Hukum Iterasi Logaritma

Sorta Purnawanti[1], Helma[2], Dodi Vionanda[3]

[1] *Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*
[2,3] *Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[1]sortapurnawanti@yahoo.com
[2]helmaunp@gmail.com
[3]Dodivionanda@gmail.co.id

Abstract — The law of the Iterated Logarithm is dealing with the convergence of random variables series which are independent and identically distributed. Accordingly, this research was aimed to determine the conditions that must be met by a series of random variables are independent and identically distributed, so that probability of sample mean equals to 1, so the statement is known as the law of the Iterated Logarithm. This research base. The method is used descriptive method with the analytic theory relevant to the issues to be discussed.Based on the results of the literature study it was found that let (X_n) be a sequence of independent random variables with expectation value equals to 0 and finite variance for all n is infinite. Set S_n is partial sums of independent random variables and $s_n^2$is partial sums of finite variance for $n = 1,2,3, \ldots$.. let (K_n) be a sequence of positive constants such that K_n to the 0 as n is infinite. if the following conditions hold:s_n^2 is infinite and the absolute value of a random variable the independent smaller than $K_n$for all n is infinite,then probability of sample mean equals to 1.

Keywords — random variables series, identically distributed, independent, convergence.

Abstrak — Hukum Iterasi Logaritma ini mengkaji tentang kekonvergenan dari deret variabel acak yang berdistribusi identik dan saling bebas. Berdasarkan hal itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan kondisi yang harus dipenuhi oleh deret variabel acak yang berdistribusi identik dan saling bebas, agar peluang rata-rata sampel sama dengan 1, sehingga pernyataan ini dikenal dengan hukum Iterasi Logaritma. Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan analisis teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas dan berlandaskan pada studi kepustakaan. Berdasarkan hasil dari studi kepustakaan didapatkan bahwa misalkan (X_n) merupakan barisan variabel acak berdistribusi identik yang saling bebas dengan rata-rata sama dengan 0 dan variansi terbatas untuk setiap n yang tak terbatas, sedangkan S_n adalah jumlah parsial variabel acak yang saling bebas, s_n^2 adalah jumlah parsial dari variansiyang terbatas untuk $n = 1,2,3, \ldots$., dan K_n adalah barisan konstan yang positif sehingga K_n menuju nol untuk n menuju tak hingga, jika s_n^2 menuju tak hingga dan nilai mutlak dari variabel acak yang saling bebas lebih kecil dari nilai $K_n$untuk setiap n yang tak terbatas maka peluang rata-rata sampelnya sama dengan 1.

Kata kunci — **b**arisan variabel acak, distribusi identik, kekonvergenan.

PENDAHULUAN

Teorema limit dalam teori peluang terbagi atas 2 bentuk yaitu teorema limit lemah dan teorema limit kuat. Teorema limit lemah berkaitan dengan kekonvergenan dalam peluang dari sebuah barisan variabel acak. Sebuah barisan dari variabel acak konvergen dalam peluang ke variabel acak X [5] jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ $P(\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \to 0$ untuk $n \to \infty$ atau ditulis $X_n \xrightarrow{p} X$, dimana barisan variabel acak X_n terdefinisi pada ruang peluang (Ω, B, P). Sedangkan teorema limit kuat berkaitan dengan kekonvergenan hampir pasti dari sebuah barisan variabel acak. Barisan dari variabel acak (X_n) dikatakan konvergen hampir pasti ke variabel acak X [5] jika dan hanya jika terdapat himpunan $E \in B$, dengan $P(E) = 0$, sedemikian sehingga untuk setiap $\omega \in E^c$, $|X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0$ untuk $n \to \infty$ atau ditulis $X_n \xrightarrow{a.s} X$.

