Metode Bulirsch-Stoer untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Darvi Mailisa Putri[1], Muhammad Subhan[2], Meira Parma Dewi[3]

[1] *Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[2,3] *Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[1]darvimailisaputri@gmail.com

Abstract **--** Bulirsch-Stoer method is a numerical method to find solutions of first order ordinary differential equations. This method is more efficient than other numerical methods, because this method does not require the calculation of the derivative function. The results obtained by this method is more accurate with less computing. This method was developed from the combine of two methods: Modified midpoint method and Richardson extrapolation. The formula derived from a combination of the two methods are established in an algorithm, and the algorithm has been translated into a computer program.

Keywords: Bulirsch-Stoer method, Modified midpoint method, Richardson extrapolation

Abstrak **--** Metode Bulisch-Stoer adalah salah satu metode numerik untuk mencari solusi dari persamaan diferensial biasa orde satu. Metode ini lebih efisien dibandingkan dengan metode numerik lainnya, karena metode ini tidak membutuhkan perhitungan turunan fungsi. Hasil yang didapat dari metode ini juga lebih akurat dengan komputasi yang lebih sedikit. Metode ini dikembangkan dari perpaduan dua buah metode, yaitu metode modifikasi Midpoint dan Ekstrapolasi Richardson. Formula yang telah didapat dari kombinasi dua metode tadi diubah dalam sebuah algoritma, lalu algoritma yang telah didapat dipindahkan dalam sebuah program komputer.

Keywords: Metode Bulirsh-Stoer, Metode modifikasi midpoint, Ekstrapolasi Richardson

PENDAHULUAN

Pada umumnya, dalam mencari solusi persamaan diferensial biasa orde satu, terdapat dua metode untuk menyelesaikannya, yaitu metode analitik dan metode numerik [1]. Metode analitik akan menghasilkan suatu solusi eksak. Namun, tidak semua bentuk persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan metode analitik, sehingga metode numerik menjadi alternatif lain untuk digunakan. Metode numerik akan menghasilkan solusi yang mendekati solusi eksak, sehingga metode ini akan memiliki galat nantinya.

Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu adalah metode Bulirsch-Stoer. Nama metode ini berasal dari nama penemunya, yaitu Roland Bulirsch dan Josef Stoer. Metode ini dipercayai menghasilkan solusi yang tingkat keakuratannya tinggi dengan komputasi yang sedikit, sehingga metode ini lebih bagus dibandingkan dengan metode numerik lainnya [4]. Untuk itu, permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah "Bagaimana penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dengan metode Bulirsch-Stoer?".

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar (teoritis). Metode yang digunakan adalah analisis teori – teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan kepada kajian kepustakaan.

Langkah – langkah kerja yang dilakukan pada penelitian ini dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu adalah menelaah pembentukan formula metode Bulirsch-Stoer, membuat algoritma metode Bulirsch-Stoer dari formula yang telah dibentuk, membuat program komputer dari algoritma yang telah dibuat, dan menyimpulkan hasil dari penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Metode Bulirsch-Stoer

Diberikan persamaan diferensial biasa,

$$y' = f(x, y) \qquad ...(1)$$

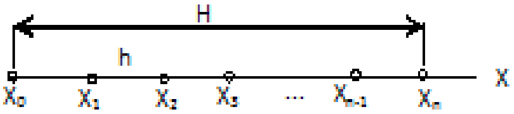
dengan kondisi awal

$$y(x_0) = y_0 \qquad ...(2)$$

pada interval $[a, b]$. Misalkan $y_n = y(x_n)$ adalah hampiran nilai y di x_n, dimana $x_n = x_0 + H$ dan H adalah panjang interval $[a, b]$. Selanjutnya, kita akan mencari solusi hampiran y_n dengan metode Bulirsch-Stoer.

