

# Model Matematika Penyebaran *Citrus Vein Enation Virus* Pada Tanaman Jeruk Nipis Melalui Serangga Kutu Daun

Fitri Yani<sup>1</sup>, Arnellis<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

---

## Article Info

### Article history:

Received January 18, 2023  
Revised February 06, 2023  
Accepted December 20, 2023

---

### Keywords:

Mathematical model  
*Citrus vein enation virus*  
*Toxoptera citricidus*

### Kata Kunci:

Model Matematika  
*Citrus vein enation virus*  
*Toxoptera citricidus*

## ABSTRACT

*Citrus vein enation virus* is a virus that attacks lime plants. This virus can cause swelling of the veins of the leaf veins like clumps that are spread irregularly on the underside of the leaves resulting in decreased yields and short-lived plants. This virus is spread by aphids. This research was conducted with the aim of knowing the shape of the mathematical model for the spread of the *Citrus vein enation virus* and interpreting the research results from the mathematical model. This research uses basic research types and descriptive methods. From the results of the study it was found that the mathematical model of the spread of the *Citrus vein enation virus* was in the form of a system of differential equations and the interpretation of the model obtained 2 equilibrium points including the equilibrium point  $E_0$  which is asymptotically stable because it obtained  $R_0 < 1$  which is 0.1502685768 which means the virus can disappear within a certain time and the equilibrium point  $E_1$  which is asymptotically stable because it gets  $R_0 > 1$  which means 1.502685768 which means the virus will spread in time long.

## ABSTRAK

*Citrus vein enation virus* merupakan virus yang menyerang tanaman jeruk nipis. Virus ini dapat menyebabkan adanya pembengkakan vena tulang daun seperti gumpalan yang tersebar tidak teratur pada bagian bawah permukaan daun sehingga hasil panen menurun dan tanaman berumur pendek. Virus ini disebarkan oleh vektor serangga kutu daun. Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui bentuk model matematika penyebaran *Citrus vein enation virus* dan menginterpretasikan hasil penelitian dari model matematika tersebut. Penelitian ini menggunakan jenis penelitian dasar dan metode deskriptif. Dari hasil penelitian diperoleh bahwa model matematika penyebaran *Citrus vein enation virus* berbentuk sistem persamaan diferensial dan interpretasi dari model didapatkan 2 titik ekuilibrium diantaranya titik ekuilibrium  $E_0$  yang sifatnya stabil asimtotik karena didapatkan  $R_0 < 1$  yaitu 0.1502685768 yang artinya virus dapat menghilang dalam waktu tertentu dan titik ekuilibrium  $E_1$  yang sifatnya stabil asimtotik karena didapatkan  $R_0 > 1$  yaitu 1.502685768 yang artinya virus akan mengalami penyebaran dalam waktu lama.

This is an open access article under the [CC BY-SA](#) license.



---

## Penulis pertama

(Fitri Yani)

Departemen Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Negeri Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, 25171 Padang, Sumatera Barat  
Email: [fy32385@gmail.com](mailto:fy32385@gmail.com)



---

## 1. PENDAHULUAN

Negara Indonesia adalah salah satu negara dengan sumber daya alam yang sangat melimpah. Di Indonesia banyak sekali jenis tanaman yang bisa tumbuh dengan subur. Pada umumnya tanaman tersebut dimanfaatkan untuk obat herbal oleh orang terdahulu. Tanaman herbal yang sering dimanfaatkan masyarakat untuk pengobatan tradisional salah satunya adalah jeruk nipis (*Citrus aurantifolia*) [1]. Jeruk nipis merupakan tanaman dari Asia yang berkembang di lingkungan tropis dengan genus *Citrus* dan berasal dari famili *Rutaceae*. Tanaman ini bisa hidup pada kemiringan 30° dan memiliki kandungan garam 10% [2]. Flavonoid, saponin, dan minyak atsiri juga terdapat dalam jeruk nipis [3]. Jeruk nipis juga mempunyai karakteristik kimiawi yaitu kandungan gula tinggi serta kandungan asam yang kuat [4].