Hukum bilangan besar adalah hukum yang berkaitan dengan kekonvergenan dari sebuah barisan variabel acak. Apabila barisan variabel acak konvergen dalam peluang, maka dikenal dengan hukum bilangan besar lemah. Hukum bilangan besar lemah menyatakan [5] bahwa misalkan (X_n) barisan variabel acak yang berdistribusi identik dan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, jika terdapat barisan konstanta real (A_n),(B_n), $B_n > 0$ dan $B_n \to \infty$, maka $\frac{(S_n - A_n)}{B_n} \xrightarrow{p} 0$ untuk $n \to \infty$. Sedangkan apabila barisan variabel acak konvergen hampir pasti, maka dikenal dengan hukum bilangan besar kuat, yaitu jika $\frac{(S_n - A_n)}{B_n} \xrightarrow{a.s} 0$ untuk $n \to \infty$. Jika $B_n = n$, maka hukum bilangan besar kuat berubah menjadi $\frac{(S_n - A_n)}{n} \xrightarrow{a.s} 0$ untuk $n \to \infty$. Sedangkan menurut hukum bilangan besar Kolmogorov hal ini dapat diubah menjadi $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s} \mu$ jika dan hanya jika $E(X) = \mu$ dan $E|X| < \infty$.

Hal di atas dapat diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan pada percobaan pelemparan satu buah dadu sebanyak n kali, jika r adalah frekuensi munculnya mata dadu
dan p adalah konstanta peluang munculnya mata dadu dari n kali percobaan, maka p adalah $\frac{r}{n}$, untuk n yang kecil maka $\frac{r}{n} \xrightarrow{p} p$, yang dikenal dengan hukum bilangan besar lemah dan untuk $n \to \infty$ maka $\frac{r}{n} \xrightarrow{a.s} p$, yang dikenal dengan hukum bilangan kuat. hukum Iterasi Logaritma berkaitan dengan tingkat pertambahan r untuk $n \to \infty$.

Hukum Iterasi Logaritma ini menyelidiki kekonvergenan dari S_n dimana $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Jika X_n diasumsikan berdistribusi identik dengan $E(X) = 0$, hukum bilangan besar kuat menyatakan bahwa $|S_n| = o(n)$ hampir pasti, yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka tingkat pertambahan S_n lebih kecil dari n. Jika $Var(X_n)$ diasumsikan terbatas dan sama dengan 1, maka teorema pusat Levy menunjukkan bahwa tingkat pertambahan S_n lebih besar dari $\sqrt{n}$. Sehingga tingkat pertambahan S_n lebih besar dari $\sqrt{n}$ dan lebih kecil dari n.

Jika $n = 2s_n^2 \ln\ln s_n^2$ [5] maka hal di atas berubah menjadi $\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}}$. Berdasarkan hukum Kolmogorov 0-1 $\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = c$ a.s, dimana c adalah konstan. Sedangkan menurut hukum Iterasi Logaritma dinyatakan bahwa $c = 1$, sehingga $\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$. Oleh karena itu kondisi apa yang harus dipenuhi agar nilai dari $\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$ dimana $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, dan $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ untuk $n \to \infty$.

Adapun konsep yang cukup penting dalam hukum Iteasi Logaritma adalah yang pertama yaitu konsep lemma Cantelli-Borel, lemma Cantelli-Borel menyatakan [5] bahwa jika (A_n) adalah sebuah barisan dari kejadian sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ maka P(A)=0 dimana $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, dan jika (A_n) adalah sebuah barisan saling bebas dari kejadian sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ maka P(A)=1 dimana $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Konsep yang kedua yaitu hukum Kolmogorov 0-1, hukum Kolmogorov 0-1 menyatakan [5] bahwa Misalkan (X_n) adalah barisan variabel acak yang saling bebas. Maka peluang kejadian ekornya adalah 0 atau 1. Selain itu, setiap fungsi ekornya adalah hampir pasti konstan, yaitu jika Y adalah variabel acak sehingga $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$, maka $Y = c$, dimana c adalah konstan. Selanjutnya adalah konsep Batas Eksponensial. Batas Eksponensial menyatakan [5] bahwa misalkan (X_n) adalah barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X) = 0$ dan $var(X) < \infty$ untuk $\to \infty$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dan $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ untuk $n = 1,2,3, \dots$ miisalkan $|X_k| \le cS_n$ a.s, dimana $c > 0$ adalah konstan, untuk setiap k, $1 \le k \le n$ dan andaikan $\epsilon > 0$

1. Jika $\varepsilon c \le 1$ maka untuk $n \ge 1$ didapatkan
   $P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon c}{2}\right)\right)$
   Jika $\epsilon c \ge 1$ maka untuk $n \ge 1$ didapatkan
   $P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon}{4c}\right)$
2. Diberikan $\gamma > 0$ maka terdapat $\varepsilon(\gamma)$ konstan (yang cukup besar) dan $\pi\gamma$ (yang cukup kecil) sedemikian sehingga untuk $\varepsilon \ge \varepsilon\gamma$ dan $\varepsilon c \le \pi\gamma$
   $P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}(1 + \gamma)\right)$

