^2bc - a^2bc + b^2c^2) - (b^2c^2)$$

$$|T_n| = a^3 - 2abc \tag{19}$$

Selanjutnya untuk matriks yang sama, akan dihitung determinannya menggunakan metode sarrus, diperoleh

$$|T_n| = a^3 - 2abc \tag{20}$$

Dari persamaan (19) dan (20) terlihat bahwa penyelesaian $|T_n|$ menggunakan metode salihu dan metode sarrus menghasilkan nilai yang sama, maka persamaan (18) terbukti benar.

Teorema 8

Andaikan $T_n^{(k)}$ adalah matriks Toeplitz k-Tridiagonal berukuran $n \times n$ dan dengan $k =$ jarak antar entri matriks [14]. Dimana

$$T_n^{(k)} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & c & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & c & 0 \\ \vdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & c \\ 0 & \vdots & 0 & a & \ddots & \cdots & 0 \\ b & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & b & 0 & \vdots & \ddots & a & 0 \\ 0 & \cdots & b & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \neq 0, \text{ dengan jumlah } a \text{ sebanyak } n$$

Maka determinan $T_n^{(k)}$ dinyatakan sebagai berikut

$$T_n^{(k)} = a\left|T_{n-1}^{(k)}\right| - bc\left|T^{(1)}_{\left|\frac{n}{k}\right|-2}\right|\left|T^{(k-1)}_{n-\left|\frac{n}{k}\right|}\right| \tag{21}$$

Dimana $n \geq k + 1$, $\left|T_s^{(k)}\right| = a^s$ untuk $0 \leq s \leq k$, dan $\left|\frac{n}{k}\right|$ merupakan pembulatan angka ke atas.

Bukti

Akan diuji menggunakan matriks Toeplitz k-Tridiagonal 5×5, untuk $k = 3$

$$T_5^{(3)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Gunakan persamaan (1), diperoleh

$$\left|T_5^{(3)}\right| = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & c \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

Untuk memperoleh $|B|$ akan digunakan persamaan (17), sehingga

$$|B| = a^3$$

Gunakan metode ekspansi kofaktor untuk memperoleh $|C|, |D|, |E|$, dan $|F|$.
Akan dilakukan ekspansi kofaktor baris ke-2 pada $|C|$, baris ke-3 pada $|D|$, baris ke-1 pada $|E|$, dan baris ke-2 pada $|F|$, diperoleh

$$|C| = -0 + a\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} - 0 + 0$$
$$= 0 + a \times (a^3 - abc) - 0 + 0 = a^4 - a^2bc$$

$$|D| = 0 - a\begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 - 0$$
$$= 0 - a \times 0 + 0 - 0 = 0$$

$$|E| = 0 - a\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 - 0$$
$$= 0 - a \times 0 + 0 - 0 = 0$$

$$|F| = -0 + a\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} - 0 + 0$$
$$= 0 + a \times (a^3 - abc) - 0 + 0 = a^4 - a^2bc$$

Setelah diperoleh $|B|, |C|, |D|, |E|$, dan $|F|$, substitusikan semua nilai yang didapat, sehingga

$$\left|T_5^{(3)}\right| = \frac{1}{|B|} \cdot (|C|.|F|) - (|D| \cdot |E|)$$
$$T_5^{(3)} = \frac{1}{a^3} \cdot \left((a^4 - a^2bc) \times (a^4 - a^2bc)\right) - (0 \times 0)$$
$$T_5^{(3)} = \frac{1}{a^3} \cdot a^8 - a^6bc - a^6bc + a^4b^2c^2$$
$$T_5^{(3)} = a^5 - 2a^3bc + ab^2c^2 \tag{22}$$

Selanjutnya untuk matriks yang sama, akan dihitung determinannya menggunakan metode ekspansi kofaktor, diperoleh

$$\left|T_5^{(3)}\right| = a^5 - 2a^3bc + ab^2c^2 \tag{23}$$

Dari persamaan (22) dan (23) terlihat bahwa penenyelesaian $|T_n|$ menggunakan metode salihu dan metode ekspansi kofaktor menghasilkan nilai yang sama, maka persamaan (21) terbukti benar.

