# Studi Kualitatif Persamaan Rayleigh

**Rapi Amiko Martunus**[1]**, Muhammad Subhan**[2]
[1,2] Prodi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

**Article Info**

***Article history:***

Received February 08, 2022
Revised April 04, 2023
Accepted March 20, 2024

***Keywords:***

Rayleigh Equation
Dynamic System
Periodic Solution
linearization

***Kata Kuncis:***

Persamaan Rayleigh
Sistem dinamik
Solusi Periodik Tunggal
Linearisasi

**ABSTRACT**

Rayleigh's equations have many applications in physics and electromechanics. In the field of physics can be seen such as optics, vibration systems, sound, wave theory, color vision, electrodynamics, electromagnetism, light scattering, fluid flow, hydrodynamics, photography, as well as waves and frequencies, also applied in the fields of health, agriculture, biology, astronomy. This study aims to determine the fixed point and prove the existence of a periodic solution and analyze the condition of the Rayleigh equation system around the fixed point. The Rayleigh equation is transformed into a first-order differential equation to obtain a fixed point, and using an approximation to the Van Der Pool equation it is proved that the Rayleigh equation has a single periodic solution. The Rayleigh equation has one periodic solution and has one fixed point, the origin. The condition of the system around a fixed point is said to be unstable which is shown analytically by changing the value of the parameter to the eigenvalues. Geometrically it is shown that the phase portrait moves away from a fixed point and exits towards the periodic solution where the periodic solution is said to be stable.

**ABSTRAK**

Persamaan Rayleigh memiliki banyak pengaplikasian dibidang fisika dan elektromekanik. Dibidang fisika dapat dilihat seperti optik, sistem getar, suara, teori gelombang, penglihatan warna, elektrodinamika, elektromagnetisme, hamburan cahaya, aliran cairan, hidrodinamika, fotografi, serta gelombang dan frekuensi, juga diterapkan dibidang kesehatan, pertanian, biologi, astronomi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan titik tetap dan pembuktian adanya solusi periodik serta menganalisis kondisi sistem persamaan Rayleigh disekitar titik tetap. Persamaan Rayleigh ditransformasi menjadi persamaan differensial orde-1 diperoleh titik tetap, dan menggunakan pendekatan terhadap persamaan Van Der Pool dibuktikan bahwa persamaan Rayleigh memiliki solusi periodik tunggal. Persamaan Rayleigh memiliki satu solusi periodik dan memiliki satu titik tetap yaitu titik asal. Kondisi sistem di sekitar titik tetap dikatakan tidak stabil yang diperlihatkan secara analitik dengan perubahan nilai parameter $\mu$ pada nilai eigen. Secara geometri diperlihatkan bahwa potraik fasenya menjauhi titik tetap dan keluar menuju solusi periodik dimana solusi periodiknya dikatakan stabil.



***Penulis pertama***

(Rapi Amiko Martunus)
Prodi Matematika,Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jalan Prof. Dr. Hamka, Air Tawar Barat, Padang Utara, Padang, 25171 Padang, Sumatera Barat
Email: amikomartunus@gmail.com.

## 1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika yang mengandung fungsi dan turunannya. Dikatakan linier jika memiliki variabel terikat dan turunannya linier. Jika tidak, persamaan ini dikatakan sebagai persamaan diferensial nonlinier. Karena mengandung turunan, turunan tertinggi disebut orde. (Nayfeh, 2011).

Dalam penelitian ini akan analisis sistem diterapkan pada persamaan Rayleigh.

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x}, \mu > 0$$

di mana $x(t)$ mewakili deviasi getaran benda pada waktu $t$, dan $\mu$ adalah konstanta redaman yang bernilai kecil (disebut parameter gangguan). Persamaan Rayleigh adalah persamaan diferensial nonlinier orde kedua yang memodelkan gerak osilator dengan faktor redaman nonlinier.

