Estimasi Parameter Model Suku Bunga Vasicek dengan Metode Jackknife pada Bank Indonesia

Michi Khairunnisa[1], Arnellis[2]
[1,2],Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received January 19, 2023
Revised February 02, 2023
Accepted June 20, 2024

Keywords:

Estimation
Ordinary Least Square
Vasicek
Jackknife

Kata Kunci:

Estimasi
OrdinaryLeast Square
Vasicek
Jackknife

ABSTRACT

Stochastic interest is exemplified by the Vasicek Interest Rate Model. Interest rates change from time to time. This study is a type of applied research in which the Jackknife Method to gauge the characteristics parameters of the Vasicek Interest Rate Model. The Jackknife method of parameter estimation involves resampling, which is done by taking out one observation from the data and repeat the process as often as necessary. The Jackknife technique is used to get estimates from observation with a small sample size. The goals of this study is to understand the Jackknife Method's estimate findings for the Vasicek Model parameters. The Vasicek Model parameter estimate process involves numerous steps, including establishing the recursive solution, changing the equation into a regression form, then transformation to the matrix and estimation to the parameter using the Jackknife technique. By following the step, it is possible to determine that the Vasicek interest rate model parameters is $a = 0.20424$, $b = 0.38909$, as well as $v = 0.28083$.

ABSTRAK

Bunga stokastik dicontohkan oleh model suku bunga Vasicek. Suku bunga berubah dari waktu ke waktu. Penelitian yang dilakukan ini merupakan jenis penelitian terapan dimana metode Jackknife digunakan untuk menduga parameter Model Suku Bunga Vasicek. Metode Jackknife mengestimasi parameter melibatkan *resampling* , yang dilakukan dengan menghapus satu pengamatan dari data serta mengulang proses sesering yang diperlukan. Teknik Jackknife ini digunakan agar memperoleh perkiraan dari pengamatan menggunakan sampel kecil. Penelitian ini bertujuan untuk memahami hasil estimasi metode Jackknife untuk parameter modeI Vasicek. Proses estimasii parameter modeI Vasicek melibatkan tahapan – tahapan antara lain menetapkan solusi rekursif, mengubahi ipersamaan menjadi model regresi, setelah itu merubah kedalam bentuk matriks, serta mengestimasi dengan metode Jackknife. Dengan melakukan sesuai tahapan didapatkan hasil nilaii parameter model suku bunga Vasicek sebesarr $a = 00.20424$, $b = 0.38909$, serta $v = 0.28083$.

Michi Khairunnisa

(Michi Khairunnisa)
Prodi Matematika, Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka,Air Tawar barat,Padang Utara, Padang, 25171 Padang,Sumatera Barat
Email: michikhairunnisa1701@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Ilmu matematika adalah instrument penting dalam banyak disiplin ilmu diseluruh dunia. Bahkan hingga saat ini matematika masih berkembang. Salah satu bidang dimana matematika berkembang yaitu ekonometrika, yang menggabungkan ekonomi, statistic, dan matematika. Ekonometrika ini hal yang mendasar dalam menelaah masalah – masalah ekonomi. Ekonometrika ini juga dapat digunakan untuk menunjukkan kaitan antara beberapa variabel ekonomi dengan cara estimasi [1].

Estimasi sendiri yaitu suatu proses yang bisa kita gunakan untuk menduga hasil dari pengaruh populasi yang belum diketahui dengan suatu parameter melalui sampel. Lalu estimasi dapat dikatakan suatu pemyataan tentang penggunaan sampel untuk suatu parameter populasi yang diketahui. Melalui cara penyajiannya estimasi (penduga) dapat dikelompokan menjadi dua yaitu estimasi interval dan estimasi tunggal. Kemudian menurut jenis parametemya estimasi dibagi menjadi empat yaitu estimasi rata-rata, estimasi varian, estimasi proporsi dan estimasi simpangan baku [2].

Fakta bahwa suku bunga berfluktuasi secara tidak teratur disebabkan oleh berbagai variable. Oleh karena itu kita dapat membuat model suku bunga stokastik menggunakan tingkat suku bunga [3]. Nilai yang dihasilkan dari penggunaan dana inventasi yang dilakukan selama jangka waktu tertentu juga disebut sebagai tingkat suku bunga. Suku bunga adalah salah satu alasan seseorang menabung atau melakukan investasi. Sebenarnya tidak mudah untuk menghitung nilai untuk tingkat bunga tetap. Namun jika kita cermati lebih dalam pergerakan merupakan proses stokastik yang selalu berubah dan tidak pasti. Oleh sebab itu dibutuhkan suatu modeel pergerakan untuk tingkat suku bunga dalam proses stokastik ini [4].