Jeruk nipis sampai saat ini masih merupakan komoditas buah yang menguntungkan untuk diusahakan. Hal ini dikarenakan kebutuhan jeruk nipis begitu besar, namun ketersediaan jeruk nipis belum begitu banyak. Ada kalanya produktivitas jeruk nipis di Indonesia mengalami penurunan yang cukup drastis. Wabah penyakit puru berkayu adalah permasalahan utama penyebab turunnya hasil produksi jeruk nipis di Indonesia. Di Indonesia penyakit puru berkayu ini telah didapati di daerah Jawa Barat dan Tengah. Sementara di luar negeri sudah ditemukan di Peru, Fiji, India, Australia, Afrika Selatan, dan Amerika Serikat. Virus penyebab penyakit puru berkayu ini antara lain yaitu CVEV (*Citrus vein enation virus*) yang dapat mengakibatkan umur tumbuhan menjadi singkat dan menyebabkan produksi tanaman menjadi menurun. CVEV awalnya ditemukan di California, gejalanya mengakibatkan pembengkakan tulang daun, yang tampak seperti gumpalan yang tersebar tidak menentu di bagian bawah daun. Gejala-gejala ini awal mulanya berukuran kecil seperti struktur yang menonjol kira-kira 1 mm di permukaan daun. Jika diraba, pembengkakannya dapat terlihat dengan jelas dan awalnya muncul pada daun muda dan pada umumnya terjadi antara 2-3 bulan setelah virus ditularkan [5]. CVEV bersifat endemik di perkebunan jeruk. Pada suhu tinggi penyakit yang muncul akibat CVEV dapat ditekan dengan baik [6].

Serangga vektor dapat menyebabkan penularan virus dari tanaman ke tanaman [7]. Apabila tanaman jeruk nipis yang sehat diserbu oleh vektor serangga yang sebelumnya telah berinteraksi dengan tanaman jeruk nipis yang terinfeksi, maka tanaman jeruk yang sehat dapat terjangkit CVEV. Kutu daun (*Toxoptera citricida*) merupakan salah satu serangga yang menyebarkan CVEV [8]. Serangga ini berukuran kecil dan pemakan getah tanaman [9]. Lebih dari 150 strain virus yang berbeda dapat ditularkan oleh kutu daun sehingga menjadikannya sebagai vektor yang efisien dalam menyebarkan virus tanaman [10]. Ada lebih dari 4000 spesies kutu daun di dunia, dan 300 di antaranya berpotensi menularkan 300 jenis virus tanaman yang berbeda [11]. Kutu daun dapat mengakibatkan kerugian ekonomi yang signifikan selain berperan sebagai vektor virus [12]. Kutu daun merusak tanaman dengan menusuk daun dengan stiletnya, yang menghambat atau menghentikan pertumbuhan tanaman [13]. Kutu daun memakan cairan tanaman dan mengeluarkannya dalam bentuk cairan gula yang dikenal dengan nama embun madu yang mana embun madu ini dapat merangsang pertumbuhan cendawan jelaga [14]. Menurut Miles (1987), kerugian akibat kutu daun sebagai hama bervariasi dari 6-25%, dan sebagai vektor dapat mencapai 80% [15].

Berdasarkan masalah tersebut, penelitian ini akan dilakukan dengan tujuan diantaranya untuk mengetahui bentuk model matematika penyebaran CVEV dan menginterpretasikan hasil penelitian dari model matematika tersebut guna untuk menggambarkan kondisi yang nyata pada penyebaran CVEV (*Citrus vein enation virus*) pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun dan juga sebagai perencanaan dan kontrol dalam membuat kebijakan. Sehingga peneliti tertarik untuk memodelkan permasalahan penyebaran CVEV (*Citrus vein enation virus*) ini ke dalam bentuk persamaan matematika.

## 2. METODE

---

Penelitian ini menggunakan jenis penelitian dasar (teoritis) dan metode deskriptif. Tahapan langkah yang akan dikerjakan untuk mengatasi permasalahan pada penelitian ini yaitu: a. Mengidentifikasi masalah yang akan diangkat yaitu model matematika penyebaran CVEV pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun. b. Mengumpulkan dan mengkaji teori-teori yang relevan tentang masalah model matematika penyebaran CVEV pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun. c. Menentukan variabel, parameter, dan asumsi yang akan digunakan dalam pembentukan model. d. Membentuk model dari variabel, parameter serta asumsi yang telah ditentukan. e. Menganalisis model matematika penyebaran CVEV pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun yang sudah didapatkan. f. Menginterpretasikan hasil analisis yang diperoleh. g. Membuat kesimpulan.

### 3. HASIL DAN PAMBAHASAN

#### 3.1 Model Matematika

Pembentukan model matematika diawali dengan mengidentifikasi permasalahan yang akan diselesaikan. Tahapan ini menentukan faktor-faktor yang dianggap penting yaitu identifikasi variable, parameter, dan asumsi. Setelah itu membentuk hubungan antara variabel dengan parameter tersebut:

Variabel dalam pembentukan model matematika penyebaran CVEV yaitu:

$S$  merupakan kelompok tanaman yang rentan terhadap CVEV.