Pertama, kita pilih s buah nilai n, dimana $n = 2,4,6,8,10,\ldots$. Jika $s = 2$, maka nilai n yang kita pilih adalah 2 dan 4. Jika $s = 3$, maka nilai n yang kita pilih adalah 2, 4, dan 6. Jika $s = 4$, maka nilai n yang kita pilih adalah 2, 4, 6, dan 8. Begitu seterusnya. Jadi, nilai n yang kita pilih selalu dimulai dari awal dan pemilihan s tidak boleh sama dengan satu, karena untuk mengkaji solusi hampiran y_n pada ekstrapolasi Richardson nantinya, dibutuhkan dua buah solusi hampiran y_n yang diperoleh dari kaidah modifikasi *midpoint* [2].

Selanjutnya, kita bagi interval $[a, b]$ sebanyak n, sehingga kita akan memperoleh ukuran tiap langkah sebesar $h = \frac{H}{n}$ [2]. Misalkan $s = 2$, maka nilai n yang kita pilih adalah 2 dan 4. Untuk $n = 2$, kita peroleh ukuran langkah $h = \frac{H}{2}$ dan didapat titik sepanjang sumbu-x, x_1 dan x_2. Begitu juga untuk $n = 4$, kita peroleh ukuran langkah $h = \frac{H}{4}$ dan titik sepanjang sumbu-x, x_1, x_2, x_3, dan x_4. Dengan demikian, secara umum dapat kita gambarkan sebagai berikut:



Gambar 1 Titik-titik yang dihasilkan sepanjang sumbu-x setelah interval $[a, b]$ dibagi sebanyak n

Selanjutnya, kita akan mencari solusi hampiran y pada tiap titik, yang berguna untuk mendapatkan solusi hampiran y_n. Pada interval $[x_0, x_1]$, fungsi $f(x, y)$ di integrasi dengan menggunakan formula Euler [3], sehingga diperoleh,

$$y_1 = y_0 + hf_0 \qquad \text{...(3)}$$

Lalu, untuk titik-titik berikutnya, kita terapkan konsep modifikasi *midpoint* [2].
Tinjau untuk interval $[x_0, x_2]$
Pandang fungsi

$$y' = f(x, y)$$

Integrasi kedua ruas dalam selang $[x_0, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} y'(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f[x, y(x)]\,dx$$

Dengan menggunakan konsep modifikasi *midpoint* [2] pada ruas kanan, diperoleh,

$$y(x_2) - y(x_0) = 2hf[x_1, y(x_1)]$$
$$y(x_2) = y(x_0) + 2hf[x_1, y(x_1)]$$
$$y_2 = y_0 + 2hf_1 \qquad \text{...(4)}$$

Begitu juga untuk selang$[x_1, x_3]$. Integrasi kedua ruas dalam selang $[x_1, x_3]$

$$\int_{x_1}^{x_3} y'(x)dx = \int_{x_1}^{x_3} f[x, y(x)]\,dx$$
$$y(x_3) - y(x_1) = 2hf[x_2, y(x_2)]$$
$$y(x_3) = y(x_1) + 2hf[x_2, y(x_2)]$$
$$y_3 = y_1 + 2hf_2 \qquad \text{...(5)}$$

Dengan demikian, untuk interval $[x_{n-2}, x_n]$, diperoleh

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} y'(x)dx = \int_{x_{n-2}}^{x_n} f[x, y(x)]\,dx$$
$$y(x_n) - y(x_{n-2}) = 2hf[x_{n-1}, y(x_{n-1})]$$
$$y(x_n) = y(x_{n-2}) + 2hf[x_{n-1}, y(x_{n-1})]$$
$$y_n = y_{n-2} + 2hf_{n-1} \qquad \text{...(6)}$$

Sehingga, dari uraian di atas kita peroleh komputasi sebagai berikut:

$$y_1 = y_0 + hf_0$$
$$y_2 = y_0 + 2hf_1$$
$$y_3 = y_1 + 2hf_2 \qquad \text{... (7)}$$
$$\ldots$$
$$y_n = y_{n-2} + 2hf_{n-1}$$