Aplikasinya terdapat dalam bidang fisika dan elektromekanika yang sangat dibutuhkan untuk kelangsungan hidup manusia, diperkenalkan oleh fisikawan Inggris Lord Rayleigh pada tahun 1917. Persamaan Rayleigh ini banyak diterapkan pada bidang kesehatan, pertanian, biologi, astronomi dan ilmu lainnya. Kontribusi Rayleigh terhadap sains pada aspek fisika mencakup banyak hal seperti optik, sistem getar, suara, teori gelombang, penglihatan warna, elektrodinamika, elektromagnetisme, hamburan cahaya, aliran cairan, hidrodinamika, ukuran gas, viskositas, kapilaritas, elastisitas, dan fotografi (Schaschke, 2014:317).

Persamaan Rayleigh ini sangat banyak digunakan dibidang ilmu teknologi yang melibatkan radiasi, gelombang dan frekuensi. Dengan menganalisa persamaan Rayleigh tersebut, peneliti maupun peneliti lainnya dapat melihat kegunaan secara langsung dan bisa memunculkan suatu penelitian lain yang relevan. Maka dengan persamaan Rayleigh peneliti akan menyelesaikan permasalahan tersebut dengan mencari ketunggalan solusi, menganalisa perilaku dinamik disekitar titik tetap dan menbentuk perilaku secara geometri yang baik.

## 2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif dengan melihat teori-teori yang relevan sebagai acuan dalam studi kepustakaan. Studi kepustakaan dilakukan dengan mengkaji dan mempelajari buku-buku dan sumber-sumber lain yang berkaitan dengan persamaan Rayleigh. Cara peninjauan masalah pada penelitian ini dengan mengkaji pembuktian solusi priodik pada sistem persamaan Rayleigh yang memenuhi asumsi-asumsi dari teorema persamaan lienard. Kemudian dilakukan analisa terhadap perilaku dinamik yang dilakukan secara analitik sekitar titik tetap persamaan Rayleigh serta memperlihatkan secara goemetri dengan bantuan software maple dalam menggambarkan kondisi tersebut. Maka ditarikan suatu kesimpulan terhadap solusi periodik yang diperoleh dan kondisi sistem disekitar titik tetap persamaan Rayleigh.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisa dari persamaan Rayleigh berikut ini.

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x}, \qquad \mu > 0 \tag{1}$$

Persamaan Rayleigh memiliki hubungan terhadap parameter $\mu$, terutama dalam kasus ekstrim di mana parameter $\mu$ kecil atau sangat besar, yang terkait dengan jenis aproksimasi sistem osilasi diri yang diwakilinya.

### 3.1. Titik Tetap pada Persamaan Rayleigh

Untuk nilai $\mu = 0$, setelah melakukan substitusi nilai $\mu$ ke dalam persamaan Rayleigh, diperoleh persamaan $\ddot{x} + x$, dengan $\ddot{x} = \frac{d^2I}{dt}$ dan $x = I$.

Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada hambatan yang terjadi ketika variabel dinamis berubah terhadap waktu $(\mu(1-\dot{x}^2)\dot{x})=0$, dan secara eksplisit solusi analitik dapat dihitung, yaitu

$$\ddot{x}+x=0$$

dengan persamaan karakteristik

$$m^2+1=0$$
$$m_{1,2}=\pm i$$
$$m_{1,2}=a\pm bi; a=0, b=1$$

sehingga solusi dari $x(t)$ adalah

$$x(t)=P\cos t+Q\sin t$$

dengan $P,Q\in R$

Untuk $\mu>0$, persamaan Rayleigh menjadi bentuk persamaan non linier. Pada persamaan (1) ditunjukan bahwa persamaan Rayleigh dapat diubah menjadi bentuk persamaain Van der Pol, maka persamaan ini dapat ditranformasi menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y\\ \frac{dy}{dt}&=\mu(1-y^2)y-x\end{aligned} \tag{2}$$

Titik tetap ditentukan dengan menyamakan persamaan (2) $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$ yang akan memberikan (b) maka kita mendapatkan (c).

Titik-titik tetap ditentukan dengan mengambil $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=0$ yang akan memberikan $y=0$ maka diperoleh $x=0$. Maka titik tetap persamaan Rayleigh $(x^*,y^*)=(0,0)$ yang juga disebut titik asal.