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan adalah sebagai berikut: langkah awalnya dengan cara mencari $P(S_n \ge (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}) = 0$ dan $P(S_n \ge (1-\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}) = 1$, kemudian menghubungkan akibat ke-2 dari Ketaksamaan Levy dengan syarat-syarat yang ada pada hukum Iterasi Logaritma, menggunakan dalil dari Kolmogorov, menggunakan Lemma Cantelli-Borel untuk membuktikan $P(E) = 0$ dan $P(E) = 1$, menghubungkan dalil dari Kolmogorov dengan Lemma Cantelli-Borel, dan yang terakhir adalah mendapatkan kondisi untuk

$$\lim\sup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Beberapa Hukum Iterasi Logaritma

Berikut ini adalah beberapa hukum Iterasi Logaritma yang dikutip dari beberapa sumber yang berbeda.

1. Misalkan (X_n) merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $var(X_n) < \infty$ untuk setiap $n \ge 1$, sedangkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ untuk $n = 1,2,3, \dots$, dan (K_n) adalah barisan konstan yang positif sehingga $K_n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Jika memenuhi kondisi berikut:
   (i). $s_n^2 \to \infty$
   (ii). $|X_n| \le \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \ge 1$
   maka $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1$ [5]

2. Misalkan $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, dimana adalah variabel acak berdistribusi identik yang saling bebas dengan rata-rata=0 dan variansi=1, maka $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1$
Ekivalen untuk ε yang positif
$P\left(S_n \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}\ \text{i.o}\right) = 0$
$P\left(S_n \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}\ \text{i.o}\right) = 1$ [2]

3. Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ tak terbatas dan berdistribusi identik, dengan $E(X_j) = 0$ dan $V = V(X_j) > 0$. Maka $P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2\,Vn\log\log n}} = 1\right) = 1$ [4]

Berdasarkan beberapa referensi diatas, dapat dilihat bahwa:

1. Menyatakan [5] bahwa $E(X_n) = 0$, $\text{var}(X_n) < \infty$ dan kondisi yang harus dipenuhi adalah
(i). $s_n^2 \to \infty$
(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$
2. Menyatakan [2] bahwa rata-rata=0, variansi=1 dan
$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\right) = 1$ ekivalen untuk setiap ε yang positif dengan bentuk berikut:
$P\left(S_n \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}\ \text{i.o}\right) = 0$
$P\left(S_n \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2\,n\log\log n}\ \text{i.o}\right) = 1$
Sedangkan kondisi yang harus dipenuhi tidak dinyatakannya
3. Menyatakan [4] bahwa $E(X_j) = 0$ dan $V = V(X_j) > 0$ saja, sedangkan kondisi yang harus dipenuhi juga tidak dinyatakan.

Berdasarkan hal yang demikian, teorema pada pendapat pertama lebih lengkap dan lebih rinci menjelaskan teoremanya. Sehingga teorema yang akan di buktikan adalah teorema pada pendapat pertama.

B. Teorema Hukum Iterasi Logaritma

Adapun teorema yang akan dibuktikan tersebut adalah sebagai berikut misalkan (X_n) merupakan barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $\text{var}(X_n) < \infty$ untuk setiap $n \geq 1$, sedangkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \text{var}(X_k)$ untuk $n = 1,2,3,\ldots$, dan (K_n) adalah barisan konstan yang positif sehingga $K_n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Jika memenuhi kondisi berikut:
(i). $s_n^2 \to \infty$
(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \geq 1$

maka $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1$.

Bukti:

Misalkan $t_n = \sqrt{2\ln\ln s_n^2}$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$,
$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n\ \text{i.o}\} = 0$
(1)
$P\{S_n \geq (1-\varepsilon)t_n s_n\ \text{i.o}\} = 1$
(2)