Definisi 7
Andaikan T_n suatu matriks Toeplitz bentuk khusus berordo $n \geq 2$ [15], dimana

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall x \in \mathbb{R}$$

Teorema 9
Andaikan T_n merupakan matriks Toeplitz dengan bentuk khusus berukuran $n \geq 2$ pada definisi 7 dimana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka nilai determinannya adalah

$$|T_n| = (-1)^n(n-1)x^n \tag{24}$$

Bukti
Akan diuji dengan matriks Toeplitz bentuk khusus berukuran 3×3

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$$

Gunakan persamaan (1), karena $|B| = 0$ terlebih dahulu dilakukan pertukaran baris elementer. Akan ditukar baris pertama dengan baris kedua, sehingga

$$T_n = \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$|T_n| = \frac{1}{x} \cdot \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & x \\ x & 0 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$|T_n| = -2x^3 \qquad (25)$$

Selanjutnya untuk matriks yang sama, akan dihitung determinannya menggunakan metode sarrus, diperoleh

$$|T_n| = -2x^3 \qquad (26)$$

Dari persamaan (25) dan (26) terlihat bahwa penenyelesaian $|T_n|$ menggunakan metode salihu dan metode sarrus menghasilkan nilai yang sama, maka persamaan (24) terbukti benar.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, diperoleh:

a. Determinan matriks Toeplitz berukuran 3×3, $n \geq 3$ dapat dihitung menggunakan metode salihu yang dasarnya oleh metode kondensasi CHIO dan kondensasi Dodgson.

b. Sifat-sifat determinan matriks yang berlaku pada matriks Toeplitz dan sifat-sifat determinan matriks Toeplitz bentuk khusus, yaitu
   1) $\det(A^T) = \det(A)$.
   2) $\det(kA) = k^n \det(A)$, dengan k =scalar.
   3) $\det(A) = t_0 t_0 \ldots t_0$ untuk matriks Toeplitz segitiga atas, segitiga bawah dan diagonal.
   4) $|T_n| = a|T_{n-1}| - bc|T_{n-2}|$ untuk matriks toeplitz Tridiagonal.
   5) $T_n^{(k)} = a\left|T_{n-1}^{(k)}\right| - bc\left|T^{(1)}_{\left|\frac{n}{k}\right|-2}\right|\left|T^{(k-1)}_{n-\left|\frac{n}{k}\right|}\right|$ untuk matriks Toeplitz k-Tridiagonal.
   6) $|T_n| = (-1)^n(n-1)x^n$ untuk matriks Toeplitz bentuk khusus.

REFERENSI

[1] Arnellis. 2020. "The Effect of Realistic Mathematics Education Approach Oriented Higher Order Thinking Skills to Achievement Calculus". *Jurnal of Physics: Conference Series*: 1-5.

[2] Kariadinata, Rahayu. 2019. *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: CV Pustaka Setia.

[3] Subiono. 2022. *Aljabar: Suatu Pondasi Matematika.* Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[4] Gray, Robert M. 2005. *Toeplitz and Circulan Matrices*. Department of Electrical Engineering Stanford, USA.

[5] Anton, Howard dan Rorres Chris. 2004. *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi. Edisi 8.* Jakarta:Erlangga

[6] Wirawan, Nata. 2016. *Matematika Ekonomi Lanjutan.* Denpasar: Keraras Emas.

[7] Aryani, Fitri, dkk. 2018. "Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor". *Jurnal Sains Matematika.* Vol.04, No.2: 82-88

[8] Bahota, Andi. 2014. 'Menghitung Determinan Matriks $n \times n, (n \geq 3)$ dengan Menggunakan Metode Salihu'. *JOM FMIPA.* Vol.1. No.2: 344-350.

[9] Salihu, A. 2012. 'A New Method to Calculating Determinants of $n \times n$ $(n \geq 3)$ Matrix, by Reducing Determinants to 2nd Order'. *International Journal of Algebra.* Vol.6, No. 19: 913-917.

[10] Dwi, Sri Arttini. 2016. *Matriks, Vektor & Terapannya di Bidang Teknik.*Yogyakarta: Penerbit Andi.

[11] Soebagyo, Joko. 2020. *Matematika Teknik Aljabar Linier Matriks.* Bandung: Manggu Makmur Tanjung Lestari.

[12] Rainarli, Ednawati dan Dewi, Kania Evita. 2011. *Aljabar Linear dan Matriks.* Bandung: Universitas Komputer Indonesia.

[13] Wedderburn. 1934. *Lectures On Matrices.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

[14] Rasmawati, dkk. 2021. 'Determinan Suatu Matriks Toeplitz k-Tridiagonal menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor'. *Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan teknologi.* Vol.9, No.1:6-16.

[15] Siregar, bakti, dkk. 2014. 'Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin'. *Jurnal Saintia Matematika.* Vol.02, No.01:85-94.