Model untuk tingkat suku bunga stokastik hingga memasuki tahun 1990-an sudah banyak yang dimunculkan. Salah satunya yaitu model yang dipperkenalkan oleh Oldrich Vasicek yang diberi nama model Vasicek [5]. Model Vasicek ini yaitu bagian dari model matematika yang membahas tentang pergerakan tingkat bunga juga tergolong persamaan differensial stokastic yang dapat mengilustrasikan fluktuasi pergerakan *short-rate* (tingkat suku bunga sesaat) dari imbal hasil obligasi selama masa obligasi [6]. Model Vasicek merupakan teknik simulasi naik turunnya suku bunga sebagai risiko harga pasaran. Didefinisikan bahwa *Ornstein Uhlenbeck* akan diikuti oleh r, dan suku bunga akan berfluktuasi dari waktu ke waktu dengan koefisien konstan. [7]. Proses OU *(Ornstein Uhlenbeck)* satu dimensi didefinisikan sebagai solusi persamaan diferensial stokastik sebagai berikut :

$$dX(t) = -aX(t)dt + vdW(t)$$ [8].

Quenouille di tahun 1949 memperkenalkan metode Jackknife yang termasuk dalam metode non parametrik yang tujuannya untuk memperkirakan bias penaksir dengan cara menghilangkan pengamatan dari sampeI sebenarnya. SampeI yang diperoleh dapat dipakai untuk menaksir taksiran dari penaksir. Untuk memperkirakan varian dari suatu estimasi parameter dapat menggunakan Metode Jackknife. Dalam memecahkan persoalan estimasi parameter menggunakan metode Jackknife dapat memperoleh hasil dengan tingkat keakuratan yang baik [9].

Selain menggunakan metode Jackknife, penelitian ini juga dibantu dengan metode OLS *(Ordinary Least Square)* yang disebut metode kuadrat kesalahan terkeciI yang sederhana. Agar ditemukan nilai regresi yang *Unbiased*, konsisten dan efisien, perkiraan ini memiliki sejumlah persyaratan yang harus dipenuhi. Secara teori, nilai parameter ditentukan dengan metode penaksir kuadrat terkecil *(Least Square)* dengan meminimalkan kesalahan kuadrat [10].

Apakah estimator itu baik atau tidak dapat ditentukan dengan beberapa karakteristik berikut :

1) *Unbiased* , dimana pendekatan estimator terhadap nilai riil parameter merupakan salah satu item yang menjadi tujuan dalam pendugaan [11] atau dapat dikatakan estimator unbiased pada parameter β apabila $E(\hat{\beta}) = \beta$ [12].

2) Efisien, statistik menggunakan varian yang minimum disebut sebagai penaksir rata – rata yang efisien, sedangkan statistic lainnya disebut sebagai penduga yang tidak efisien, apabila distribusi sampling dari kedua statistic memiliki rata – rata atau harapan yang sama.
3) Konsisten, semakin besar n atau jumlah sampel, estimator tersebut semakin reliable karena semakin mendekati nilai parameter populasi [13].

Penelitian untuk estimasi parameter dalam regresi berganda dengan menggunakan teknik pengambilan sampel berulang Bootstrap dan Jackknife telah dilakukan oleh Noeryanti dan Herindani [14] , standar *error* yang digunakan dalam penelitian ini untuk menemukan teknik mana yang lebih baik untuk memperkirakan parameter model regresi. Menurut temuan studi tersebut, Mtode pengambilan sampel berulang Jackknife menghasilkan estimasi yang lebih akurat dibanding pengambilan sampel berulang Bootstrap.