a. Pandang
$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n\ \text{i.o}\} = 0$
Misalkan $M_{n_k} = \max_{1\leq n\leq n_k} S_n$ dan berdasarkan lemma Cantelli-Borel [5] menyatakan bahwa jika (A_n) adalah sebuah barisan dari kejadian sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ maka P(A)=0 dimana $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, dan jika (A_n) adalah sebuah barisan saling bebas dari kejadian sedemikian sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ maka P(A)=1 dimana $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, maka
$\sum_{k=1}^{\infty} P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}\} < \infty$
(3)
untuk setiap $\delta > 0$.
Langkah selanjutnya adalah menggunakan akibat ke-2 dari Ketaksamaan Levy, akibat Ketaksamaan Levy menyatakan [5] bahwa Jika X_i adalah independen dan variabel acak simetrik. Maka
$P(S_n \geq \varepsilon) \geq \frac{1}{2}P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \geq \varepsilon$ (4)
dan
$P(|S_n| \geq \varepsilon) \geq \frac{1}{2}P(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon.$ (5)
Dan misalkan $X_1, X_2, \ldots X_n$ adalah variabel acak yang saling bebas dengan $E(X) = 0$ dan $\text{var}(X) < \infty$ untuk $1 \leq i \leq n$. Maka
$P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon) \leq 2P\left(S_n \geq \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n}\text{var}(X)}\right)$ (6)
Dimana pembuktiannya untuk setiap variabel acak X dengan variansi terbatas σ^2

$$P\left\{|X - E(X)| \geq \sqrt{2\sigma^2}\right\} \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

Sehingga berikut ini definisi median

$$E(X) - \sqrt{2\sigma^2} \leq med(X) \leq E(X) + \sqrt{2\sigma^2} \quad (8)$$

Selanjutnya mengaplikasikan persamaan (2) ke $(S_k - S_n)$, dengan catatan bahwa $E(S_k - S_n) = 0$. Maka didapatkan

$$|med\ (S_k - S_n)| \leq \sqrt{2\sum_{j=k+1}^{n} var(X_k)} \leq \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}$$

Dari persamaan ketaksamaan levy (1)

$$P\left\{max_{1\leq k\leq n}\left(S_k - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}\right) \geq \varepsilon\right\} \leq P\left\{\max_{1\leq k\leq n}\left(S_k - \text{med}\ (S_k - S_n)\right) \geq \varepsilon\right\} \leq 2P(S_n \geq \varepsilon).$$

$P\{\max_{1\le k\le n}(S_k - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}) \ge \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}\} \le P\{\max_{1\le k\le n}(S_k - med\,(S_k - S_n)) \ge \varepsilon\} \ge \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}.$

$P\left\{\max_{1\le k\le n}(S_k \ge \varepsilon)\right\} \le 2P\{S_n \ge \varepsilon - \sqrt{2\sum_{k=1}^{n} var(X_k)}\}$ (9)

sehingga $\varepsilon = (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}$, maka di dapatkan

$P\{M_{n_k} \ge (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}\} \le 2P\left\{S_{n_k} \ge (1+\ \delta)t_{n_k}s_{n_k} - \sqrt{2s_{n_k}^2}\right\}$ (10)

Karena $t_{n_k} \to \infty$, maka ruas kanan persamaan diatas menjadi sebagai berikut:

$(1+\delta)t_{n_k}s_{n_k} - \sqrt{2s_{n_k}^2} = t_{n_k}s_{n_k}\left(1+\delta - \frac{\sqrt{2}}{t_{n_k}}\right) > t_{n_k}s_{n_k}(1+\delta_1)$ (11)

untuk setiap $\delta_1 < \delta$ dan k yang cukup besar Oleh karena $\delta_1 < \delta$ dan k yang cukup besar, maka

$P\{M_{n_k} \ge (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}\} \le 2P\{S_{n_k} \ge (1+\ \delta_1)t_{n_k}s_{n_k}\}$ (12)

Selanjutnya dari kondisi (ii), maka

$\frac{|X_i|}{s_{n_k}} \le \frac{2k_i s_i}{t_i s_{n_k}}$ a.s (13)

untuk setiap $i \le n_k$

Misalkan

$c_k = \max_{1\le i\le n_k}\frac{X_i}{s_{n_k}}$ (14)

Maka

$c_k \le \max_{1\le i\le n_k}\frac{2k_i s_i}{t_i s_{n_k}}$ a.s (15)

Sehingga

$c_k(1+\delta_1)t_{n_k} \le \max_{1\le i\le n_k}\frac{2(1+\delta_1)k_i s_i t_{n_k}}{t_i s_{n_k}} \to 0$(16)

Untuk $k \to \infty$, subsitusikan dalil Kolmogorov (Batas Eksponensial) ke persamaan (6) dimana Batas Eksponensial menyatakan [5] bahwa misalkan (X_n) adalah barisan variabel acak yang saling bebas dengan $E(X) = 0$ dan $var(X) < \infty$ untuk $n \to \infty$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dan $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ untuk $n = 1,2,3, \ldots$. Miisalkan $|X_k| \le cS_n$ a.s, dimana $c > 0$ adalah konstan, untuk setiap k, $1 \le k \le n$ dan andaikan $\epsilon > 0$.