$I$  merupakan kelompok tanaman yang terinfeksi CVEV.

$R$  merupakan tanaman yang sembuh dari CVEV.

$S_x$  merupakan vektor serangga yang rentan terhadap CVEV.

$I_x$  merupakan vektor serangga yang terinfeksi CVEV.

Parameter dalam pembentukan model matematika penyebaran CVEV yaitu:

$\Pi$  merupakan jumlah pertambahan populasi tanaman.

$\Pi_1$  merupakan jumlah pertambahan populasi serangga.

$\beta$  merupakan tingkat infeksi pada tanaman yang diakibatkan oleh serangga.

$\beta_1$  merupakan tingkat infeksi pada serangga yang diakibatkan oleh tanaman.

$\mu$  merupakan tingkat kematian secara alami pada tanaman.

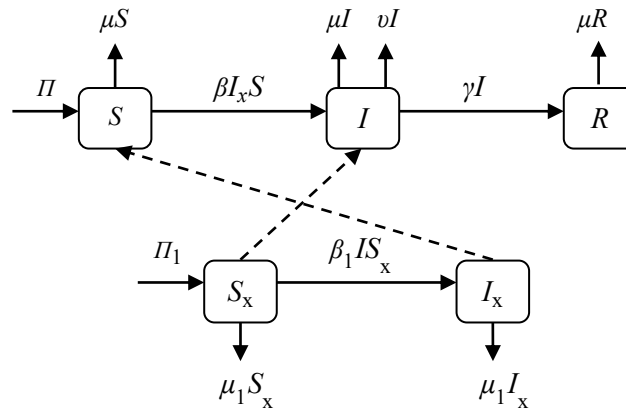
$\mu_1$  merupakan tingkat kematian secara alami pada serangga.

$\nu$  merupakan tingkat kematian tanaman yang terinfeksi karena terkena CVEV.

$\gamma$  merupakan tingkat pemulihan pada tanaman jeruk nipis.

Asumsi-asumsi dalam pembentukan model matematika penyebaran CVEV yaitu: a. Tanaman jeruk nipis yang baru ditanam termasuk ke dalam populasi rentan. b. Serangga kutu daun yang belum terinfeksi CVEV termasuk kedalam populasi rentan. c. Tanaman jeruk nipis yang rentan akan terinfeksi CVEV jika ada kontak dengan serangga kutu daun yang terinfeksi CVEV. d. Serangga kutu daun yang terinfeksi CVEV akan menularkan virus tersebut selama hidupnya. e. Tingkat infeksi tanaman jeruk nipis bersifat insidental (terjadi sewaktu-waktu). f. Tanaman jeruk nipis yang telah terinfeksi CVEV dapat sembuh.

Berdasarkan variabel, parameter, dan asumsi dapat dibentuk sebuah diagram model matematika penyebaran CVEV sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram model matematika penyebaran CVEV (*Citrus vein enation virus*) pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun

Berdasarkan Gambar 1 dapat dilihat bahwa untuk model matematika penyebaran CVEV digunakan model  $SIR - S_x I_x$ , dimana terdapat dua populasi diantaranya populasi tanaman jeruk nipis ( $N_t$ ) dan populasi vektor serangga kutu daun ( $N_s$ ) dimana kedua populasi tersebut merupakan variabel yang digunakan untuk menggambarkan model matematika penyebaran CVEV. Populasi tanaman jeruk nipis dibagi menjadi tiga subpopulasi diantaranya tanaman rentan ( $S$ ), tanaman terinfeksi ( $I$ ), dan tanaman pulih ( $R$ ). Sementara subpopulasi serangga ada dua diantaranya serangga yang rentan  $S_x$  dan serangga yang terinfeksi  $I_x$ . Berikut persamaan model matematika penyebaran CVEV:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Pi - \mu S - \beta I_x S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta I_x S - \mu I - vI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \\ \frac{dS_x}{dt} &= \Pi_1 - \beta_1 I S_x - \mu_1 S_x \\ \frac{dI_x}{dt} &= \beta_1 I S_x - \mu_1 I_x \end{aligned} \quad (1)$$

Dimana  $N_t = S + I + R$  dan  $N_s = S_x + I_x$ .

### 3.2 Analisis Model Matematika

Pada analisis model matematika penyebaran CVEV akan dilakukan pencarian terhadap titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, serta simulasi.