2. METODE

Pada model ini regresi linear digunakan agar diketahui pengaruh antara variabel dependen dan variabel independen. Pendekatan Jackknife digunakan untuk melengkapi estimasi parameter untuk model suku bunga Vasicek . Partisi regresi linier adalah sebagai berikut [15] :

a. Regresi Linear Sederhana

Model regresi linear sederhana memiliki rumus seperti berikut :

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$$

dimana:

Y_i : VariabeI dependen periode ke - i
β_1 : lntersep (titik potong terhadap sumbu Y)
β_2 : sIope (Koefisienregresi)
X_i : VariabeI independen periode ke - i
ε_i : *Error* $(\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Selanjutnya menjadi bentuk:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}.$$

Dengan matriks diatas diperoleh bentuk yang lebih sederhana :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan:

$\boldsymbol{Y}$: Vektor kolom variable dependen Y
$\boldsymbol{X}$: Matriks data sebanyak n data
$\boldsymbol{\beta}$: Vektor kolom parameter yang tidak diketahui
$\boldsymbol{\varepsilon}$: Vektor kolom *error*.

b. Regresi Linear Berganda

Jenis persamaan regresi linear berganda dipergunakan untuk menunjukkan hubungan antara satu variabeI dependen(Y) dan satu atau lebih variabeI independen(X). Dengan persamaan berikut:

$$Y_j = \beta_1 + \beta_2 X_{2j} + \beta_3 X_{3j} + \cdots + \beta_k X_{kj} + \varepsilon_j$$

dengan :

Y_i : VariabeI dependen periode ke$-j$, untuk $j = 1, 2, 3, \dots, n$
β_1: Titik potong kurva
$\beta_2, \dots . \beta_k$: Koefisien kemiringan
$X_2, \dots . X_k$: Variabel bebas periode ke $-j$
ε_i : $error$ $\left(\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)\right)$

k : Indeks dari variable bebas
Sehingga diperoleh :

$$\begin{gathered} Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\ Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_n \end{gathered} \tag{1}$$

Sistem persamaan (1) ditulis kedalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} \cdots X_{k1} \\ 1 & X_{22} \cdots X_{k2} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ 1 & X_{2n} \cdots X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks tersebut didapatkan bentuk sederhananya:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

dengan :

$\boldsymbol{Y}$: Vektor kolom dalam variable dependen Y
$\boldsymbol{X}$: Matrik data dari banyak data n pada indeks $k-1$ untuk variable X_2 - X_k
$\boldsymbol{\beta}$: Vektor kolom parameter yang tidak diketahui β_1- β_2
$\boldsymbol{\varepsilon}$: Vektor kolom *error*.

Penelitian yang dilakuan merupakan penelitian terapan. Data atau informasi yang digunakan yaitu data sekunder tentang suku bunga Bank Indonesia tahun 2011 sampai 2015 yang diperoleh dari hasil publikasi Bank Indonesia. Langkah analisis datanya sebagai berikut :

1) Melakukan estimasi parameter modeI Vasicek dengan metode Jackknife
   a) Menemukan solusi rekursif model suku bunga Vasicek.
   b) Membuat bentuk regresi dari persamaan solusi rekursif ModeI Vasicek
   c) Merubah bentuk regresi ke dalam matrik.
   d) Melakukan estimasi model Vasicek dengan metode Jackknife
2) Menggunakan metode Jackknife untuk menerapkan estimasi parameter model Vasicek di Bank Indonesia.
   a. Melakukan estimasi model Vasicek menggunakan metodel OLS.
   b. Melakukan estimasi model Vasicek dengan metode Jackknife pada suku bunga Bank lndonesia.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

3.1 Melakukan Pendugaan Parameter Model Vasicek menggunakan Metode Jackknife

3.1.1 Menemukan Solusi Rekursi ModeI Suku Bunga Vasicek

Salah satu model dari proses *Ornstein Uhlenbeck* yaitu model suku bunga Vasicek. Akibatnya, menemukan solusi rekursif untuk persamaan model vasicek sangan diperlukan. Jawabannya dapat ditemukan dengan mengalikan $X(t)$ dengan fungsi eksponensial e^{Kt} dengan menerapkan metode OU. Berdasar model suku bunga Vasicek :

$$dr(t) = a(-r(t) + b)dt + vdW(t), \ .r(0) = r_0.$$

Misalkan,

$$X(t) = -b + r(t) \tag{2}$$

dan

$$Y(t) = uv = e^{at}X(t) \tag{3}$$

didapatkan persamaan differensialnya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} &= \frac{d(uv)}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}u + \frac{du}{dt}v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dY(t) &= v(du) + dv(u) \\ &= e^{at}dX(t) + ae^{at}X(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Maka persamaan pada proses OU yaitu $dX(t) = -aX(t)dt + vdW(t)$ disubstitusikan kedalam persamaan (4) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dY(t) &= ae^{at}X(t) + e^{at}[-aX(t)dt + vdW(t)] \\ &= ae^{at}X(t) - ae^{at}X(t) + e^{at}vdW(t) \\ &= e^{at}vdW(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Sehingga solusi $Y(t)$ diperoleh dengan cara mengintegralkan sisi kiri dan sisi kanan pada persamaan (5), dengan memberi batas $0 \leq s \leq t$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \int dY(t) &= \int e^{at}vdW(t) \\ Y(t) &= Y(0) + \int_0^t e^{as}vdW(s) \end{aligned} \quad (6)$$