Solusi hampiran y_n yang dihasilkan kaidah modifikasi *midpoint* masih kurang akurat. Ini disebabkan, kaidah modifikasi *midpoint* tidak dapat menghampiri solusi hampiran y_n pada titik x_n, sehingga y_n dihampiri lagi dengan menggunakan formula Euler [2],

$$y_n \approx y_{n-1} + hf_n \qquad \text{...(8)}$$

Lalu, untuk mendapatkan solusi hampiran y_n yang lebih baik, diambil rata-rata nilai y_n, dengan menjumlahkan persamaan (7) dan persamaan (8). Dengan begitu, kita peroleh

$$y_n \approx \frac{1}{2}[(y_{n-2} + 2hf_{n-1}) + (y_{n-1} + hf_n)] \qquad \text{...(9)}$$

Setelah itu, diterapkan prinsip ekstrapolasi Richardson. Diketahui bahwa, y_n adalah solusi hampiran pada x_n dan $y(h)$ adalah solusi persamaan diferensial dengan ukuran langkah h. Berdasarkan prinsip ektrapolasi Richardson [2], kita dapat

$$y_n = y(h) + Ch^2 \qquad \text{...(10)}$$

karena $h = \frac{H}{n}$, sehingga

$$y_n = y\left(\frac{H}{n}\right) + C\left(\frac{H}{n}\right)^2 \;;\; n = 2,4,6,8,\ldots \qquad \text{...(11)}$$

Atau dapat ditulis bentuk umumnya sebagai berikut.

$$y_n = y\left(\frac{H}{2p}\right) + C\left(\frac{H}{2p}\right)^2 \;;\; p = 1,2,\ldots,s. \qquad \text{...(12)}$$

Pada prinsip ektrapolasi Richardson, untuk mendapatkan solusi hampiran y_n yang lebih akurat, dibutuhkan dua buah solusi hampiran y_n yang kita dapat dari dua buah nilai n terakhir [2]. Sehingga secara umum didapat dua buah persamaan berikut,

$$y_n = y\left(\frac{H}{2(s-1)}\right) + C\left(\frac{H}{2(s-1)}\right)^2 \qquad \text{...(13)}$$

$$y_n = y\left(\frac{H}{2s}\right) + C\left(\frac{H}{2s}\right)^2 \qquad \text{...(14)}$$

Selanjutnya, eliminasi C dari persamaan (13) dan (14), diperoleh

$$\frac{y_n - y\left(\frac{H}{2s}\right)}{\left(\frac{H}{2s}\right)^2} = \frac{y_n - y\left(\frac{H}{2(s-1)}\right)}{\left(\frac{H}{2(s-1)}\right)^2} \qquad \text{...(15)}$$

Atau dapat kita tulis sebagai berikut

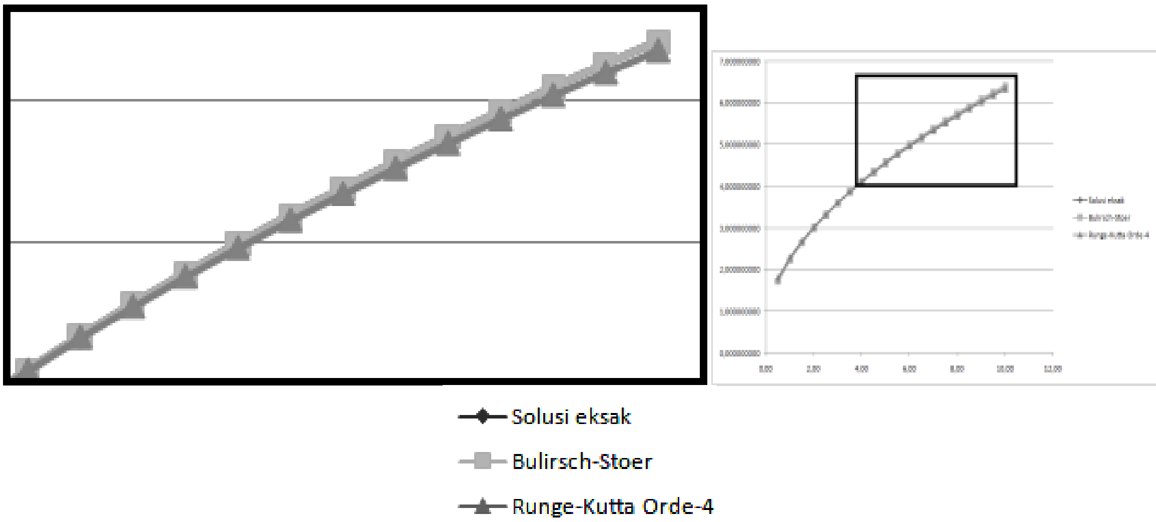
$$\left(\frac{H}{2(s-1)}\right)^2 y_n - \left(\frac{H}{2(s-1)}\right)^2 y\left(\frac{H}{2s}\right) = \left(\frac{H}{2s}\right)^2 y_n - \left(\frac{H}{2s}\right)^2 y\left(\frac{H}{2(s-1)}\right) \qquad \text{...(16)}$$

TABEL I

HASIL PERHITUNGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}; y(0) = 1, H = 0{,}5$ DENGAN METODE BULIRSCH-STOER DAN RANG KUTTA ORDE -4

x_n	y_n			Galat	
	Solusi eksak	Bulirsch-Stoer	Runge-Kutta Orde-4	Bulirsch-Stoer	Runge-Kutta Orde-4
0,50	1,732050808	1,731794132	1,811111112	0,000256676	0,079060304
1,00	2,236067977	2,235864656	2,298701171	0,000203321	0,062633194
1,50	2,645751311	2,645579022	2,692328454	0,000172289	0,046577143
2,00	3,000000000	2,999847966	3,033019157	0,000152034	0,033019157
2,50	3,316624790	3,316487244	3,338209025	0,000137546	0,021584235
3,00	3,605551275	3,605424743	3,617352736	0,000126532	0,011801461
3,50	3,872983346	3,872865547	3,876289235	0,000117799	0,003305889
4,00	4,123105626	4,122994973	4,118935364	0,000110653	0,004170262
4,50	4,358898944	4,358794273	4,348074721	0,000104671	0,010824223
5,00	4,582575695	4,582476133	4,565771990	0,000099562	0,016803705
5,50	4,795831523	4,795736390	4,773610056	0,000095133	0,022221467
6,00	5,000000000	4,999908753	4,972834827	0,000091247	0,027165173
6,50	5,196152423	5,196064620	5,164448295	0,000087803	0,031704128
7,00	5,385164807	5,385080087	5,349270849	0,000084720	0,035893958
7,50	5,567764363	5,567682420	5,527984445	0,000081943	0,039779918
8,00	5,744562647	5,744483223	5,701163382	0,000079424	0,043399265
8,50	5,916079783	5,916002663	5,869296772	0,000077120	0,046783011
9,00	6,082762530	6,082687527	6,032805313	0,000075003	0,049957217
9,50	6,244997998	6,244924943	6,192054018	0,000073055	0,05294398
10,00	6,403124237	6,403052983	6,347362056	0,000071254	0,055762181

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari tabel I, kita dapatkan plot grafik berikut



Gambar 2. Grafik solusi eksak dan solusi numerik dengan menggunakan metode Bulirsch-Stoer dan Runge-Kutta orde-4

Selanjutnya, dengan mengalikan persamaan (16) dengan $\frac{1}{\left(\frac{H}{2s}\right)^2}$ dan menyederhanakannya, sehingga persamaan (16) menjadi,

$$y_n = \frac{\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 y\left(\frac{H}{2s}\right) - y\left(\frac{H}{2(s-1)}\right)}{\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 - 1} \qquad ...(17)$$

Kemudian, untuk mengkaji titik-titik selanjutnya, solusi yang telah didapat, dianggap sebagai nilai awal dengan menggunakan formula yang sama. Begitu seterusnya untuk mendapatkan solusi pada titik-titik yang diinginkan sampai batas yang telah ditetapkan.

B. Algoritma Metode Bulirsch-Stoer

Berdasarkan formula yang telah dibentuk, maka diperoleh algoritma dari metode Bulirsch-Steor sebagai berikut:

Masukan: fungsi $f(x,y)$, nilai awal x_0, y_0, s (banyak nilai n yang dimasukkan), b (batas akhir x).

Keluaran: $y(x_n)$

Proses :

1. $a \coloneqq x_0,\ H \coloneqq b - a$
2. Untuk p dari 1 sampai s

   $n := 2p, \qquad h := \frac{H}{n}$

   $y_1 := y_0 + hf_0$
3. untuk i dari 1 sampai $n-1$

   $x_i := x_{i-1} + h$

   $y_{i+1} \coloneqq y_{i-1} + 2hf_i$

   $x_n := H$

   $z_p := \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1} + hf_n)$

   $y_H := \frac{\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 z_s - z_{s-1}}{\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 - 1}$

Algoritma yang telah kita dapat, dipindahkan ke dalam sebuah program. Program yang akan kita gunakan adalah program maple dan dapat dilihat pada referensi [5].

Selanjutnya, kita akan mencoba menyelesaikan suatu persamaan diferensial biasa orde satu, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$ dengan kondisi awal $y(0) = 1$ pada interval $[0,10]$. Pada persoalan ini, persamaan diferensial biasa orde satu, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$ dapat diselesaikan secara analitik, dengan cara metode pemisahan variabel berikut.

Pandang fungsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel, kita peroleh persamaan,

$$ydy = 2dx$$

Selanjutnya kita integralkan kedua ruas, didapat

$$\frac{1}{2}y^2 + c = 2x + c$$

Atau dapat kita tulis,

$$\frac{1}{2}y^2 = 2x + C$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 1$, kita dapatkan nilai $C = \frac{1}{2}$, sehingga diperoleh solusi eksak sebagai berikut,

$$y = \pm\sqrt{4x+1}.$$

Karena pada persolan ini dibutuhkan solusi analitik pada interval $[0,10]$, maka solusi yang kita ambil adalah $y = \sqrt{4x+1}$.

Lalu, kita juga akan menyelidiki solusi persamaan diferensial ini dengan metode Bulirsch-Stoer, untuk melihat apakah metode Bulirsch-Stoer memiliki solusi yang mendekati solusi eksak. Selain itu, metode Bulirsch-Stoer juga akan dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde-4, untuk melihat bahwa metode Bulirsch-Stoer menghasilkan solusi yang lebih baik jika dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde-4.

Hasil yang diperoleh dari kedua metode dengan menggunakan program maple, yang telah dipindahkan ke dalam tabel I.

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, kita peroleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dalam mencari solusi hampiran y_n dari persamaan diferensial biasa orde satu $y' = f(x,y)$ dengan kondisi awal $y(x_0) = y_0$, dengan metode Bulirsch-Stoer adalah: Pertama, pilih s buah nilai n, dimana $n = 2,4,6,8,10, ...$ Lalu, bagi interval $[a,b]$ sebanyak n, sehingga diperoleh ukuran tiap langkah sebesar $h = \frac{H}{n}$, dimana H adalah panjang interval $[a,b]$. Lalu, nilai y dikaji sampai n yang telah dipilih, dengan formula modifikasi *midpoint*. Selanjutnya, diterapkan prinsip ekstrapolasi Richardson dengan mengambil dua buah solusi hampiran y_n yang didapat dari dua buah nilai n terakhir, untuk mendapatkan solusi hampiran y_n yang lebih akurat.
2. Solusi yang dihasilkan metode Bulirsch-Stoer lebih akurat jika dibandingkan solusi yang dihasilkan metode Runge-Kutta, dengan komputasi yang lebih sedikit.

REFERENSI

[1] Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

[2] Kiusalaas, Jaan. 2005. *Numerical Method in Engineering with MATLAB*. USA: Cambridge University Press.

[3] Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika Bandung.

[4] Press, William H, dkk. 1992. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing Second Edition*.USA: Cambridge University Press.

[5] Darvi Mailisa Putri. 2013. *Metode Bulirsch Stoer untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensal Biasa Orde Satu*. FMIPA UNP.