#### 3.2.1 Titik Ekuilibrium dari Model Matematika Penyebaran CVEV

Titik ekuilibrium dari model diperoleh pada saat  $\frac{dS}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI}{dt} = 0$ ,  $\frac{dR}{dt} = 0$ ,  $\frac{dS_x}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI_x}{dt} = 0$ .

Maka diperoleh persamaan (1) menjadi sebagai berikut:

$$\Pi - \mu S - \beta I_x S = 0 \quad (2)$$

$$\beta I_x S - \mu I - vI - \gamma I = 0 \quad (3)$$

$$\gamma I - \mu R = 0 \quad (4)$$

$$\Pi_1 - \beta_1 I S_x - \mu_1 S_x = 0 \quad (5)$$

$$\beta_1 I S_x - \mu_1 I_x = 0 \quad (6)$$

Sistem persamaan diferensial memiliki 2 titik ekuilibrium diantaranya titik ekuilibrium bebas ( $E_0$ ) dan titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ). Dari persamaan diatas akan dicari titik ekuilibrium  $E_0$  dan  $E_1$  dari model matematika penyebaran CVEV.

### 3.2.1.1 Titik ekuilibrium $E_0$ dari model matematika penyebaran CVEV

Dengan melakukan substitusi nilai parameter dari model diperoleh titik ekuilibrium  $E_0$  sebagai berikut:

$$E_0 = \left( \frac{\Pi}{\mu}, 0, 0, \frac{\Pi_1}{\mu_1}, 0 \right)$$

Menentukan titik ekuilibrium  $E_0$  diasumsikan  $I = 0$  dan  $I_x = 0$ . kemudian disubsitusikan ke persamaan (2), (3), (4), (5), dan (6) untuk memperoleh nilai  $S, I, R, S_x$ , dan  $I_x$  sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakitnya seperti diatas.

### 3.2.1.2 Titik ekuilibrium $E_1$ dari model matematika penyebaran CVEV

Dengan melakukan substitusi nilai parameter dari model diperoleh titik ekuilibrium  $E_1 = (S^*, I^*, R^*, S_x^*, I_x^*)$  dari model matematika penyebaran CVEV sebagai berikut:

$$S^* = \frac{\mu_1(\beta_1\Pi + \gamma\mu_1 + \mu\mu_1 + \mu_1v)}{\beta_1(\beta\Pi_1 + \mu\mu_1)}$$

$$I^* = \frac{\beta\beta_1\Pi\Pi_1 - \gamma\mu\mu_1^2 - \mu^2\mu_1^2 - \mu\mu_1^2v}{\beta_1(\beta\gamma\Pi_1 + \beta\mu\Pi_1 + \beta\Pi_1v + \gamma\mu\mu_1 + \mu^2\mu_1 + \mu\mu_1v)}$$

$$R^* = \frac{\gamma(\beta\beta_1\Pi\Pi_1 - \gamma\mu\mu_1^2 - \mu^2\mu_1^2 - \mu\mu_1^2v)}{\beta_1(\beta\gamma\Pi_1 + \beta\mu\Pi_1 + \beta\Pi_1v + \gamma\mu\mu_1 + \mu^2\mu_1 + \mu\mu_1v)\mu}$$

$$S_x^* = \frac{\beta\gamma\Pi_1 + \beta\mu\Pi_1 + \beta\Pi_1v + \gamma\mu\mu_1 + \mu^2\mu_1 + \mu\mu_1v}{\beta(\beta_1\Pi + \gamma\mu_1 + \mu\mu_1 + \mu_1v)}$$

$$I_x^* = \frac{\beta_1\beta\Pi\Pi_1 - \gamma\mu\mu_1^2 - \mu^2\mu_1^2 - \mu\mu_1^2v}{\beta(\beta_1\Pi + \gamma\mu_1 + \mu\mu_1 + v\mu_1)\mu_1}$$

Untuk mengetahui titik ekuilibrium endemik diasumsikan  $(I, I_x) \neq 0$  sehingga untuk memperoleh  $E_1$  dilakukan eliminasi persamaan (2) dan (3) sehingga didapatkan  $S^*$ , kemudian subsitusikan  $S^*$  ke persamaan (3) untuk mendapatkan  $I^*$ , setelah  $I^*$  didapatkan, subsitusikan  $I^*$  ke persamaan (4) untuk mendapatkan  $R^*$ , setelah itu subsitusikan  $I^*$  ke persamaan (5) untuk mendapatkan  $S_x^*$ , kemudian subsitusikan  $I^*$  dan  $S_x^*$  ke persamaan (6) untuk mendapatkan  $I_x^*$ , setelah didapatkan  $I_x^*$ , kemudian subsitusikan lagi  $I_x^*$  ke  $S_x^*, R^*, I^*$ , dan  $S^*$  agar variabelnya hilang sehingga didapatkan hasil akhir dari titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ) seperti persamaan diatas.