dari persamaan (3), ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned} Y(0) &= e^{a.0}X(0) \\ Y(0) &= X(0). \end{aligned} \quad (7)$$

Berdasarkan persamaan (3), (6) dan (7) diperoleh :

$$\begin{aligned} e^{at}X(t) &= X(0) + \int_0^t e^{as}vdW(s) \\ X(t) &= e^{-at}\left(X(0) + \int_0^t e^{as}vdW(s)\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Selanjutnya persamaan (2) disubstitusikan ke (8) sehingga diperoleh solusi:

$$\begin{aligned} r(t) - b &= e^{-at}\left(X(0) + \int_0^t e^{as}vdW(s)\right) \\ r(t) &= e^{-at}(r(0) - b) + ve^{-at}\int_0^t e^{as}vdW(s) + b \\ &= e^{-at}(r(0) - b) + v\int_0^t e^{-a(t-s)}dW(s) + b \\ &= e^{-at}r(0) + b(-e^{-at} + 1) + (v)\int_0^t e^{(-v)(t-s)}dW(s). \end{aligned} \quad (9)$$

Sehinggadiperoleh solusi model suku bunga Vasicek pada setiap $s \leq t$ adalah

$$r(t) = r(0)\varepsilon^{-a(-s+t)} + b\left(1 - \varepsilon^{-a(-s+t)}\right) + v\int_s^t e^{-a(-u+t)}\, dW(\, u\,). \quad (10)$$

3.1.2 Merubah Persamaan dalam Model Regresi

Persamaan (10) didiskritisasi menggunakan model Euler untuk mensimulasikan r pada waktu $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, yaitu:

$$y_{j+1} = y_j + y_j'\Delta x$$

$$y_j' = \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}$$

didapatkan

$$\begin{aligned} dr(t) &= \left(b - r(t_i)\right)adt + vdW(t) \\ \frac{r(t_{j+1}) - r(t_j)}{\Delta t} &= \left(b - r(t_j)\right)adt + vdW(t) \\ r(t_{j+1}) - r(t_j) &= \left(b - r(t_j)\right)a\Delta t + \sqrt{\Delta t}Z_j v \end{aligned}$$

$$= \left(b - r\left(t_j\right)\right) a\Delta t + \Delta W_j v$$

(11)

dengan $i = 0, \dots, n-1$ dan $\sqrt{\Delta t} Z_i$ memiliki porsi yang sama dengan $\Delta W_j = W_{(t_{j+1})} - W_{t_j}$ dengan $Z_i \sim N(0,1)$ persamaan (10) dapat dirubah kedalam bentuk :

$$\begin{aligned} r\left(t_{j+1}\right) &= r\left(t_j\right) + \left(b - r(t_i)\right) a\Delta t + v\Delta W_j \\ &= r\left(t_j\right) + ab\Delta t - ar(t_j)(\Delta t) + \Delta W_j v \\ &= r\left(t_j\right)(1 - a\Delta t) + ab\Delta t + \Delta W_j v. \end{aligned} \tag{12}$$

Metode Jackknife merupakan satu diantara metode untuk mengestimasi $a, b\ dan\ v$ pada modeI suku bunga Vasiicek. Persamaan (12) diubah kedalam bentuk persamaan regresi seperti berikut :

$$Y_j = pX_j + q + e_j$$

dengan solusi :

$$\begin{aligned} Y_j &= r\left(t_{j+1}\right) \\ X_j &= r\left(t_j\right) \\ p &= (1 - a\Delta t) \\ q &= ab\Delta t \\ e_j &= \Delta W_j v. \end{aligned}$$

3.1.3 Merubah Model Regresi menjadi Bentuk Matriks

Persamaan (11) dinotasikan dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & \Delta t \\ r(t_2) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + v\Delta t \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{N-1}(0,1) \end{bmatrix} \tag{13}$$

dapat diperoleh

$$y = \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} r(t_1) & \Delta t \\ r(t_2) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$e = \Delta t . v \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{N-1}(0,1) \end{bmatrix}.$$

