

## Model Matematika Tipe SIQR Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Vaksinasi

Kevin Pramana Putra<sup>1</sup>, Media Rosha<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Prodi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

### Article Info

#### Article history:

Received November 15, 2022  
Revised November 28, 2022  
Accepted December 15, 2022

#### Keywords:

Diphtheria  
Mathematical model  
SIQR model  
Equilibrium point  
Vaccination

#### Kata Kunci:

Difteri  
Model matematika  
Model SIQR  
Titik ekuilibrium  
Vaksinasi

### ABSTRACT

The Bacteria *Corynebacterium diphtheria* is the cause of the possibly deadly infectious disease diphtheria. The esophagus and upper respiratory tract are attacked by these bacteria. This study's objectives were to develop a mathematical model of diphtheria spreading of the SIQR tyoe with the influence of vaccination, analyze equilibrium point stability and interpret model simulation results. The type of research is theoretical research. This study uses descriptive methods to analyze theories about diphtheria. Two equilibrium points are obtained based on the analysis results of the SIQR model. When the basic reproduction number is less than 1, there exists an asymptotically stable disease-free equilibrium point. On the other hand, if the basic reproduction number is greater than 1, there are two equilibrium points. Asymptotically stable endemic balance and unstable disease-free balance. One way to control the spread of diphtheria is through vaccination. The higher the vaccination coverage, the more diseases will be eradicated from the population.

### ABSTRAK

Difteri merupakan suatu penyakit berbahaya yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphtheriae*. Bagian tubuh manusia yang diserang oleh bakteri ini adalah kerongkongan dan saluran pernapasan atas. Tujuan penelitian ini adalah membangun model matematis tipe SIQR penyebaran difteri dengan vaksinasi, menganalisis stabilitas titik kesetimbangan, dan menginterpretasikan hasil simulasi model. Jenis penelitian ini adalah penelitian dasar atau penelitian teoritis. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif yaitu dengan menganalisis teori-teori berkaitan dengan difteri. Berdasarkan hasil analisis model SIQR diperoleh dua titik ekuilibrium. Jika nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, terdapat titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit yang stabil asimtotik. Sebaliknya, apabila bilangan reproduksi dasar lebih besar dari satu, terdapat dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik dan titik ekuilibrium bebas penyakit yang tidak stabil. Salah satu cara untuk membatasi penyebaran difteri adalah vaksinasi. Semakin tinggi tingkat vaksinasi, semakin hilang penyakit dari populasi.

This is an open access article under the [CC BY-SA](#) license.



Kevin Pramana Putra

(Kevin Pramana Putra)

Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, 25171  
Email: [kevinpramana255@gmail.com](mailto:kevinpramana255@gmail.com)

Padang, Sumatera Barat

## 1. PENDAHULUAN

Penyakit menular disebut juga penyakit infeksi merupakan penyakit yang dapat berpindah atau menyebar dari orang sakit ke orang sehat yang belum terpapar penyakit. Mikroorganisme patogen biasanya menjadi penyebab utama munculnya penyakit menular. Bakteri merupakan mikroorganisme bersel satu/tunggal [1]. Salah satu bakteri penyebab penyakit adalah *Corynebacterium diphtheriae* yang menginfeksi organ pernafasan, terutama tonsil, nasofaring (bagian antara tenggorokan/faring dan hidung) dan laring [2]. Infeksi yang disebabkan oleh bakteri ini disebut difteri, penyakit akut yang sangat menular. Difteri dapat menyebabkan kematian terutama terhadap anak-anak. Manusia menjadi satu-satunya media pertumbuhan *Corynebacterium diphtheriae*. Difteri dapat menyebar melalui kontak dengan partikel udara, barang-barang pribadi, barang-barang rumah tangga yang terkontaminasi, dan luka yang terinfeksi bakteri difteri. Selain itu, difteri juga dapat menular melalui air liur manusia [3].

Pada tahun 1921 di Amerika Serikat terdapat 206.000 kasus difteri yang mengakibatkan 15.520 kematian. Pada tahun 2014, terdapat 7.347 kasus, sebanyak 7217 kasus diantaranya terjadi di kawasan Asia Tenggara. Di Indonesia pada tahun 2013 terjadi sebanyak 775 kasus namun mengalami penurunan pada tahun 2014 menjadi 430 kasus. Pada tahun 2015 kasus difteri terjadi sebanyak 529 kasus dan meningkat pada tahun 2016 sebanyak 591 kasus. Tahun 2017, Indonesia kembali diguncang wabah difteri. Berdasarkan data yang tercatat di Kementerian Kesehatan menunjukkan hingga November 2017 terdapat sekitar 622 kasus di 95 kabupaten dan kota. Kemenkes mengindikasikan kondisi ini sebagai kejadian luar biasa (KLB) [4].