### 3.2. Solusi Periodik Persamaan Rayleigh

Persamaan differensial berbentuk $f(t,x,x',x")=0$ disebut persamaan orde dua, dengan $x'=\frac{dx}{dt}$ dan $x"=\frac{d^2x}{dt^2}$ atau $\dot{x}=x'=\frac{dx}{dt}$ dan $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$. Pada tahun 1920 Van Der Pol menuliskan sebuah persamaan dengan bentuk $\ddot{x}+x=\mu(1-x^2)\dot{x}, \mu>0$ sedangkan Rayleigh juga merumuskan persamaan (1). Dengan melakukan transformasi persamaan Rayleigh menjadi persamaan berbentuk persamaan Van Der Pol diperoleh suatu fungsi $F(\dot{x})=\mu\dot{x}\sqrt{3}(\dot{x}^2-1)$, maka terbukti persamaan Rayleigh memiliki hanya satu solusi periodik dengan penggunaan persamaan Lienard.

### 3.3. Perilaku Dinamik Secara Analitik dan Geometri di Sekitar Titik Tetap

Sistem persamaan (2) merupakan sistem persamaan nonlinier dengan suku-suku nonlinier. Dalam memahami beberapa perilaku dari solusi sistem persamaan diferensial non-linier, pendekatan linier digunakan dengan linierisasi sistem persamaan (2) di sekitar titik tetap$(x^*,y^*)$. Fungsi F dan G pada system persamaan (2), masing-masing diturunkan terhadap $x$ dan $y$. Demikian menggunakan matriks jacobian didapatkan sistem yang dilinierkan pada titik tetap $(x^*,y^*)=(0,0)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G}{\partial y}(0,0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3}$$

Selanjutnya, perilaku dinamis persamaan (3) dapat dianalisis dengan mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Nilai eigen persamaan (3) diperoleh dari persamaan dengan perhitungan sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik nilai eigen

$$\lambda^2 - \mu \cdot \lambda + 1 = 0$$

Memiliki akar-akar persamaan karakteristik seperti berikut

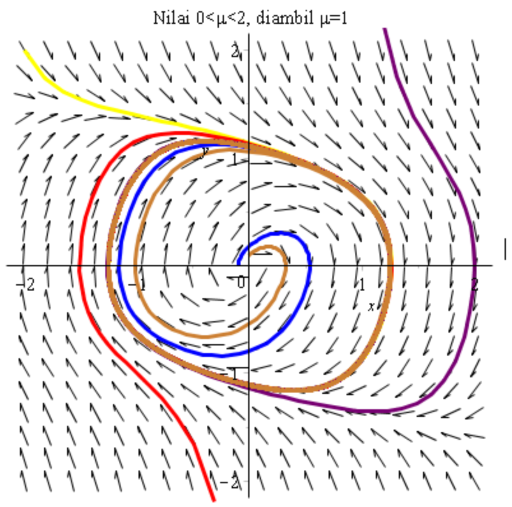
$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad (4)$$

Bentuk persamaan $\sqrt{\mu^2 - 4}$ memberikan tiga kondisi berbeda pada nilai eigen dengan mempengaruhi nilai dari $\mu$. Hasil dari kondisi tersebut dapat diperhatikan pada tabel.

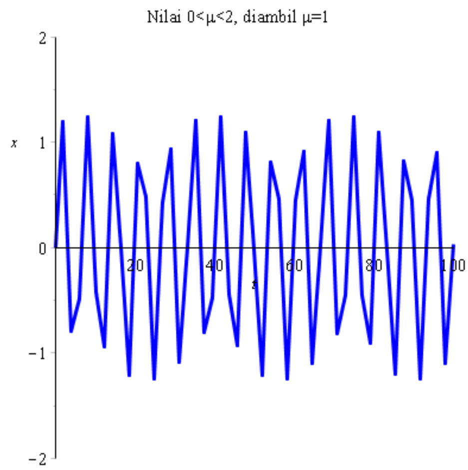
Tabel. Hubungan Nilai eigen dengan Kestabilan

| Nilai $\mu$ | Nilai eigen berbentuk | Hasil kestabilan |
|---|---|---|
| $0 < \mu < 2$ | $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \cdot \beta$<br>$\alpha < 0$<br>$\alpha > 0$ | <br>Stabil Asimtotis<br>Tidak stabil |
| $\mu = 2$ | $\lambda_1 = \lambda_2$ | Proper atau improper node |
| $\mu > 2$ | $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ | Tidak stabil |

Simulasi yang dilakukan dengan bantuan software maple untuk kondisi parameter $\mu$ yang berbeda-beda $0 < \mu < 2$, $\mu = 2$, dan $\mu > 2$. Nilai parameter $\mu$ yang digunakan untuk persamaan (4).

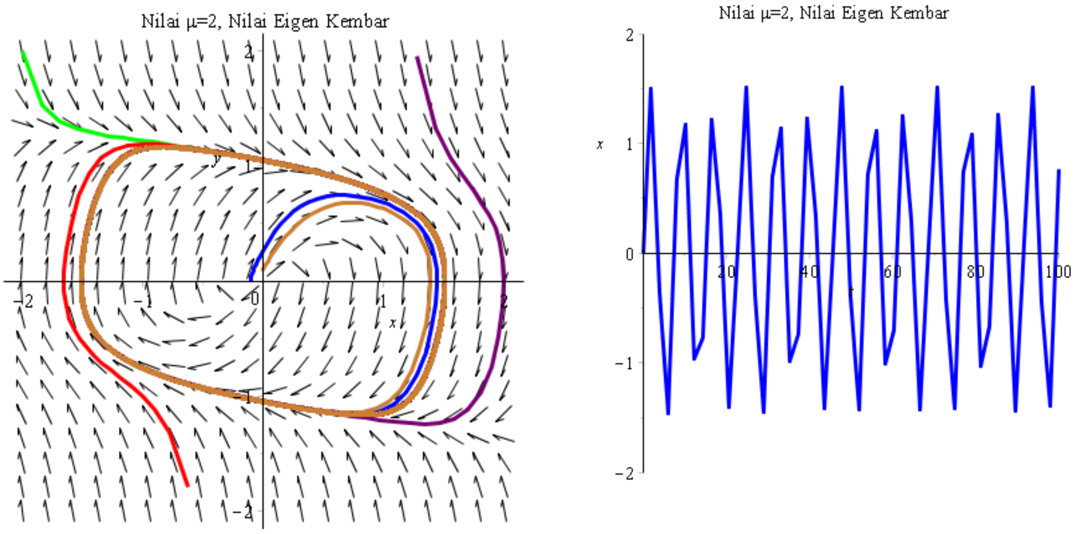



(a)



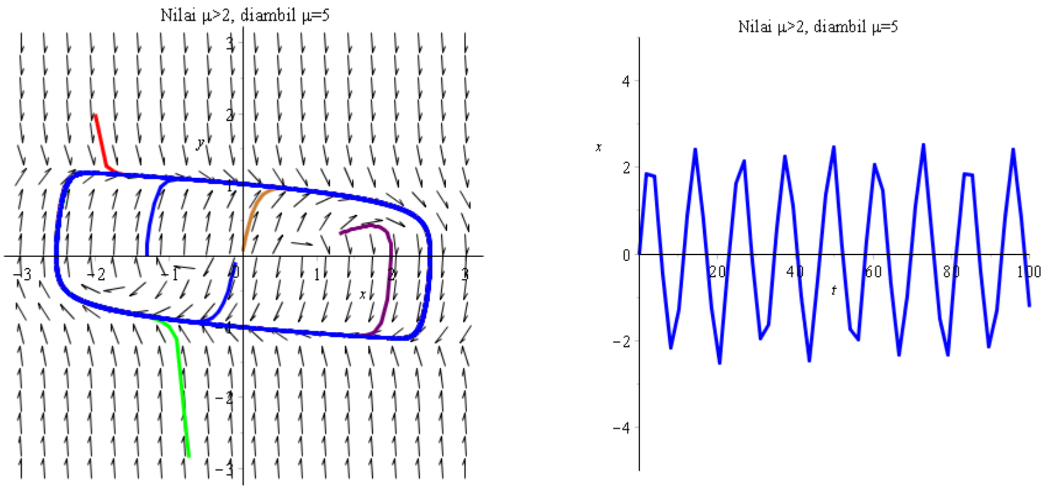

(b)