Sehingga bentuk linear pada (12) dapat dibuat sederhana memjadi :

$$y = X\beta + e \quad . \tag{14}$$

Berdasarkan persamaan $\hat{\beta}_{OLS}$, maka dengan cara OLS dapat diperoleh penduga parameter $\hat{\beta}_{ols}$ yaitu:

$$\widehat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1}X'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} r(t_1) & r(t_2) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ \Delta t & \Delta t & \cdots & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_1) & \Delta t \\ r(t_2) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} r(t_1) & r(t_2) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ \Delta t & \Delta t & \cdots & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Jika telah didapatkan parameter $\hat{\beta}_{ols}$ dari (14) , maka diperoleh estimasi parameter a dan b. Kemudian paremeter $\hat{\beta}_{ols}$ dapat diganti ke persamaan (13) seperti berikut :

$$y = X\hat{\beta}_{ols} + e \quad (16)$$

dan berdasarkan persamaan **(15)** dapat dihitung nilai – nilai errornya yaitu :

$$e = y - X\hat{\beta}_{ols}. \quad (17)$$

Sesudah memperoleh nilai *error* pada persamaan (16) , lalu persamaan (12) menjadi seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & \Delta t \\ r(t_2) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

3.1.4 Melakukan Estimasi Parameter Model Vasicek dengan Metode Jackknife

Dengan menghapus satu persatu pengamatan dari data atau terlebih dahulu menghapus vector baris pertama dan mengulangi prosedur sejumlah sampel data merupakan cara untuk memperkirakan parameter model Vasicek dengan metode Jackknife. Menghilangkan satu baris ke-i, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ adalah langkah pertama dalam pendugaan parameter Jackknife.
Jika $i = 1$, untuk persamaan (17) didapatkan:

$$\begin{bmatrix} r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_2) & \Delta t \\ r(t_3) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

dapat dimisalkan

$$y^1 = \begin{bmatrix} r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} r(t_2) & \Delta t \\ r(t_3) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix}$$

$$\beta^1 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$e^1 = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Dengan menghitung *mean* dari masing – masing estimasi parameter $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \dots, \hat{\beta}^n$ Penduga parameter Jackknife didapatkan sebagai berikut :

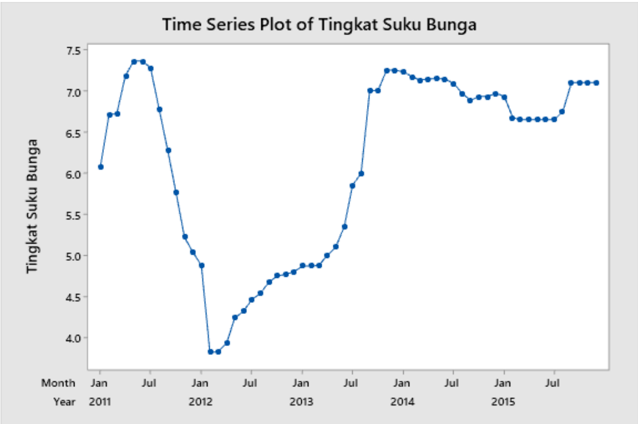
$$\hat{\beta}^j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}^i}{n}$$

Kemudian pada persamaan (12) diperoleh parameter a dan b dan v sebagai berikut:

$$a = \frac{(1-p)}{\Delta t}$$
$$b = \frac{(q)}{a.\Delta t} = \frac{q}{\frac{1-p}{\Delta t}\Delta t} = \frac{q}{(1-p)}$$
$$v = \sqrt{\frac{var(e)}{\Delta t}}.$$

3.2 Penerapan Metode Jackknife pada Model Vasicek

Bagian ini menjelaskan bagaimana menggunakan Metode Jackknife untuk mengestimasi parameter menggunakan model Vasicek pada suku bunga Bank Indonesia. Berikut ini adalah data suku bunga Bank Indonesia yang dipakai untuk pengamatan pada studi ini, dengan jangka waktu yang dimulai pada Januari 2011 sampai dengan Desember 2015 yang terlihat pada gambar berikut :



Gambar 1. Pergerakan Suku Bunga Bank lndonesia Tahun 2011 hingga 2015

Dari Gambar 1 terlihat bahwa tingkat suku bunga berfluktuasi yaitu dengan tingkat suku bunga tebesar senilai 7,36% terjadi pada bulan Mei dan Juni 2011 dan tingkat suku bunga terendah sebesar 3,82% terjadi pada bulan Februari 2012. Dalam jangka waktu tertentu suku bunga dapat meningkat atau berkurang. Pasokan uang cenderung meningkat ketika tingkat bunga rendah atau sebaliknya.