Langkah yang paling ampuh untuk mencegah penyebaran difteri adalah melakukan program vaksinasi. Vaksinasi adalah pemberian vaksin yang berfungsi untuk menguatkan daya tahan dan sistem imun tubuh seseorang terhadap penyakit sehingga suatu saat jika terpapar penyakit orang itu akan kebal atau hanya merasakan gejala ringan dan tidak bisa menularkan penyakit kepada orang lain. Pemberian vaksin dilakukan sebelum seseorang terinfeksi penyakit untuk memberikan perlindungan di masa yang akan datang. Sepanjang sejarah, difteri adalah salah satu penyakit menular yang paling ditakuti epidemi secara global, mengingat tingkat kematian yang tinggi, terutama pada kalangan anak-anak [5].

Pemodelan matematika adalah salah satu upaya dalam merepresentasikan masalah kehidupan nyata kedalam persamaan matematika, sehingga permasalahan yang terjadi lebih mudah ditemukan solusinya. Representasi yang dihasilkan disebut dengan Model Matematika [6]. Model matematika sering diterapkan dalam membentuk model penyebaran penyakit salah satunya penyakit difteri. Dengan memodelkan masalah yang ada, tujuannya adalah untuk memberikan solusi yang dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan matematika.

Beberapa penelitian yang membahas penyebaran penyakit difteri adalah sebagai berikut, penelitian yang dilakukan oleh Sato [7] membentuk model matematika SEIRS penyebaran difteri oleh bakteri *Corynebacterium diphtheria*. Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh Aryani [8] mengembangkan model SVIR penyebaran difteri dengan pengaruh vaksinasi. Kemudian penelitian Suryani dan Yuenita [9] melakukan analisis kestabilan pada model MSEIR difteri dengan tingkat kejadian jenuh. Penelitian Amalia [10] tentang kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit difteri.

Pada penelitian ini akan dikaji penyebaran penyakit difteri menggunakan model SIQR (*Susceptible, Infected, Quarantine, dan Recovered*) dengan pengaruh vaksinasi. Model SIQR merupakan modifikasi dari model SIR dengan menambahkan kompartimen Q (*Quarantined*). Penambahan ini perlu dilakukan karena dalam mengatasi penyebaran penyakit difteri dilakukan upaya pencegahan seperti karantina dan vaksinasi.

## 2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif. Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Membentuk model matematika tipe SIQR penyebaran difteri dengan vaksinasi.
  - a. Mengasumsikan variabel dan parameter yang terkait dengan model SIQR yang bisa membantu dalam membentuk dan menganalisis model penyebaran penyakit difteri.

- b. Membangun model SIQR penyebaran difteri dengan vaksinasi .
2. Menganalisis model matematika SIQR penyebaran difteri dengan vaksinasi.
  - a. Menentukan titik ekuilibrium model SIQR.
  - b. Menentukan jenis kestabilan titik ekuilibrium model SIQR.
  - c. Menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ).
3. Melakukan interpretasi hasil analisis kestabilan model matematika penyebaran difteri dengan vaksinasi dengan perangkat lunak serta menarik kesimpulan.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1. Model Matematika Tipe SIQR Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Vaksinasi

Model matematika yang akan digunakan adalah model epidemi SIR (*Susceptible, Exposed, Recovered*) dengan pengembangan berupa penambahan kelompok karantina dan parameter vaksinasi. Variabel-variabel yang digunakan adalah:

$S(t)$  : Jumlah individu *Susceptible* dalam waktu  $t$

$I(t)$  : Jumlah individu *Infected* dalam waktu  $t$

$Q(t)$  : Jumlah individu *Quarantined* dalam waktu  $t$

$R(t)$  : Jumlah individu *Recovered* dalam waktu  $t$

Parameter-parameter yang digunakan adalah:

$\mu$  : Laju kelahiran dan laju kematian alami

$p$  : Proporsi individu yang diberikan vaksin

$\beta$  : Laju penularan penyakit dari individu *Infected* ke individu *Susceptible*