### 3.2.2 Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Ukuran yang menjadi ambang batas untuk menetapkan apakah suatu populasi endemik atau tidak dapat menggunakan bilangan reproduksi dasar. Digunakan *next generation matrix* untuk mencari nilai  $R_0$  dimana matriks  $F$  matriks transisi dan  $V$  matriks transmisi.

Untuk menentukan *Next Generation Matrix* dituliskan matrik Jacobi dari  $I, I_x$ .

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - v - \gamma & \beta S \\ \beta_1 S_x & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

dimana, dengan mensubsitusikan nilai eigen  $E_0$  diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - v - \gamma & \frac{\beta\Pi}{\mu} \\ \frac{\beta_1\Pi_1}{\mu_1} & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

dalam hal ini didapatkan matriks  $F$  dan  $V$  yaitu:



$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\Pi}{\mu} \\ \frac{\beta_1\Pi_1}{\mu_1} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} -\mu - v - \gamma & 0 \\ 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) adalah radius spektral atau nilai eigen tertinggi dari matriks ( $FV^{-1}$ ), maka didapatkan nilai reproduksi dasarnya adalah:

$$R_0 = \sqrt{\frac{\beta\beta_1\Pi\Pi_1}{\mu\mu_1^2(\mu+v+\gamma)}}$$

Sesuai dengan ketentuan bilangan reproduksi dasar jika  $R_0 < 1$ , artinya virus dapat menghilang dalam waktu tertentu. Apabila  $R_0 > 1$ , maka terjadi keadaan endemik yang artinya virus akan mengalami penyebaran dalam waktu yang lama.

### 3.2.3 Kestabilan Model Matematika Penyebaran CVEV

Analisis kestabilan bisa dilakukan dengan menetapkan nilai eigen dari matriks jacobi yang terdapat di persamaan (1) sehingga didapatkan matriks jacobiannya seperti berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I_x & 0 & 0 & 0 & -\beta S \\ \beta I_x & -\mu - v - \gamma & 0 & 0 & \beta S \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 S_x & 0 & -\beta_1 I - \mu_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 S_x & 0 & \beta_1 I & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Karena titik ekuilibrium yang didapatkan ada 2, maka dilakukan analisis kestabilan terhadap kedua titik ekuilibrium tersebut.

#### 3.2.3.1 Analisis kestabilan bebas penyakit ( $E_0$ )

Titik ekuilibrium akan dikatakan stabil apabila nilai eigen dari matriks Jacobi bernilai negatif. Matriks Jacobi dari titik ekuilibrium  $E_0$  adalah sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta\Pi}{\mu} \\ 0 & -\mu - v - \gamma & 0 & 0 & \frac{\beta\Pi}{\mu} \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1\Pi_1}{\mu_1} & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\Pi_1}{\mu_1} & 0 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai eigen maka berlaku  $|\lambda I - J(E_0)| = 0$  sehingga,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta\Pi}{\mu} \\ 0 & -\mu - v - \gamma & 0 & 0 & \frac{\beta\Pi}{\mu} \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1\Pi_1}{\mu_1} & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\Pi_1}{\mu_1} & 0 & 0 & -\mu_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta \Pi}{\mu} \\ 0 & \lambda + \mu + v + \gamma & 0 & 0 & -\frac{\beta \Pi}{\mu} \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1 \Pi_1}{\mu_1} & 0 & \lambda + \mu_1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_1 \Pi_1}{\mu_1} & 0 & 0 & \lambda + \mu_1 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan metode sarrus maka didapat persamaan karakteristik dari matriks tersebut sehingga dapat diketahui bahwa  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ , dan  $\lambda_5 < 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_0$  stabil asimtotik dimana virus dapat menghilang dalam waktu tertentu.

### 3.2.3.2 Analisis kestabilan endemik ( $E_1$ )

Matriks Jacobi dari titik ekuilibrium endemik  $E_1$  adalah sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I_x^* & 0 & 0 & 0 & -\beta S^* \\ \beta I_x^* & -\mu - v - \gamma & 0 & 0 & \beta S^* \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 S_x^* & 0 & -\beta_1 I^* - \mu_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 S_x^* & 0 & \beta_1 I^* & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai eigen maka berlaku  $|\lambda I - J(E_1)| = 0$  sehingga,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\mu - \beta I_x^* & 0 & 0 & 0 & -\beta S^* \\ \beta I_x^* & -\mu - v - \gamma & 0 & 0 & \beta S^* \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 S_x^* & 0 & -\beta_1 I^* - \mu_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 S_x^* & 0 & \beta_1 I^* & -\mu_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda + \mu + \beta I_x^* & 0 & 0 & 0 & \beta S^* \\ -\beta I_x^* & \lambda + \mu + v + \gamma & 0 & 0 & -\beta S^* \\ 0 & -\gamma & \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 S_x^* & 0 & \lambda + \beta_1 I^* + \mu_1 & 0 \\ 0 & -\beta_1 S_x^* & 0 & -\beta_1 I^* & \lambda + \mu_1 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan metode sarrus maka diperoleh persamaan karakteristik dari matriks tersebut sehingga dapat diketahui bahwa  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ ,  $\lambda_4 < 0$ , dan  $\lambda_5 < 0$ , maka titik ekuilibrium  $E_1$  stabil asimtotik dimana virus akan mengalami penyebaran dalam waktu yang lama.

### 3.2.4 Simulasi Model Matematika Penyebaran CVEV

Simulasi dilakukan untuk menggambarkan lebih jelas penyebaran CVEV (*Citrus vein enation virus*) pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun. Simulasi dilakukan dengan membentuk trayektori dari kondisi awal yang dimisalkan.

#### 3.2.4.1 Simulasi model matematika untuk titik ekuilibrium bebas penyakit

Simulasi titik ekuilibrium  $E_0$  pada penyebaran CVEV (*Citrus vein enation virus*) pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun. diasumsikan untuk keadaan tidak ada individu yang terinfeksi CVEV sehingga nilai parameter yang digunakan yaitu:

Tabel 1. Nilai parameter titik ekuilibrium  $E_0$  penyebaran CVEV

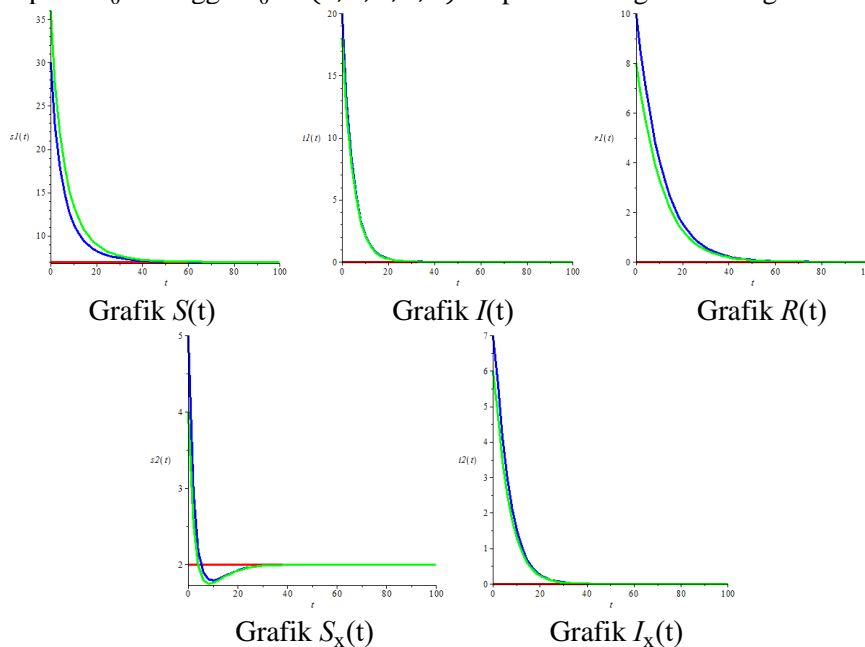


Parameter	Nilai
$\Pi$	0,7
$\Pi_1$	0,4
$\beta$	0,01
$\beta_1$	0,01
$\mu$	0,1
$\mu_1$	0,2
$\nu$	0,2
$\gamma$	0,01

Dari nilai parameter pada Tabel 3 akan dihitung  $R_0$  sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar yaitu:

$$R_0 = 0.1502685768$$

Didapatkan  $R_0 < 1$  yang artinya virus tidak menyebar, kemudian nilai parameter pada Tabel 3 disubstitusikan pada  $E_0$  sehingga  $E_0 = (7, 0, 0, 2, 0)$ . Diperolehlah grafik sebagai berikut:



Gambar 2. Trayektori di Sekitar Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan Gambar 2 kurva merah merupakan kurva titik ekuilibrium bebas dari CVEV. Sedangkan kurva biru dan hijau nantinya akan menentukan stabil atau tidak stabilnya titik ekuilibrium bebas dari CVEV pada masing-masing grafik. Dapat dilihat dari grafik bahwa trayektori (kurva biru dan hijau) bergerak mendekati titik ekuilibrium  $E_0$  (kurva merah). Titik ekuilibrium  $E_0$  bersifat stabil asimtotik. Hal ini juga diperkuat dengan nilai  $R_0 < 1$ , yang berarti bahwa dalam waktu tertentu penyebaran CVEV akan menghilang.

### 3.2.4.2 Simulasi model matematika untuk titik ekuilibrium endemik

Simulasi titik ekuilibrium  $E_1$  pada penyebaran CVEV (*Citrus vein enation virus*) pada tanaman jeruk nipis melalui serangga kutu daun. Nilai parameter yang digunakan yaitu:

Tabel 2. Nilai parameter titik ekuilibrium endemik penyebaran CVEV

Parameter	Nilai
$\Pi$	0,7
$\Pi_1$	0,4
$\beta$	0,1
$\beta_1$	0,1
$\mu$	0,1



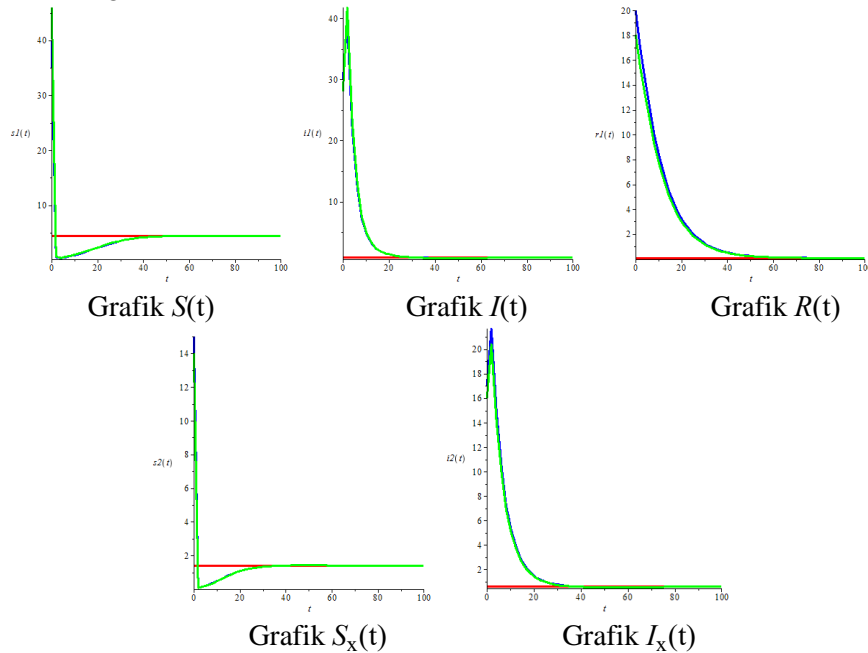
$\mu_1$	0,2
$\nu$	0,2
$\gamma$	0,01

Dari nilai parameter pada Tabel 4 akan dihitung  $R_0$  sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar yaitu:

$$R_0 = 1.502685768$$

Didapatkan  $R_0 > 1$ , kemudian nilai parameter pada Tabel 2 disubsitusikan pada  $E_1$  sehingga  $E_1 = (4.400000000, 0.8387096774, 0.08387096774, 1.409090909, 0.5909090910)$ .

Diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 3. Trayektori di Sekitar Titik Ekuilibrium Endemik

Berdasarkan Gambar 3 kurva merah merupakan kurva titik ekuilibrium endemik dari CVEV. Sedangkan kurva biru dan hijau nantinya akan menentukan stabil atau tidak stabilnya titik ekuilibrium endemik dari CVEV pada masing-masing grafik. Dapat dilihat dari grafik bahwa trayektori (kurva biru dan hijau) bergerak mendekati titik ekuilibrium endemik (kurva merah) yang berarti bahwa akan terjadi penyebaran CVEV dalam waktu yang lama. Hal ini juga diperkuat dengan nilai  $R_0 > 1$ .

#### 4.2 Interpretasi Model Matematika

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan diperoleh 2 titik ekuilibrium diantaranya titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ). Untuk titik ekuilibrium  $E_0$  sifatnya stabil asimtotik dimana virus dapat menghilang dalam waktu tertentu. Sementara untuk titik ekuilibrium  $E_1$  sifatnya juga stabil asimtotik dimana dalam waktu yang lama virus akan mengalami penyebaran.

#### 4. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian model matematika penyebaran CVEV pada tanaman jeruk nipis diperoleh dalam bentuk sistem persamaan diferensial yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - \mu S - \beta I_x S$$



$$\frac{dI}{dt} = \beta I_x S - \mu I - \nu I - \gamma I$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma I - \mu R$$

$$\frac{dS_x}{dt} = \Pi_1 - \beta_1 I S_x - \mu_1 S_x$$

$$\frac{dI_x}{dt} = \beta_1 I S_x - \mu_1 I_x$$

Interpretasi model didapat 2 titik ekuilibrium diantaranya titik ekuilibrium  $E_0$  dan titik ekuilibrium  $E_1$ . Dari analisis kestabilan menunjukkan bahwa Untuk titik ekuilibrium  $E_0$  sifatnya stabil asimtotik karena didapatkan  $R_0 < 1$  yaitu 0.1502685768 yang artinya virus dapat menghilang dalam waktu tertentu. Sementara untuk titik ekuilibrium  $E_1$  sifatnya juga stabil asimtotik karena didapatkan  $R_0 < 1$  yaitu 1.502685768 yang artinya virus akan mengalami penyebaran dalam waktu yang lama.

## REFERENSI

- [1] Aibinu, I., Adenipekun, T., Adelowotan, T., Ogunsanya, T., & Odugbemi, T. (2007). Evaluation of the antimicrobial properties of different parts of Citrus aurantifolia (lime fruit) as used locally. *African Journal of Traditional, Complementary, and Alternative Medicines*, 4(2), 185.
- [2] Prastiwi, S. S., & Ferdiansyah, F. (2017). Kandungan dan Aktivitas Farmakologi Jeruk Nipis (Citrus aurantifolia Swing.). *Farmaka*, 15(2), 1-8.
- [3] Syamsuhidayat, S. S., & Hutapea, J. R. (1991). Inventaris tanaman obat Indonesia. *Departemen Kesehatan RI, Jakarta*, 1, 286-287.
- [4] Razak A., dkk. (2013). Uji Daya Hambat Air Perasan Buah Jeruk Nipis (*Citrus aurantifolia s.*) Terhadap Pertumbuhan Bakteri *Staphylococcus aureus* Secara *In Vitro*. Padang : Universitas Andalas, Fakultas Kedokteran.
- [5] Dwiastuti, M. E. dan Triwiratno, A. 2014. Gejala dan Pengendalian Penyakit Puru Berkayu (Online). <http://balitjestro.litbang.deptan.go.id/gejala-dan-pengendalian-penyakit-puru-berkayu.html>. Diakses pada tanggal 23 Oktober 2022.
- [6] Reuther, dkk. (1978). The Citrus Industry. University of California.
- [7] Jackson, M., & Chen-Charpentier, B. M. (2017). Modeling plant virus propagation with delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, 309:611-621.
- [8] Mawassi, M., Mietkiewska, E., Gofman, R., Yang, G., & Bar-Joseph, M. 1996. Unusual Sequence Relationships Between Two Isolates of Citrus Tristeza Virus. *Journal of General Virology*, 2359-2364.
- [9] Rukmana, R. 2003. Jeruk Manis. Yogyakarta: Kanisius, 33.
- [10] Saragih, E. B. (1994). Identifikasi dan Biologi Kutudaun [Homoptera: Aphididae] Pada Brassicaceae Liar Nasturtium heterophyllum BL, Nasturtium indicum (L.) DC dan Cardamine hirsuta L.
- [11] Eastop, V. F. (1977). Worldwide importance of aphids as virus vectors. In *Aphids as virus vectors* (pp. 3-62). Academic Press.
- [12] Brault, V., Uzest, M., Monsion, B., Jacquot, E., & Blanc, S. (2010). Aphids as transport devices for plant viruses. *Comptes rendus biologies*, 333(6-7), 524-538.
- [13] Pabbage, M. S., Adnan, A. M., & Nonci, N. (2007). Pengelolaan hama prapanen jagung. *Jagung: Teknik produksi dan pengembangan. Pusat Penelitian dan Pengembangan Tanaman Pangan. hlm*, 274-304.
- [14] Shannag, H. K., Al-QudAH, J. M., MAKHADMeH, I. M., & Freihat, N. M. (2007). Differences in growth and yield responses to Aphis gossypii Glover between different okra varieties. *PLANT PROTECTION SCIENCE-PRAGUE*, 43(3), 109-116.
- [15] Miles, P. W. (1987). Feeding process of Aphidoidea in relation to effects on their food plants. *Aphids: their biology, natural enemies, and control/edited by AK Minks and P. Harrewijn*.