3.2.1 Pendugaan Parameter Model Vasicek menggunakan Metode Jackknife

Ada total 60 pengamatan dengan $i = 1,2,3, \dots, n-1$ yang ditulis dalam bentuk matriks seperti :

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_{60}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1)\ \Delta t \\ r(t_2)\ \Delta t \\ \vdots \quad \vdots \\ r(t_{59})\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{59} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} 6,71 \\ 6.72 \\ \vdots \\ 7.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,08 & 1 \\ 6,71 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7,1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{59} \end{bmatrix}.$$

Misalkan

$$y = \begin{bmatrix} 6,71 \\ 6.72 \\ \vdots \\ 7.1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6,08 & 1 \\ 6,71 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7,1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{59} \end{bmatrix}$$

dimana :

$\boldsymbol{y}$: vektor Y berukuran 59 x 1

$\boldsymbol{X}$: matriks data X berukuran 59 x 2

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameterr penduga berukuran 2 x 1

$\boldsymbol{e}$: vektor *error* berukuran 59 x 1.

Didapat penduga parameter $\hat{\beta}_{ols}$ yaitu :

$$\hat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 6,08 6,71 \cdots 7,1 \\ 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,08 & 1 \\ 6,71 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7,1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 6,08 6,71 \cdots 7,1 \\ 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6118 \\ 0,0079 \\ \vdots \\ 0,0079 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,9744 \\ 0,1734 \end{bmatrix}.$$

Kemudian nilai $\hat{\beta}_{ols}$ dapat disubstitusikan kedalam persamaan $y = X\hat{\beta}_{ols} + e$, maka bentuknya menjadi

$$Y = X\hat{\beta}_{ols} + e$$

$$\begin{bmatrix} 6{,}71 \\ 6.72 \\ \vdots \\ 7.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}08 & 1 \\ 6{,}71 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7{,}1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9744 \\ 0{,}1734 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{59} \end{bmatrix}$$

maka dapat dihitung nilai *error*nya sebagai berikut

$$e = Y - X\hat{\beta}_{ols}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{59} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}71 \\ 6.72 \\ \vdots \\ 7.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6{,}08 & 1 \\ 6{,}71 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7{,}1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9744 \\ 0{,}1734 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}6118 \\ 0{,}0079 \\ \vdots \\ 0{,}0079 \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

sesudah diperoleh nilai *error* model pada persamaan (21), persamaan (20) menjadi:

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_{60}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & \Delta t \\ r(t_2) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{59}) & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}6118 \\ 0{,}0079 \\ \vdots \\ 0{,}0079 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

dimana :

- $\boldsymbol{y}$: vektor data Y berukuran 59 x 1
- $\boldsymbol{X}$: matriks data X berukuran 59 x 2
- $\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter beta berukuran 2 x 1
- $\boldsymbol{e}$: vektor *error* berukuran 59 x 1.

Tahap awal untuk perkiraan parameter Jackknife yaitu menghilangkan tiap satu baris ke- i, dimana $i = 1,2,3,\dots,59$.
Untuk $i = 1$, dari persamaan (22) didapat:

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_{60}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & \Delta t \\ r(t_2) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{59}) & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0079 \\ 0{,}4581 \\ \vdots \\ 0{,}0079 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

$$\begin{bmatrix} 6{,}72 \\ 7{,}18 \\ \vdots \\ 7{,}1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}72 & \Delta t \\ 6{,}18 & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{59}) & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0079 \\ 0{,}4581 \\ \vdots \\ 0{,}0079 \end{bmatrix}.$$

Dapat dimisalkan

$$y^1 = \begin{bmatrix} 6{,}72 \\ 7{,}18 \\ \vdots \\ 7{,}1 \end{bmatrix}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix} 6{,}72 & 1 \\ 7{,}18 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7{,}1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta^1 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

ISSN: 2807-3460

$$e^1 = \begin{bmatrix} 0,0079 \\ 0,4581 \\ \vdots \\ 0,0079 \end{bmatrix}.$$

dengan :

y : vektor data Y berukuran 58 x 1
X : matriks data X berukuran 58 x 2
β : vektor parameter beta berukuran 2 x 1
e : vektor *error* berukuran 58 x 1.

Selanjutnya , didapat penduga(estimasi) parameter $\hat{\beta}^1$ yaitu :

$$\hat{\beta}^1 = (X^{1T}X^1)X^{1T}Y^1$$

$$= \left(\begin{bmatrix} r(t_2) & r(t_3) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ \Delta t & \Delta t & \cdots & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_2) & \Delta t \\ r(t_3) & \Delta t \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{n-1}) & \Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} r(t_2) & r(t_3) & \cdots & r(t_{n-1}) \\ \Delta t & \Delta t & \cdots & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 6{,}71 6{,}72 \cdots 7{,}1 \\ 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6{,}71 & 1 \\ 6{,}72 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 7{,}1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 6{,}71 6{,}72 \cdots 7{,}1 \\ 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6{,}72 \\ 7{,}18 \\ \vdots \\ 7{,}1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}97475 \\ 0{,}16117 \end{bmatrix}.$$

Hasil estimator dari $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \dots, \hat{\beta}^{59}$ akan diketahui dengan menggunakan teknik dan langkah yang sama, kemudian akan dihitung parameter Jackknife $\left(\hat{\beta}^j\right)$ melalui perhitungan nilai *mean* dari masing-masing penduga parameter $\hat{\beta}^1, \hat{\beta}^2, \dots, \hat{\beta}^{59}$, yaitu:

$$\left(\hat{\beta}^j\right) = \frac{1}{59} \sum_{i}^{n} \hat{\beta}^i.$$

Selanjutnya dapat diketahui parameter a dan b sebagai berikut: $a =$0,20424 , $b =$0,38908 ,dan $v =$0,28083

$$a = 0{,}20424$$

$$b = 0{,}38909$$

$$v = 0{,}28083.$$

4 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan didapat kesimpulan bahwa hasil dari estimasi atau pendugaan parameter modeI Vasicek dengan metode Jackknife pada data suku bunga Bank Indonesia dari Januari 2011 hingga Desember 2015 adalah

$$dr(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - 0{,}204\Delta t) + 0{,}389 + 0{,}281\Delta \mathrm{W}_i\,.$$

REFERENSI

[1] Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic E conometrics.*Fourth Edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.
[2] Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok – Pokok Materi Statistik I (Statistik Deskriptif).* Jakarta: Bumi Aksara.
[3] Erlangga, Chandra Nugroho, dan Kusumawati, Rosita. 2016. Aplikasi Model Suku Bunga Stokastik Black-Derman- Toy dengan Forward Induction dalam perhitungan Anuitas. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains: 1-6.*
[4] Boediono.2014. *Pengantar Ilmu Ekonomi Makro. Yogyakarta:BPFE.*
[5] *Vasicek*, O. 1977.*An Equilibrium Characterization of Term Structure*.Journal of Economics.
[6] Manullang, Sudianto. 2012. Application Of *Vasicek*'s Rate Interest Model In Term Insurance Premiums Calculation. *Jurnal generasi Kampus*.5 (2).120-129.
[7] Zeytun S.,dan Gupta, A.2007. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR model of the short Rate*. Germany. Fraunhofer Institut Techno-und Wirtschaftsmathematik.
[8] Carmona, Rene A. dan Tehranchi, Michael R.. 2005. *Interest Rate Models: an infinite Dimensional Stochastik Analysis Perspective.* Germany: Cambridge University & Princeton University.
[9] Sprent, P. 1989. *Applied Nonparametrik Statistical Methods*. New York: Chapman and Hall.
[10] Ekananda, Mahyus. 2005. *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Mitra Wacana Media
[11] Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar – dasar Statistika.* Jakarta: CV. Rajawali
[12] Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistik*. Yogyakarta: Gajah Mada University press
[13] Sleeper, Andrew. 2006. *Design for Six Sigma Statistics*. United States: The McGraw-Hill Companies, Inc.
[14] Noeryanti, dan Herindani, Rika. 2016. Estimasi Parameter Regresi Ganda menggunakan Bootstrap dan Jackknife. *Prosiding Seminar Nasional Aplikasi Sains dan Teknologi* (SNATS).
[15] Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic Econometrics.*Fourth Edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.