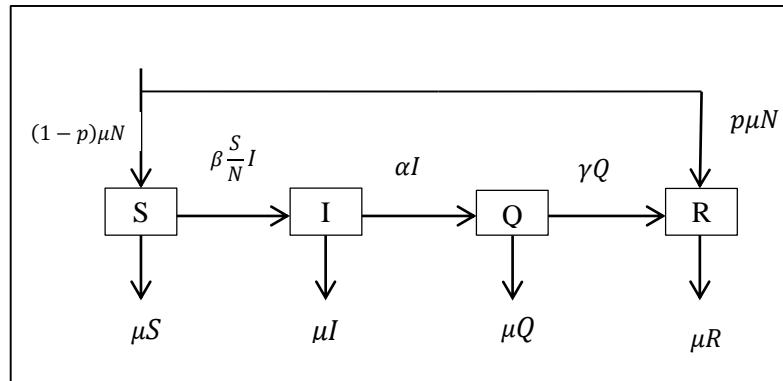
$\alpha$  : Laju individu yang dikarantina

$\gamma$  : Laju individu yang sudah sembuh

Langkah selanjutnya adalah membentuk asumsi yang akan dipergunakan dalam membangun model matematika tipe SIQR. Berdasarkan permasalahan tersebut, asumsi yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Hanya ada satu penyakit yang menyebar di populasi.
2. Setiap bayi baru lahir dianggap sehat tetapi belum kebal terhadap penyakit.
3. Diasumsikan populasi tertutup yang berarti tidak terjadi proses migrasi dan imigrasi.
4. Tingkat kelahiran dan kematian alami diasumsikan sama.
5. Setiap bayi baru lahir dianggap sehat tetapi belum kebal terhadap penyakit.
6. Difteri ditularkan melalui kontak langsung antara orang sehat dengan orang yang terinfeksi.
7. Individu yang terpapar difteri dapat sembuh dan dapat meninggal karena penyakit.
8. Setiap orang yang pulih dari infeksi difteri telah menyelesaikan proses karantina.
9. Vaksin hanya diberikan kepada bayi yang baru lahir.
10. Efektivitas vaksin adalah 100%.
11. Kekebalan vaksin bersifat permanen.

Berdasarkan asumsi yang diberikan, proses penularan difteri dapat digambarkan dalam diagram kompartemen berikut:



**Gambar 1. Diagram Transfer Kompartemen Penyebaran Penyakit Difteri**

Berdasarkan Gambar 1 dapat dimodelkan ke bentuk sistem persamaan matematika. Model yang terbentuk adalah berupa sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= (1-p)\mu N - \beta \frac{S}{N} I - \mu S \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{S}{N} I - \alpha I - \mu I \\
 \frac{dQ}{dt} &= \alpha I - \mu Q - \gamma Q \\
 \frac{dR}{dt} &= p\mu N + \gamma Q - \mu R
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

### 3.2. Analisis Model Matematika Tipe SIQR Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Vaksinasi

#### 3.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ )

Kondisi saat tidak ada penyakit yang menyebar dalam populasi disebut titik ekuilibrium bebas penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit ada dengan syarat  $S > 0, I = 0, Q = 0,$  dan  $R > 0$ . Dengan analisis sistem persamaan (1) diperoleh:

$$E_0 = ((1-p)N, 0, 0, pN).$$

#### 3.2.2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit ( $E_1$ )

Titik ekuilibrium endemik merupakan kondisi saat selalu terdapat penyakit yang tersebar dalam populasi. Syarat agar titik ekuilibrium endemik adalah  $S^* > 0, I^* > 0, Q^* > 0,$  dan  $R^* > 0$ . Dari analisis sistem (1) diperoleh titik ekuilibrium endemik penyakit difteri yaitu:

$$E_1 = (S^*, I^*, Q^*, R^*).$$

dengan

$$S^* = \frac{(N\alpha + N\mu)}{\beta}$$

$$I^* = \frac{(\beta\mu N - p\beta\mu N) - (\alpha\mu N + \mu^2 N)}{(\alpha\beta + \mu\beta)}$$

$$Q^* = \frac{\alpha\beta(1-p)\mu N - \alpha\mu N(\alpha + \mu)}{\beta(\mu^2 + \alpha\mu + \alpha\gamma + \mu\gamma)}$$

$$R^* = pN + \gamma \left( \frac{\alpha[\beta(1-p)N - N(\alpha + \mu)]}{\beta(\mu^2 + \alpha\mu + \alpha\gamma + \mu\gamma)} \right)$$

#### 3.2.3. Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) adalah indikator yang dipakai dalam menentukan tingkat penularan suatu penyakit. Nilai  $R_0$  dapat diperoleh dengan menggunakan metode matriks *next generation*. Matriks pada metode ini adalah sub-sub populasi pada kelas yang terinfeksi dan dikarantina. Sehingga diperoleh  $R_0$  adalah:

$$R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\alpha + \mu}.$$

### 3.2.4. Kestabilan Model Matematika Tipe SIQR Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Vaksinasi

Dari sistem persamaan (1) diperoleh matriks Jacobian yang dilambangkan dengan  $J_f(S, I, Q, R)$  sebagai berikut:

$$J_f(S, I, Q, R) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \mu & -\frac{\beta S}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{\beta S}{N} - \alpha - \mu & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.5. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $E_0$ )

Titik ekuilibrium bebas penyakit ( $E_0$ ) akan bersifat stabil asimtotik apabila nilai eigen dari matriks jacobian bernilai negatif. Matriks Jacobian dari  $E_0$  adalah:

$$J_f(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta S}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta S}{N} - \alpha - \mu & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks  $J_f(E_0)$  di atas diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \gamma)$$

$$\lambda_4 = \frac{\beta(1-p)}{N} - (\alpha + \mu). \text{ Agar } \lambda_4 < 0 \text{ maka haruslah } \frac{\beta(1-p)}{N} - (\alpha + \mu) < 0$$

Dengan demikian jenis kestabilan  $E_0$  bersifat stabil asimtotik dengan syarat  $\frac{\beta(1-p)}{N(\alpha+\mu)} < 1$ . Karena

$R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\alpha+\mu}$  maka ketika  $R_0 < 1$  penyakit difteri akan menghilang dari populasi

### 3.2.6. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik ( $E_1$ )

Titik ekuilibrium endemik ( $E_1$ ) bersifat stabil asimtotik apabila nilai eigen dari matriks Jacobian bernilai negatif. Matriks Jacobian dari  $E_1$  adalah:

$$J_f(S^*, I^*, Q^*, R^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I^*}{N} - \mu & -\frac{\beta S^*}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\beta I^*}{N} & \frac{\beta S^*}{N} - \alpha - \mu & -\mu - \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks  $J_f(E_1)$  adalah:

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \gamma + \mu) \left[ \lambda^2 + \frac{(\beta\mu - \beta\mu p)}{(\alpha + \mu)} \lambda + ((\beta\mu - \beta\mu p) - (\mu\alpha + \mu^2)) \right] = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -(\gamma + \mu)$$

Kemudian akan dianalisis untuk  $\lambda_3$  dan  $\lambda_4$  dari persamaan berikut:

$$\lambda^2 + \frac{(\beta\mu - \beta\mu p)}{(\alpha + \mu)}\lambda + ((\beta\mu - \beta\mu p) - (\mu\alpha + \mu^2))$$

Dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk  $n = 2$  berikut:

$$\begin{array}{l|ll} \lambda^2 & 1 & ((\beta\mu - \beta\mu p) - (\mu\alpha + \mu^2)) \\ \lambda & \frac{(\beta\mu - \beta\mu p)}{(\alpha + \mu)} & 0 \\ \lambda^0 & ((\beta\mu - \beta\mu p) - (\mu\alpha + \mu^2)) & 0 \end{array}$$

Karena  $\frac{(\beta\mu - \beta\mu p)}{(\alpha + \mu)} > 0$  dan  $((\beta\mu - \beta\mu p) - (\mu\alpha + \mu^2)) > 0$  maka kestabilan dari titik ekuilibrium endemik bertipe stabil asimtotik dengan syarat  $R_0 > 1$ . Artinya dalam beberapa waktu penyakit difteri akan mewabah.

### 3.3 Simulasi Model Matematika Tipe SIQR Penyebaran Difteri dengan Pengaruh Vaksinasi

Simulasi model dilakukan dengan perangkat lunak menggunakan nilai-nilai parameter dari beberapa penelitian tentang penyakit difteri.

#### 3.3.1. Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit ( $R_0 < 1$ )

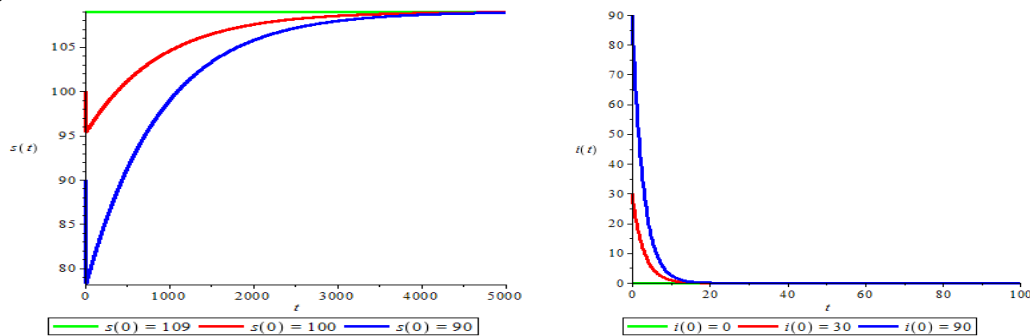
**Tabel 1. Nilai Parameter  $R_0 < 1$**

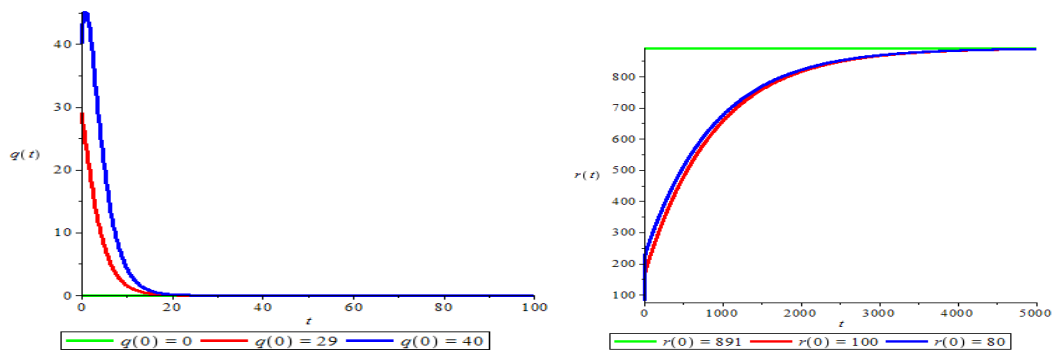
| Parameter | Nilai   |
|-----------|---------|
| $\mu$     | 0.00113 |
| $p$       | 0.891   |
| $\beta$   | 0.57    |
| $\alpha$  | 0.4     |
| $\gamma$  | 0.5     |

Menggunakan nilai parameter pada Tabel 1 terlebih dahulu dihitung nilai  $R_0$  yang diperoleh:

$$R_0 = 0.1548874430.$$

Hasil simulasi di titik ekulibrium bebas penyakit dengan menggunakan *software* disajikan dalam bentuk grafik:





**Gambar 2. Grafik Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit**

Jumlah populasi kelas *Susceptible* (rentan) mengalami jumlah naik-turun hingga stabil saat  $S = 109$  dari 1000 total individu dalam populasi dan populasi yang sembuh mengalami kenaikan hingga stabil saat kondisi populasi sembuh berjumlah  $R = 891$  dari 1000 total individu dalam populasi. Sedangkan pada populasi yang terinfeksi dan dikarantina secara bertahap menurun hingga akhirnya stabil pada kondisi  $I = Q = 0$ . Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa masing-masing kompartemen bergerak mendekati titik ekuilibrium dan dinamika populasi pada kondisi  $R_0 < 1$  titik ekuilibrium bebas penyakit mencapai kondisi stabil yang berarti bahwa lambat laun penyakit difteri akan menghilang dari populasi.

**3.3.2. Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik ( $R_0 > 1$ )**

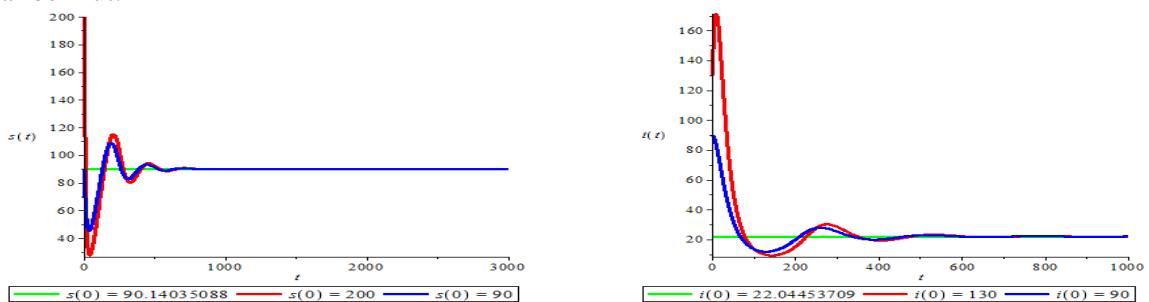
**Tabel 2. Nilai Parameter  $R_0 > 1$**

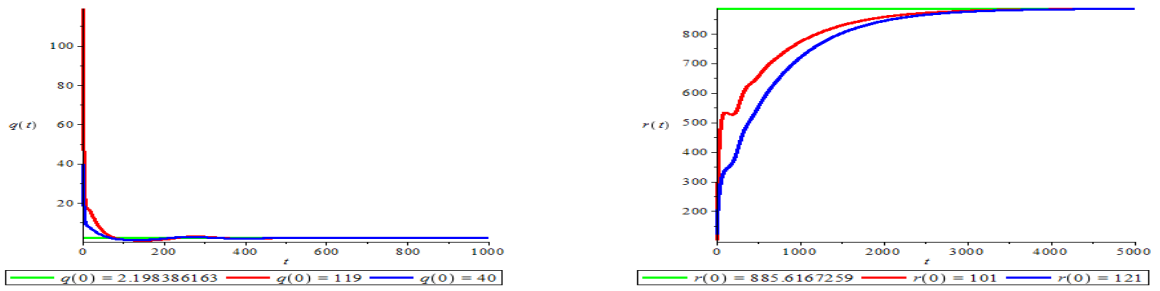
| Parameter | Nilai   |
|-----------|---------|
| $\mu$     | 0.00113 |
| $p$       | 0.0891  |
| $\beta$   | 0.57    |
| $\alpha$  | 0.05    |
| $\gamma$  | 0.5     |

Menggunakan nilai-nilai pada Tabel 2 diperoleh nilai  $R_0$ :

$$R_0 = 10.10535228.$$

Hasil simulasi di titik ekuilibrium endemik penyakit dengan menggunakan *software* disajikan dalam gambar berikut:





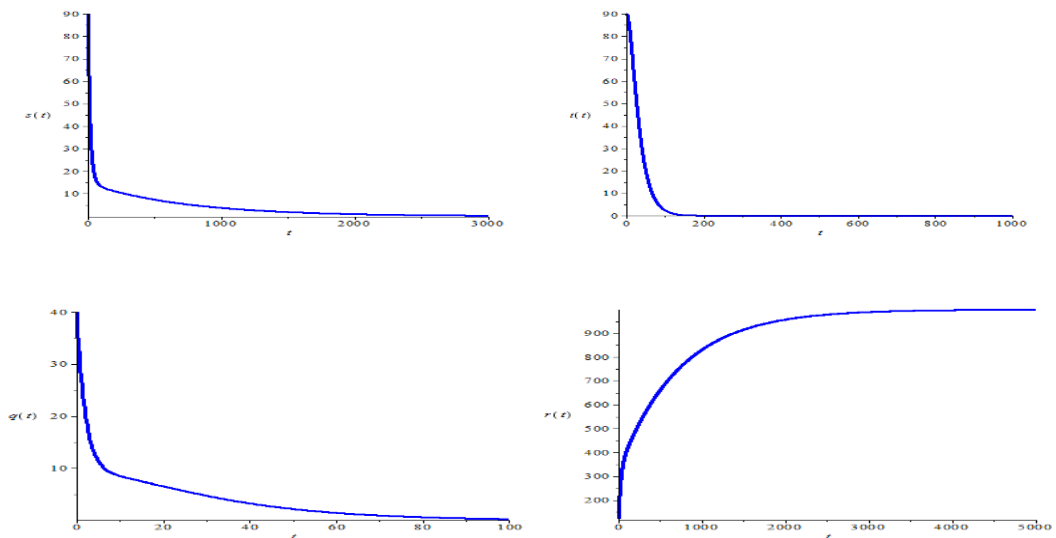
**Gambar 3. Grafik Simulasi Titik Ekulibrium Endemik Penyakit**

Pada grafik hasil simulasi terlihat bahwa masing-masing kompartemen mendekati titik ekulibrium endemik. Kelas manusia pada populasi rentan mengalami naik-turun hingga mencapai kondisi stabil saat berjumlah 90 orang dari 1000 total populasi dan populasi yang sembuh naik-turun hingga stabil saat berjumlah 885 dari 1000 total populasi. Pada populasi yang terinfeksi juga mengalami naik-turun hingga akhirnya stabil pada saat jumlahnya 22 orang dan populasi yang dikarantina secara bertahap menurun hingga akhirnya stabil pada saat jumlahnya 2 orang. Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa masing-masing kompartemen mendekati titik ekulibrium dan dinamika populasi pada kondisi  $R_0 > 1$  titik ekulibrium endemik penyakit mencapai kondisi stabil yang berarti bahwa penyakit difteri akan mewabah namun lambat laun akan dapat dikendalikan penyebarannya.

**3.3.3. Simulasi Individu yang Divaksinasi dan Tidak Divaksinasi**

Pada simulasi ini dilihat pengaruh nilai p terhadap bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ). Untuk pengaruh vaksinasi akan dianalisis untuk populasi yang divaksinasi dan yang tidak divaksinasi. Berikut simulasi pengaruh vaksinasi terhadap kelompok populasi manusia dengan nilai-nilai awal pada masing-masing kompartemen  $S(0) = 90, I(0) = 90, Q(0) = 40, R(0) = 121$ .

**3.3.3.1. Grafik Simulasi Kelas Manusia dengan Vaksinasi (p = 1)**



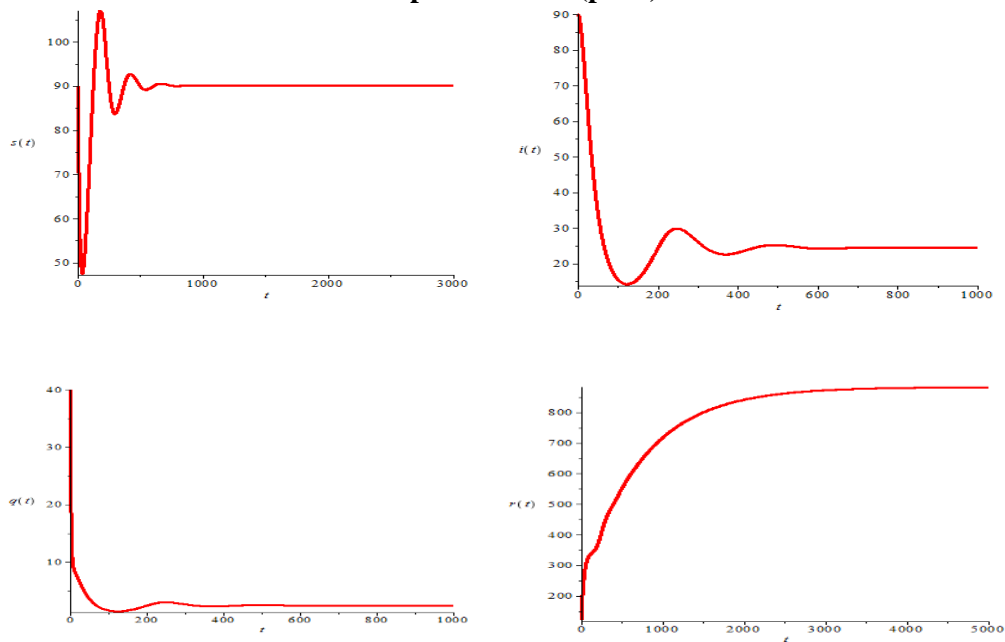
**Gambar 4. Grafik Simulasi S(t), I(t), Q(t), R(t) dengan Vaksinasi**

Berdasarkan kurva hasil simulasi untuk kelas yang divaksinasi S(t), I(t), Q(t), dan R(t), terlihat bahwa, banyak individu rentan dan individu terinfeksi menurun, sedangkan jumlah individu yang



sembuh meningkat. Artinya, semakin banyak individu yang divaksinasi, semakin sedikit difteri yang menyebar dalam populasi.

### 3.3.3.1. Grafik Simulasi Kelas Manusia tanpa Vaksinasi ( $p = 0$ )



**Gambar 5. Grafik Simulasi  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $R(t)$  tanpa Vaksinasi**

Berdasarkan grafik hasil simulasi pada kelas  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $Q(t)$ , dan  $R(t)$  tanpa vaksinasi terlihat bahwa, jumlah individu yang rentan dan individu yang terinfeksi penyakit naik-turun hingga stabil pada saat tertentu, begitupun individu yang sembuh mengalami kenaikan. Artinya apabila dalam populasi tidak diberikan vaksin maka penyakit akan tetap ada atau bahkan mewabah dalam populasi.

### 3.4. Interpretasi Model Matematika Tipe SIQR Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Vaksinasi

Berdasarkan analisis serta simulasi yang dilakukan diperoleh faktor yang mempengaruhi laju penyebaran penyakit difteri. Pengaruh faktor ini dapat dilihat dari nilai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ),

$$R_0 = \frac{\beta(1-p)}{\alpha + \mu}$$

Terlihat bahwa difteri disebarkan melalui interaksi eksklusif antar individu rentan, yang nilainya berbanding lurus dengan bilangan reproduksi dasar. Artinya, semakin tinggi tingkat infeksi, semakin banyak penyebaran difteri dalam populasi. Jika  $R_0 < 1$  maka hanya terdapat satu titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit yang stabil asimtotik. Artinya penyakit difteri akan menghilang. Sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka terdapat dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik dan titik ekuilibrium bebas penyakit yang tidak stabil. Artinya penyakit akan mewabah dalam populasi. Faktor lain yang mempengaruhi penyebaran difteri adalah proporsi individu yang divaksinasi. Semakin tinggi cakupan vaksinasi, maka jumlah orang yang terinfeksi difteri akan semakin turun, sehingga difteri dapat hilang dari populasi.

#### 4. KESIMPULAN

Dari pengolahan dan analisis model yang diterapkan, maka bentuk model matematis tipe SIQR penyebaran dan efek vaksinasi difteri adalah sistem persamaan diferensial. Hasil analisis model menghasilkan dua titik ekuilibrium. Kemudian dilakukan simulasi numerik menggunakan perangkat lunak untuk menampilkan diagram distribusi difteri dengan dan tanpa vaksinasi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa vaksinasi merupakan cara yang efektif untuk mencegah penyebaran penyakit difteri..

#### REFERENSI

- [1] Boleng, D. T. (2015). *Bakteriologi*. Malang: Universitas Muhammadiyah Malang.
- [2] Saputra, M. A. (2018). Difteri Dalam Lingkup Asuhan Keperawatan. *Jurnal Kesehatan*, 1-17.
- [3] Radian, S. A., Suryawati, C., & P, S. (2018). Evaluasi Pelaksanaan Kegiatan Outbreak Responseimmunization (Ori) Difteri Di Puskesmas Mijen Kota Semarang Tahun 2018 . *Jurnal Kesehatan Masyarakat*, 179-188.
- [4] Kementerian Kesehatan RI. (2017). *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Difteri*. Jakarta: Kemenkes RI.
- [5] WHO. (2017, Agustus). *Summary of Key Points: WHO Position Paper on Typhoid*. Dipetik Juli 25, 2022, dari [http://www.who.int/immunization/policy/position\\_papers/pp\\_Rabies\\_Presentation\\_2018.pdf?ua=1](http://www.who.int/immunization/policy/position_papers/pp_Rabies_Presentation_2018.pdf?ua=1)
- [6] Widowati, & Sutimin. (2007). *Bahan Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- [7] Sato, M., Ratianingsih, R., & Hajar. (2021). Membangun Model Matematika Penyebaran Penyakit Difteri Oleh Corynebacterium Diphtheriae Pada Populasi Manusia. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 221-229.
- [8] Aryani, I., & Widyarningsih, P. (2020). Model Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR) dan Penerapannya pada Penyakit Difteri di Indonesia. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 156-162.
- [9] Suryani, I., & Yuenita, M. (2016). Analisis Kestabilan Model MSEIR Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Saturated Incidence Rate. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika Vol. 2, No.1*, 1-11
- [10] Amalia, P., Toaha, S., & Kasbawati. (2022). Optimal Control Of Mathematical Model Of Diphtheria Spreading . *Daya Matematis : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, 138-147