(i). Jika $\varepsilon c \le 1$ maka untuk $n \ge 1$ didapatkan

$P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon c}{2}\right)\right)$ (17)

Jika $\epsilon c \ge 1$ maka untuk $n \ge 1$ didapatkan

$P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon}{4c}\right)$ (18)

(ii). Diberikan $\gamma > 0$ mak terdapat $\varepsilon(\gamma)$ konstan (yang cukup besar) dan $\pi\gamma$ (yang cukup kecil) sedemikian sehingga untuk $\varepsilon \ge \varepsilon\gamma$ dan $\varepsilon c \le \pi\gamma$

$P(S_n > \varepsilon S_n) < exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+\gamma)\right)$ (19)

sehingga didapatkan

$P\{M_{n_k} \ge (1+\delta)t_{n_k}s_{n_k}\} \le \exp\{-(1+\delta_1)^2 \ln\ln s_{n_k}^2(1-\gamma)\},$

$= (\ln s_{n_k}^2)^{-(1-\gamma)(1+\delta_1)^2}$ (20)

untuk $0 < \gamma < 1$ dan k yang cukup besar

Pilih $0 < \gamma < 1$, sedemikian sehingga

$(1-\gamma)(1+\delta_1)^2 > 1$ (21)

Selanjutnya karena $s_n^2 \to \infty$, sehingga dari kondisi (ii). Didapatkan bahwa

$1 \le \frac{s_{n+1}^2}{s_n} = 1 + \frac{E[Var\,(X_{n+1})]}{s_n^2} \le 1 + \frac{s_{n+1}^2}{s_n}\frac{K_{n+1}^2}{\ln\ln s_{n+1}^2}$ (22)

Jadi

$\left(\frac{s_{n+1}^2}{s_n} - \frac{s_{n+1}^2}{s_n}\frac{K_{n+1}^2}{\ln\ln s_{n+1}^2}\right) \le 1$ (23)

$\left\{\frac{s_{n+1}^2}{s_n}\left(1 - \frac{K_{n+1}^2}{\ln\ln s_{n+1}^2}\right)\right\} \le 1$ (24)

Karena $K_n \to 0$ dan $\ln\ln s_{n+1}^2 \to \infty$ untuk $n \to \infty$, hal ini berarti $\frac{s_{n+1}^2}{s_n} \to 1$ untuk $n \to \infty$.

Dari lemma 5 menyatakan [5] bahwa misalkan (B_n) adalah barisan naik bilangan real positif yang memenuhi $B_n \to \infty$ dan $\frac{B_n}{B_{n+1}} \to 1$ untuk $n \to \infty$. Maka untuk setiap $\tau > 0$ terdapat barisan bilangan bulat positif (n_k) sedemikian sehingga $B_{n_k} \sim (1+\tau)^k$ untuk $k \to \infty$, dengan pembuktiannya karena $\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1$ untuk $n \to \infty$ maka ada bilangan bulat k_0, sedemikian sehingga untuk $k > k_0$ setiap interval dari $\{(1+\tau)^k, ((1+\tau)^{k+1})\}$, memuat paling kurang B_n. Sebaliknya $\limsup_n \frac{B_{n+1}}{B_n} \ge (1+\tau) > 1$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_{k_0}$ untuk $k > k_0$. Misalkan n_k adalah bilangan bulat paling kecil sedemikian sehingga $B_{n_k}(1+\tau)^k$ maka $n_k < n_{k+1}$ untuk semua $k > k_0$ dan

$\frac{B_{n_{k-1}}}{B_{n_k}} < \frac{(1+\tau)^k}{B_{n_k}} \le 1,$ (25)

Karena $\frac{B_{n_{k-1}}}{B_{n_k}} \to 1$

Sehingga didapatkan untuk setiap $\tau > 0$ maka ada barisan naik (n_k), $n_k(\tau) > 0$, sedemikian sehingga