*Gambar 1. Phase Portrait untuk nilai μ = 1 (a) berbentuk spiral dan Grafik x terhadap t = 0..100 (b) pada kondisi* $0 < \mu < 2$




(c) (d)

*Gambar 2. Phase Portrait untuk nilai* $\mu$ *= 1 (c) berbentuk spiral dan Grafik x terhadap t = 0..100 (d) pada kondisi* $\mu = 2$




(e) (f)

*Gambar 3. Phase Portrait untuk nilai* $\mu$ *= 5 berbentuk spiral (e) dan Grafik x terhadap t = 0..100 (f) pada kondisi* $\mu > 2$

Pada Gambar (1a, 2c, dan 3e) dapat dilihat bahwa semua lintasan bergerak dari titik tetap (0,0) ke orbit periodik dan semua lintasan dari luar bergerak ke orbit periodik. Orbit periodik persamaan Rayleigh ini adalah solusi periodik tunggal. Ini menunjukkan bahwa orbit periodik ini stabil. Pada Gambar (1b, 2d, 3f) hubungan antara $x(t)$ terhadap t dimana terjadinya penurunan dan kenaikan yang stabil menuju tak hingga, dalam simulasi di batasi sampai $t = 0..100$ dan memperlihatkan kestabilan solusi periodik terhadap kondisi waktu.

## 4. Kesimpulan

Persamaan Rayleigh memiliki hubungan terhadap parameter $\mu$, terutama dalam kasus ekstrim ketika parameter $\mu$ kecil atau besar. Persamaan Rayleigh memiliki satu solusi periodik yang ditunjukan dengan persamaan Lienard dan memiliki titik tetap di (0,0) juga disebut titik asal.

Kondisi sistem disekitar titik tetap dikatakan tidak stabil yang diperlihatkan secara analitik dengan perubahan nilai $\mu$ pada nilai eigen $\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ yaitu : $0 < \mu < 2, \mu = 2$, dan $\mu > 2$ dan geometri dengan bantuan software maple. Secara geometri diperlihatkan bahwa potraik fasenya menjauhi titik tetap dan keluar menuju solusi periodik dimana solusi periodiknya dikatakan stabil.

## REFERENSI

[1] Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi: Edisi 8 Jilid 1*. Jakarta: Erlangga

[2] Cain, John W., dan Reynold, Angela M. 2010. *Ordinary And Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical Systemd.* Virginia Commonwealth University.

[3] Kurniati, Eka Asih, Mahdhivan Syafwan, Radhiatul Husna. 2016. Metode Bentuk Normal pada Penyelesaian Persamaan Rayleigh. Jurnal Matematika UNAND. 5(3): 77-84

[4] Lasek, G. C. 2015. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos.* India: Springer.

[5] Lindsay, Robert Bruce. 1970. *Men of Physics Lord Rayleigh – the Man and His Work*. Pergamon Press

[6] Nayfeh, A. H. 2011. *The Method of Normal Form*. Wiley-VCH, Weinheim Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equation and Dynamical System*: Third Edition. New York: Springer.

[7] Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations Third Edition.* Singapore : John Willey & Sons, Inc.

[8] Santosa, W. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: Matematika ITB.

[9] Schaschke, Carl. 2014. *A Dictionary of Chemical Engineering*. United States of America: Oxford University Press

[10] Subhan, Muhammad. 2012. Solusi Periodik dan Bifurkasi pada Forced Duffing Oscillator. Eksakta. 1

[11] Sudarsono, Ely. 2018. Analisis Kestabilan Model Robot Bifedal Menggunakan Metode Kesetimbangan Harmonis. Jurnal Ilmiah Matematika. 1(7)