$s_{n_k}^2 \sim (1+\tau)^k$ (26)

untuk $k \to \infty$

Dan

$s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2 = s_{n_k}^2\left(1 - \frac{s_{n_{k-1}}^2}{s_{n_k}^2}\right)$

$= s_{n_k}^2\left(\frac{s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2}{s_{n_k}^2}\right)$

$\sim s_{n_k}^2 \frac{\tau}{1+\tau}$ (27)

Jadi berdasarkan persamaan (16) dan $\tau > 0$ didapatkan

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln s_{n_k}^2\right)^{-(1-\gamma)(1+\delta_1)^2} < \infty$ (28)

Sehingga berlaku persamaan (3).

Selanjutnya untuk setiap $\varepsilon > 0$ didapatkan

$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} \leq P\{\max_{1\leq n\leq n_k} S_n \geq (1+\varepsilon)t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}} \text{ i.o}\} \leq P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)\, t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}} \text{ i.o}\}$
(29)

Berdasarkan persamaan (11) maka

$t_{n_k} s_{n_k} < \sqrt{1+2\tau}\; t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}}$ (30)

untuk k yang cukup besar

Sehingga

$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} \leq P\left(M_{n_k} \geq \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}} t_{n_k} s_{n_k} \text{ i.o}\right)$ (31)

Misalkan $\varepsilon > 0$, pilih $0 < \delta < \varepsilon$ dan andaikan bahwa τ memenuhi

$\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}} > 1 + \delta$ (32)

Maka

$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} \leq P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k} s_{n_k} \text{ i.o}\}$(33)

Jadi

$\sum_{k=1}^{\infty} P\{M_{n_k} \geq (1+\delta)t_{n_k}\} < \infty$,

maka

$P\{S_n \geq (1+\varepsilon)t_n s_n \text{ i.o}\} = 0$.

b. Pandang

Persamaan (2), maka persamaan (2) berlaku untuk setiap $0 < \varepsilon < 1$ dan barisan (n_k)

Pilih (n_k) dan τ, misalkan

$u_k^2 = s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2 \sim s_{n_k}^2\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)$, (34)

dan

$v_k^2 = (2\ln\ln u_k^2) \sim 2\ln\left(\ln u_k^2 + \ln\frac{\tau}{1+\tau}\right)$
$\sim 2\ln\ln s_k^2 = t_{n_k}$ (35)

Selanjutnya

$A_k = \{s_{n_k} - s_{n_{k-1}} \geq (1-\varepsilon)\}$, (36)

sehingga dapat ditujukkan bahwa $P(A_k \text{ i.o}) = 1$

Karena $s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ adalah variabel acak yang saling bebas. Maka dapat ditunjukkan bahwa

$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$. (37)

Dengan catatan:

$(1-\varepsilon)v_k \sim (1-\varepsilon)t_{n_k} \to \infty$ (38)

untuk $k \to \infty$,

dan

$\max_{n_{k-1}<n\leq n_k} \frac{|X_n|}{u_k} \leq \max_{n_{k-1}<n\leq n_k} \frac{k_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}} \sqrt{\frac{1+\tau}{\tau}} \cdot \frac{1}{s_{n_k}}$
(39)

untuk $k \to \infty$

Oleh karena

$P(S_n > \varepsilon S_n) > exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+\gamma)\right)$ (40)

dapat diaplikasikan dengan memilih γ sedemikian sehingga

$(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 < 1$. (41)

Sehingga didapatkan

$P(A_k) > exp\left\{-\frac{1}{2}(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 v_k^2\right\}$
$= \exp\{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2 \ln\ln s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2\}$
$= \{\ln(s_{n_k}^2 - s_{n_{k-1}}^2)\}^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2}$
$\sim \left\{\ln\left((1+\tau)^k \frac{\tau}{1+\tau}\right)\right\}^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2}$
$ck^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2}$ (42)

Dimana $c > 0$ adalah konstanta yang saling bebas dari k. Berdasarkan persamaan (31)

$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) > c\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\gamma)(1-\varepsilon)^2} = \infty$ (43)

Jadi

$P(A_k \text{ i.o}) = 1$

Selanjutnya misalkan

$B_k = (|S_{n_{k-1}}| < 2s_{n_{k-1}} t_{n_{k-1}})$ (44)

Bukti persamaan (1) tetap berlaku jika X_k diganti dengan $(-X_k)$. Hal itu juga berarti bahwa, untuk $|S_{n_{k-1}}|$ bukti tersebut juga berlaku dengan $\varepsilon = 1$

Sehingga didapatkan:

$P(|S_{n_{k-1}}| \geq 2s_{n_{k-1}} t_{n_{k-1}} \text{ i.o}) = 0$, (45)

dimana

$P(B_k \text{ i.o}) = 0$ (46)

Oleh karena itu peluang dari $P(B_k^c) = 1$. Maka

$(|S_{n_{k-1}}(\omega)| < 2s_{n_{k-1}} t_{n_{k-1}})$ (47)

untuk $n > n_0(\omega)$ dan untuk setiap $\omega\epsilon S$ kecuali untuk himpunan kosong.

Selanjutnya jika $P(A_k B_k \text{ i.o}) = 1$ maka berlaku persamaan (2). Selanjutnya didapatkan

$$A_k \cap B_k = \{s_{n_k} - s_{n_{k-1}} \geq (1-\varepsilon)u_k v_k\} \cap \{|s_{n_{k-1}}| < 2t_{n_k} s_{n_{k-1}}\}$$
$$\subset \{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon)u_k v_k + s_{n_{k-1}}\} \cap \{S_{n_{k-1}} > -2t_{n_k} s_{n_{k-1}}\}$$
$$\subset \{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon)u_k v_k - 2t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}}\}$$
(48) Dimana

$$(1-\varepsilon)u_k v_k - 2t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}} = t_{n_k} s_{n_k}\left\{(1-\varepsilon)\frac{u_k v_k}{t_{n_k} s_{n_k}} - 2\frac{t_{n_{k-1}} s_{n_{k-1}}}{t_{n_k} s_{n_k}}\right\}$$
$$\sim t_{n_k} s_{n_k}\left\{(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} - \frac{2}{\sqrt{1+\tau}}\right\} \quad (49)$$

Jika dipilih $\varepsilon' > \varepsilon$ dan τ yang cukup besar, sehingga $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} - \frac{2}{\sqrt{1+\tau}} > 1 - \varepsilon'$
(50)
Maka
$$(A_k \cap B_k \text{ i.o}) \subset \{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon')t_{n_k} s_{n_k} \text{ i.o}\}$$
(51) Dan untuk setiap $\varepsilon' > 0$ maka berlaku
$$P\{S_{n_k} \geq (1-\varepsilon')t_{n_k} s_{n_k} \text{ i.o}\} = 1$$
(52)
Sehingga dari penyelesaian di atas terbukti bahwa
$$P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1,$$
jika memenuhi kondisi:
(i). $s_n^2 \to \infty$
(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \geq 1$

SIMPULAN

Berdasarkan penyelesaian dari permasalahan maka dapat disimpulkan bahwa: misalkan (X_n) merupakan barisan variabel acak berdistribusi identik yang saling bebas dengan $E(X_n) = 0$ dan $var(X_n) < \infty$ untuk setiap $n \geq 1$, sedangkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ untuk $n = 1,2,3, ...$, dan K_n adalah barisan konstan yang positif sehingga $K_n \to 0$ untuk $n \to \infty$, dan jika memenuhi kondisi berikut:

(i). $s_n^2 \to \infty$

(ii). $|X_n| \leq \frac{K_n s_n}{\sqrt{\ln\ln s_n^2}}$ a.s untuk setiap $n \geq 1$,

maka $P\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1\right) = 1.$

REFERENSI

Bartle, R.G dan Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. 3^{rd} edition. New York: John Willey & Sons.

Billingsley, Patrick. 1995. *Probability and Measure*. New York: John Wiley & Sons.

Freund, John E, & Ronald E. Walpole. 1987. *Mathematical Statistics*. 4^{th}. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Galambos, Janos. 1995. *Advanced Probabilty Theory*. NewYork: Marcel Dekker, Inc.

Laha, R. G. & V. K. Rohatgi. 1979. *Probability Theory*. New York: John Wiley & Sons.

Rohatgi, V.K. 1976. An Introduction to *Probability Theory and Mhatematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons.

Teicher, Henry. 1974. *On The Law Of The Iterated Logaritma*. The Annals Of Probability. 2 4 714-728.

Walpole, Ronald E. 1995. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama