Analisis Stabilitas dan Kontrol Optimal Model Matematika Kecanduan *Game Online*

Putri Karimah[1], Muhammad Subhan [2]
[1,2],Prodi Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received February 04, 2022
Revised July 15, 2022
Accepted September 15, 2022

Keywords:

Mathematics model
Optimal control
Pontriagin's maximum principle
Game online

Kata Kunci:

Model matematika
Kontrol optimal
Prinsip maksimum pontriagin
Game online

ABSTRACT

The purpose of this study is to see how the analysis of stability and optimal control of the mathematical model of online game addiction so that the problem of addiction to online games can be resolved in the future. The author conducted a stability analysis of the model equilibrium point where there are two equilibrium points and also obtained the basic reproduction number $R_0 = \frac{(k_2+\mu)k_1\beta+(1-k_1)(\delta+\mu)\alpha+(1-k_1)\beta(1-\gamma)k_2}{(k_2+\mu)(\delta+\mu)}$. By using Pontryagin's maximum principle, optimal control of the control variables is obtained, namely $k_1^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_1}(\lambda_2-\lambda_3)S\left(\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right)\right)\right\}$ dan $k_2^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_2}\left((\lambda_2-\lambda_3)I+(\lambda_3-\lambda_4)\gamma I\right)\right)\right\}$.

ABSTRAK

Tujuan penelitian ini untuk melihat bagaimana analisis stabilitas dan kontrol optimal model matematika kecanduan *game online* Sehingga masalah kencanduan pada game online ini dapat teratasi dimasa yang akan datang. Penulis melakukan analisis kestabilan terhadap titik kesetimbangan model dimana terdapat dua titik kesetimbangan dan juga diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{(k_2+\mu)k_1\beta+(1-k_1)(\delta+\mu)\alpha+(1-k_1)\beta(1-\gamma)k_2}{(k_2+\mu)(\delta+\mu)}$. Dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin diperoleh kontrol yang optimal terhadap variabel kontrol yaitu $k_1^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_1}(\lambda_2-\lambda_3)S\left(\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right)\right)\right\}$ dan $k_2^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_2}\left((\lambda_2-\lambda_3)I+(\lambda_3-\lambda_4)\gamma I\right)\right)\right\}$.

This is an open access article under the CC BY-SA license.

(Putri Karimah)
Prodi Matematika,Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka,Air Tawar barat,Padang Utara, Padang, 25171 Padang,Sumatera Barat
Email: putrikarimah1706@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Internet merupakan suatu kebutuhan bagi manusia pada saat sekarang ini. Pengguna internet di seluruh dunia terhitung mencapai angka 4,5 milyar orang. Angka ini menunjukkan bahwa pengguna internet telah mencapai lebih dari 60 persen penduduk dunia atau lebih dari separuh populasi bumi [1]. Pada Januari 2021, tercatat pengguna internet di Indonesia mencapai 202,6 juta dengan rata-rata waktu yang dihabiskan orang Indonesia untuk mengakses internet yaitu 8 jam 52 menit [2]. Dari banyaknya jenis aplikasi yang digunakan untuk mengakses internet, game online merupakan salah satunya.*Game online* sebagai multimedia dapat membuat ketertarikan yang tinggi pada penggunanya terutama *game online* yang mempergunakan interaksi [3]. Menurut Henry, kondisi ini dapat membawa dampak negatif bagi pemainnya. Salah satu efek negatif yang ditimbulkan oleh *game* *online* adalah efek kesenangan bagi penggemarnya dan dapat menimbulkan kecanduan [4]. *E-Sport* pun kini juga sangat berkembang dan digemari oleh semua kalangan, mulai dari remaja sampai dewasa. *e-sport* merupakan bidang olahraga yang menggunakan *game* sebagai bidang kompetitifnya. Dengan perkembangan *e-sports* yang berkelanjutan ini, semakin banyak profesional yang terlibat dalam *e-sports*, seperti kontestan profesional, pengembang game, perencanaan organisasi media *e-sports*, host *e-sports*, komentar *game*, dan sebagainya. Mereka secara bertahap menjadi kelompok penting yang tidak bisa diabaikan. Meskipun mereka menghabiskan lebih dari lima jam sehari bermain *game*, mereka berbeda dari pecandu *game* tradisional [5].

Di Cina, Amerika, dan negara-negara lain, banyak universitas secara bertahap membuka spesialisasi *e-sports* untuk mengembangkan bakat dalam *e-sports*. Mereka dapat berubah dari orang yang rentan menjadi orang profesional secara langsung dan tidak perlu melalui tahap kecanduan *game*. Setelah melalui pendidikan dan perawatan dari rumah sakit atau psikolog, orang yang kecanduan dapat memilih untuk menjadi profesional atau berhenti secara permanen [5]. Dalam ilmu matematika terdapat suatu bidang ilmu yang berusaha untuk mempresentasikan serta menjelaskan sistem-sistem fisik atau permasalahan dunia nyata, ke dalam pernyataan matematika sehingga diperoleh pemahaman masalah dari dunia nyata menjadi lebih tepat dan efisien yang disebut juga pemodelan matematika [6]. Karena adanya daya tarik tertentu yang dimiliki *game online* dan orang-orang yang lemah kemauan mudah terpengaruh dan terlena di dalamnya, maka dalam arti tertentu perilaku bermain *game online* dan penyakit menular memiliki mekanisme penularan yang sama dengan penularan *game online* [5].

Pada penelitian sebelumnya Side, Sanusi, & Rustan, (2020) tentang 'Model Matematika SIR Sebagai Solusi Kecanduan Penggunaan Media Sosial' menjelaskan tentang model kecanduan media sosial dan membagi menjadi 3 kompartemen yaitu SIR (Suspect-infected-Recovered). Pada penelitian Anwar, Syam, Pratama, & Side (2021) juga membahas tentang 'SEIRS model analysis for online game addiction' dimana model tersebut menggunakan bentuk model SEIRS. Berdasarkan pertimbangan dan masalah tentang kecanduan *game online* tersebut yang masih banyak terjadi maka dalam penelitian ini penulis akan mengkaji ulang model matematika pada kecanduan *game online* dengan dilakukannya analisis stabilitas dan kontrol optimal berdasarkan jurnal rujukan oleh Li, & Guo, (2019) dengan adanya kompartemen S (*Suspect*) untuk individu rentan, I (*Infective*) untuk individu yang telah kecanduan *game online*, P (*Professional)* sebagai pemain professionl dan Q (*Quit)* untuk populasi yang telah berhenti bermain *game*. Sehingga diharapkan tidak ada individu yang kecanduan dalam bermain *game* dengan adanya kontrol yang dilakukan. Penulis juga berharap dengan mengkaji ulang pemodelan matematika ini kita dapat mengatasi masalah kecanduan pada game online dan pemerintah juga dapat memiliki pedoman dalam membuat kebijakan yang tepat dalam penanangannya dimasa yang akan datang. Oleh karena itu peneliti ingin mengangkat judul penelitian tentang ***'Analisis Stabilitas Dan Kontrol Optimal Model Matematika Kecanduan Game Online'***.

2. METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis. dimana peneliti melakukan studi kepustakaan terkait model matematika kecanduan *game online* dan kontrol optimal. Adapun Langkah-langkah yang dilakukan peneliti adalah :

1. Melakukan studi literatur terkait masalah kecanduan *game online*
2. Mengkaji/ membuat model matematika kecanduan *game online*
3. Melakukan analisis kestabilan model matematika kecanduan *game online*
4. Menyelesaikan kontrol optimal dengan menggunakan prinsip *maksimum pontryagin*
5. Membuat interpretasi dari hasil analisis dan kontrol optimal model matematika kecanduan pada *game online*
6. Melakukan simulasi numerik mengggunakan *Sofware* Maple 18
7. Membuat kesimpulan dari model matematika kecanduan pada *game online*

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pembentukan Model Matematika Kecanduan *Game Online*

Untuk memudahkan dalam kita dalam mengkontruksi model maka akan diberikan asumsi untuk model matematika kecanduaan *game online* adalah sebagai berikut:

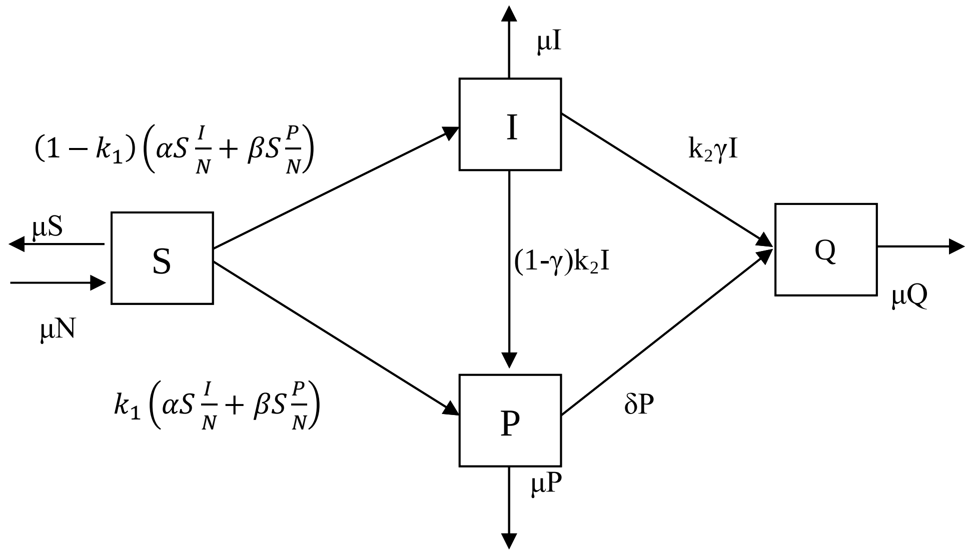
1. Laju kelahiran dan kematian adalah sama
2. Laju perpindahan masing-masing parameter adalah konstan
3. Populasi bersifat tertutup (tidak ada imigrasi dan emigrasi)
4. Individu populasi P tidak dapat mempengaruhi individu pada populasi I dan individu pada populasi Q tidak dapat mempengaruhi individu pada populasi I dan P
5. Pemain *game online* yang telah sembuh atau berhenti bermain *game online* tidak dapat kembali kedalam populasi rentan karena adannya bimbingan dan edukasi secara berlanjut
6. Seluruh individu dalam populasi di anggap memiliki sarana untuk bermain *game online*
7. Individu pada populasi S yang bermain kurang dari 5 jam, itu bukan waktu bermain kecanduan dan individu pada populasi Q telah berhenti bermain *game online* sehingga disini tidak mempermasalahkan pekerjaan.

Tabel 1. Variabel Yang Digunakan Dalam Analisis Kestabilan Dan Kontrol Optimal Model Matematika Kecanduan *Game Online*

Variabel	Keterangan	Satuan
S	Populasi individu yang bermain game online kurang dari 5 jam perharinya	Individu
I	Populasi individu yang bermain game online lebih dari 5 jam perhari dan tidak memiliki pekerjaan yang layak	Individu
P	Populasi individu yang bermain game online lebih dari 5 jam perhari dan memiliki pekerjaan yang layak	Individu
Q	Populasi individu yang telah berhenti total bermain game online	Individu
t	Waktu	Tahun

Tabel 2. Parameter Yang Digunakan Dalam Analisis Stabilitas Dan Kontrol Optimal Model Matematika Kecanduan Game Online

Parameter	Keterangan	Satuan
μ	Laju kelahiran dan kematian alami	/Tahun
α	Laju perpindahan individu dari populasi S ke populasi I	/Tahun
β	Laju perpindahan individu dari S kedalam populasi P	/Tahun
γ	Laju perpindahan individu yang telah berhenti dari populasi I	/Tahun
δ	Laju perpindahan individu yang telah berhenti dari populasi P	/Tahun
k_1	Peluang individu menjadi professional tanpa kecanduan game online	-
k_2	Proporsi individu yang tidak lagi kecanduan game online	-



Gambar 1. Model Matematika SIPQ pada Kecanduan *Game Online*

Berdasarkan bentuk model diatas diperoleh suatu bentuk sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt}=\mu(N-S)-S\left(\frac{\alpha I}{N}+\frac{\beta P}{N}\right) \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt}=(1-k_1)S\left(\frac{\alpha I}{N}+\frac{\beta P}{N}\right)-(\mu+k_2)I \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dt}=k_1S\left(\frac{\alpha I}{N}+\frac{\beta P}{N}\right)+(1-\gamma)k_2I-(\mu+\delta)P \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{dt}=k_2\gamma I+\delta P-\mu Q \quad (4)$$

Untuk mempermudah analisis dilakukan pemisalan dimana:

$$a_1=1-k_1;\quad a_2=\mu+k_2;\quad a_3=1-\gamma;\quad a_4=\mu+\delta$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{dS}{dt}=\mu(N-S)-S\left(\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right) \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt}=a_1S\left(\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right)-a_2I \quad (6)$$

$$\frac{dP}{dt}=k_1S\left(\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right)+a_3k_2I-a_4P \quad (7)$$

$$\frac{dQ}{dt}=k_2\gamma I+\delta P-\mu Q \quad (8)$$

3.2 Analisis Model Matematika Kecanduan Game Online

Pada tahap ini akan dibuktikan bahwa populasi konstan, karena $\frac{dN}{dt}=\frac{dS}{dt}+\frac{dI}{dt}+\frac{dP}{dt}+\frac{dQ}{dt}$, maka:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \left(\mu(N-S)-S\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right)+\left((1-k_1)S\frac{\alpha I+\beta P}{N}-(k_2+\mu)I\right)\\ &\quad+\left(k_1S\frac{\alpha I+\beta P}{N}+(1-\gamma)k_2I-(\delta+\mu)P\right)+(\gamma k_2I+\delta P-\mu Q)\\ &= \mu N-(\mu S+\mu I+\mu P+\mu Q)\\ &= 0\end{aligned}$$

Dapat kita lihat bahwa $\frac{dN}{dt} = 0$ sehingga dapat katakan bahwa populasi pada model kecanduan game online ini adalah konstan. Jumlah populasi manusia dalam jangka waktu yang panjang menuju kapasitas batas yaitu 0. Sehingga daerah solusi model didefinisikan yaitu:

$$\Omega = \{(S, I, P, Q) \in R_+^4 | S + I + P + Q \leq N\}$$

a. Titik Kesetimbangan Model Matematika Kecanduan Game Online

Titik tetap atau titik kesetimbangan merupakan suatu kondisi dimana perubahan jumlah sub-populasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Berdasarkan model matematika kecanduan game onnline akan setimbang apabila $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0, dan\ \frac{dQ}{dt} = 0$, sehingga diperoleh persamaan (5), (6), (7), dan (8) menjadi:

$$\mu(N - S) - S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right) = 0 \tag{9}$$

$$S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right) - a_2 I = 0 \tag{10}$$

$$k_1 S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right) + a_3 k_2 I - a_4 P = 0 \tag{11}$$

$$k_2 \gamma I + \delta P - \mu Q = 0 \tag{12}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dengan menggunakan *software* Maple 18 diperoleh dua titik kesetimbangan model matematika kecanduan *game online* yaitu sebagai berikut:

1. Titik kestimbangan E_0 dari model matematika kecanduan *game online*

Titik kesetimbangan E_0 adalah suatu kondisi dimana tidak ada lagi individu yang kecanduan *game online* maupun individu yang menjadi professional dalam bermain *game online*. Dari *software* Maple 18 diperoleh titik kesetimbangan E_0 dari kecanduan *game online* yaitu $E_0 = (S, 0,0,0)$ Dimana dari persamaan (9) ketika $I = 0\ dan\ P = 0$ maka diperoleh:

$$\mu(N - S) - S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right) = 0$$
$$\mu(N - S) = 0$$
$$S = N$$

Jadi diperoleh $S = N$ sehingga titik kesetimbangan adalah $E_0 = (S, 0,0,0)$. Sebelum menentukan titik tetap E_1 perlu diketahui bahwa titik kesetimbangan eksis (ada) ketika $R_0 > 1$. Maka perlu di cari terlebih dahulu nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata banyaknya kecanduan dari banyaknya individu yang mengalami kecanduan. Bilangan reproduksi dasar akan diperoleh menggunakan *matriks next generation (MNG)* dari sistem persamaan.

Misalkan $x = (I, P, Q, S)^T$, dapat dituliskan

$$\frac{dx}{dt} = \mathscr{F}(x) - \mathcal{V}(x)$$

Dimana :

$$\mathcal{F}(x) = \begin{bmatrix} a_1 S \frac{\alpha I + \beta P}{N} \\ k_1 S \frac{\alpha I + \beta P}{N} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{V}(x) = \begin{bmatrix} a_2 I \\ a_4 P - a_3 k_2 I \\ \mu Q - \gamma k_2 I - \delta P \\ \mu(S - N) + S\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right) \end{bmatrix};$$

Kemudian dicari nilai jacobi dari matriks F dan V sehingga diperoleh:

$$J(F_{E_0})=\begin{bmatrix} a_1\alpha & a_1\beta & 0 & 0 \\ k_1\alpha I & k_1\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ J(V_{E_0})=\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3k_2 & a_4 & 0 & 0 \\ -\gamma k_2 & -\delta & \mu & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan OBE diperoleh matriks $(J(V_{E_0}))^{-1})$ yaitu:

$$(J(V_{E_0}))^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_3k_2}{a_2a_4} & \frac{1}{a_4} & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{\mu}\left(\frac{a_3k_2}{a_2a_4}+\frac{\gamma k_2}{\delta a_2}\right) & \frac{\delta}{\mu a_4} & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -\frac{\beta}{\mu}\left(\frac{a_3k_2}{a_2a_4}+\frac{\alpha}{\beta a_2}\right) & -\frac{\beta}{\mu a_4} & 0 & -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix}$$

Untuk mecari nilai eigen dari matriks F dan V dicari nilai dari matriks K, diperoleh:

$$\mathrm{K}=\mathrm{J}(\mathrm{F}_{\mathrm{E}_0})(J(V_{E_0}))^{-1}$$

$$K=\begin{bmatrix} \frac{a_1\alpha}{a_2}+\frac{a_1\beta a_3k_2}{a_2a_4} & \frac{a_1\beta}{a_4} & 0 & 0 \\ \frac{k_1\alpha}{a_2}+\frac{k_1\beta a_3k_2}{a_2a_4} & \frac{k_1\beta}{a_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$|\lambda I-K|=0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda-\left(\frac{a_1\alpha}{a_2}+\frac{a_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}\right) & \frac{-a_1\beta}{a_4} & 0 & 0 \\ -\left(\frac{k_1\alpha}{a_2}+\frac{k_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}\right) & \lambda-\left(\frac{k_1\beta}{a_4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\left(\lambda-\frac{a_1\alpha}{a_2}-\frac{a_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}\right)\left(\lambda-\frac{k_1\beta}{a_4}\right)\lambda^2-\left(\frac{a_1\beta}{a_4}\right)\left(\frac{k_1\alpha}{a_2}+\frac{k_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}\right)\lambda^2=0$$

Maka diperoleh nilai eigennya yaitu :

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

$$\lambda_4=\frac{a_2k_1\beta+a_1a_4\alpha+a_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}$$

$$R_0=\rho(FV^{-1})$$

Dimana ρ merupakan radius spektral atau nilai eigen terbesar dari (FV^{-1}), nilai $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ dan $\lambda_4=\frac{a_2k_1\beta+a_1a_4\alpha+a_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}$. Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar dari model matematika kecanduan *game online* yaitu:

$$R_0=\frac{a_2k_1\beta+a_1a_4\alpha+a_1\beta a_3k_2}{a_2a_4}$$

atau

$$R_0=\frac{(k_2+\mu)k_1\beta+(1-k_1)(\delta+\mu)\alpha+(1-k_1)\beta(1-\gamma)k_2}{(k_2+\mu)(\delta+\mu)}$$

2. Titik kesetimbangan E_1 dari model matematika kecanduan *game online*

Titik kesetimbangan E_I pada model kecanduan *game online* ini adalah suatu kondisi dimana populasi individu yang mengalami kecanduan semakin meningkat. Sehingga dapat dituliskan $S > 0, I > 0, P > 0, dan\ Q > 0$. Misalkan $S = S^*, I = I^*, P = P^*, dan\ Q = Q^*$. Dari persamaan (9) diperoleh:

$$S = \frac{\mu(N-S)N}{\alpha I + \beta P} \tag{13}$$

Substitusikan persamaan (13) kedalam persamaan (10) maka diperoleh:

$$I = \frac{a_1\mu(N-S)}{a_2} \tag{14}$$

Substitusikan persamaan (13) dan persamaan (14) kedalam persamaan (11), sehingga diperoleh:

$$P = \mu(N-S)\left(\frac{k_1}{a_4} + \frac{a_1a_3}{a_2a_4}k_2\right) \tag{15}$$

Kemudian substitusikan persamaan (14) dan (15) kedalam persamaan (13), sehingga diperoleh:

$$S^* = \frac{N}{R_0} \tag{16}$$

Lalu substitusikan persamaan (16) kedalam persamaan (14), sehingga diperoleh:

$$I^* = \frac{a_1}{a_2}\mu N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \tag{17}$$

Subsitusikan persamaan (16) ke persamaan (15), maka:

$$P^* = \left(\frac{k_1a_2 + a_1a_3k_2}{a_1a_4}\right)\frac{a_1}{a_2}\mu N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \tag{18}$$

Kemudian subsitusikan pula persamaan (16), (17) dan (18) kedalam persamaan (12), sehingga diperoleh:

$$Q^* = \left(\frac{\gamma k_2a_1a_4 + \delta k_1a_2 + a_1a_3\delta k_2}{\mu a_1a_4}\right)\frac{a_1}{a_2}\mu N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \tag{19}$$

Sehingga diperoleh titik endemik model kecanduan *game online* yaitu

$$S^* = \frac{N}{R_0}$$

$$I^* = \frac{(1-k_1)}{(k_2+\mu)}\mu N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

$$P^* = \left(\frac{k_1(\mu+k_2) + (1-k_1)(1-\gamma)k_2}{(1-k_1)(\mu+\delta)}\right)\frac{(1-k_1)}{(k_2+\mu)}\mu N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

$$Q^* = \left(\frac{\gamma k_2(\mu+\delta)(1-k_1) + \delta k_1(k_2+\mu) + \delta k_2(1-k_1)(1-\gamma)}{\mu(\mu+\delta)(1-k_1)}\right)\frac{(1-k_1)}{(k_2+\mu)}\mu N\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

3.3 Kestabilan Model Matematika Kecanduan Game Online

Analisis kestabilan dapat ditentukan dengan cara mencari nilai eigen dan matriks jacobi dari persamaan (5), (6), (7) dan (8).

Dimana $X = (I, P, Q, S)^T$, maka:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)_I}{\partial X_I} & \frac{\partial f(X)_I}{\partial X_P} & \frac{\partial f(X)_I}{\partial X_Q} & \frac{\partial f(X)_I}{\partial X_S} \\ \frac{\partial f(X)_P}{\partial X_I} & \frac{\partial f(X)_P}{\partial X_P} & \frac{\partial f(X)_P}{\partial X_Q} & \frac{\partial f(X)_P}{\partial X_S} \\ \frac{\partial f(X)_Q}{\partial X_I} & \frac{\partial f(X)_Q}{\partial X_P} & \frac{\partial f(X)_Q}{\partial X_Q} & \frac{\partial f(X)_Q}{\partial X_S} \\ \frac{\partial f(X)_S}{\partial X_I} & \frac{\partial f(X)_S}{\partial X_P} & \frac{\partial f(X)_S}{\partial X_Q} & \frac{\partial f(X)_S}{\partial X_S} \end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix} a_1S\frac{\alpha}{N}-a_2 & a_1S\frac{\beta}{N} & 0 & 0\\ k_1S\frac{\alpha}{N}+a_3k_2 & k_1S\frac{\beta}{N}-a_4 & 0 & 0\\ \gamma k_2 & \delta & -\mu & 0\\ -\frac{S\alpha}{N} & -\frac{S\beta}{N} & 0 & -\mu-\left(\frac{\alpha I+\beta P}{N}\right)\end{bmatrix}$$

Karena terdapat dua jenis titik kesetimbangan, maka analisis dilakukan terhadap dua titik kesetimbangan tersebut.

a. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_0 Dari Model Matematika Kecanduan *Game Online*

Untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan bebas kecanduan *game online* maka dibutuhkan nilai eigen. Titik kesetimbngan dapat dikatakan stabil jika semua nilai eigen dari matriks jacobi titik kestabilan bebas kecanduan bernilai negatif. Titik kesetimbangan bebas kecanduan *game online* yaitu $E_0=(S,0,0,0)$. Dimana titik tetap E_0 adalah stabil asimtotik lokal jika $R_0<1$ maka matriks jacobi dari E_0 adalah

$$J(E_0)=\begin{bmatrix} a_1\alpha-a_2 & a_1\beta & 0 & 0\\ k_1\alpha+a_3k_2 & k_1\beta-a_4 & 0 & 0\\ \gamma k_2 & \delta & -\mu & 0\\ -\alpha & -\beta & 0 & -\mu\end{bmatrix}$$

Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks jacobi maka berlaku:
Det $(\lambda I-J(E_0))=0\ atau\ |\lambda I-J(E_0)|=0$, maka

$$\begin{bmatrix} \lambda-(a_1\alpha-a_2) & -a_1\beta & 0 & 0\\ -(k_1\alpha+a_3k_2) & \lambda-(k_1\beta-a_4) & 0 & 0\\ -\gamma k_2 & -\delta & \lambda+\mu & 0\\ \alpha & \beta & 0 & \lambda+\mu\end{bmatrix}=0$$

$$(\lambda-(a_1\alpha-a_2))\begin{bmatrix} \lambda-(k_1\beta-a_4) & 0 & 0\\ -\delta & \lambda+\mu & 0\\ \beta & 0 & \lambda+\mu\end{bmatrix}(\lambda-(k_1\beta-a_4))\begin{bmatrix} \lambda+\mu & 0\\ 0 & \lambda+\mu\end{bmatrix}=0$$

$$(\lambda-(a_1\alpha+a_2))(\lambda-(k_1\beta-a_4)(\lambda+\mu)(\lambda+\mu)=0$$

$\lambda-(a_1\alpha+a_2)=0$ karena $-a_1\alpha-a_2>0$ maka $\lambda_1<0$
$\lambda-(k_1\beta-a_4)=0$ karena $a_4-k_1\beta>0$ maka $\lambda_2<0$
$(\lambda+\mu)=0$, karena $\mu>0$ maka $\lambda_3<0$
$(\lambda+\mu)=0$, karena $\mu>0$ maka $\lambda_4<0$
Karena semua nilai eigen bernilai negatif maka model kecanduan game online pada titik kesetimbangan E_0 adalah stabil asimtotis

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan E_1 Dari Model Matematika Kecanduan Game Online

Titik tetap kesetimbangan dikatakan stabil jika semua nilai eigen dari matriks jacobi titik kesetimbangan endemik bernilai negatif. Titik kesetimbangan endemik dari model matematika kecanduan game online yaitu $E_1=(S^*,I^*,P^*,Q^*)$. Untuk mempermudah analisis maka misalkan:

$$b_1=a_1S^*\frac{\alpha}{N}-a_2;\qquad b_2=a_1S^*\frac{\beta}{N}\qquad b_3=k_1S^*\frac{\alpha}{N}+a_3k_2;$$
$$b_4=k_1S^*\frac{\beta}{N}-a_4;\qquad b_5=S^*\frac{\alpha}{N};\qquad b_6=S^*\frac{\beta}{N}$$
$$b_7=-\mu-\left(\frac{\alpha I^*+\beta P^*}{N}\right)$$

Sehingga diperoleh:

$$J(E_1)=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ \gamma k_2 & \delta & -\mu & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 & b_7 \end{bmatrix}$$

Karena λ merupakan nilai eigen dari matriks jacobi, maka:
Det $(\lambda I - J(E_1)) = 0$ atau $|\lambda I - J(E_1)| = 0$, sehingga diperoleh

$$|\lambda I - J(E_1)| = \begin{bmatrix} \lambda - b_1 & -b_2 & 0 & 0 \\ -b_3 & \lambda - b_4 & 0 & 0 \\ -\gamma k_2 & \delta & \lambda+\mu & 0 \\ b_5 & b_6 & 0 & \lambda - b_7 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - b_1)\begin{bmatrix} \lambda - b_4 & 0 & 0 \\ \delta & \lambda+\mu & 0 \\ b_6 & 0 & \lambda - b_1 \end{bmatrix}(\lambda - b_4)\begin{bmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ 0 & \lambda - b_1 \end{bmatrix}(\lambda+\mu)(\lambda - b_1) = 0$$

$$(\lambda - b_1)(\lambda - b_4)(\lambda + \mu)(\lambda - b_7) = 0$$

Maka diperoleh:

$(\lambda - b_1) = 0$ berarti, $\left(\lambda - \left(a_1 S^* \frac{\alpha}{N} - a_2\right)\right) = 0$ karena $a_2 - a_1 S^* \frac{\alpha}{N} > 0$ maka $\lambda_1 < 0$
$(\lambda - b_4) = 0$ berarti, $\left(\lambda - \left(k_1 S^* \frac{\beta}{N} - a_4\right)\right) = 0$ karena $a_4 - k_1 S^* \frac{\beta}{N} > 0$ maka $\lambda_2 < 0$
$(\lambda + \mu) = 0$ karena $\mu > 0$ maka $\lambda_3 < 0$
$(\lambda - b_7) = 0$ berarti λ—$\mu - \left(\frac{\alpha I^* + \beta P^*}{N}\right) = 0$, karena $\mu + \left(\frac{\alpha I^* + \beta P^*}{N}\right) > 0$, maka $\lambda_4 < 0$

karena $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0$ maka titik kesetimbangan E_1 adalah stabil asimtotik.

3.4 Kontrol Optimal

Tujuan utama dari kontrol optimal model matematika kecanduan game online adalah untuk meminimumkan jumlah individu yang kecanduan game online dengan diberikannya dua variabel tindakan kontrol yaitu $k_1(t)\ dan\ k_2(t)$

Dimana variabel kontrol $k_1(t)$ digunakan untuk membatasi (mengontrol) kontak antara proporsi individu *Susceptible* dengan individu populasi *Infected* dengan menggunakan propaganda dan pemberian edukasi. variabel kontrol $k_2(t)$ digunakan untuk membatasi (mengontrol) perpindahan individu *Infected* ke kompartemen lain dan diharapkan semakin sedikit individu yang terinfeksi akan semakin baik.

Masalah kontrol optimal model matematika kecanduan *game online* untuk meminimumkan fungsi tujuannya yaitu:

$$J(k_1, k_2) = min \int_0^{tf} \left[I(t) + \frac{c_1}{2} {k_1}^2(t) + \frac{c_2}{2} {k_2}^2(t) \right] dt$$

Dengan

$$J({k_1}^*, {k_2}^*) = \min J(k_1, k_2), \quad k_1(t), k_2(t) \in K$$

Dimana kondisi awalnya yaitu $S(0) = S_0, I(0) = I_0, P(0) = P_0, Q(0) = Q_0, k_i(t) \in (0,1), \forall t \in [0, tf]$ $i = 1,2$. c_i adalah faktor bobot (konstanta positive) yang menyesuaikan intensitas kedua kontrol yang berbeda.

Kemudian akan dicari nilai hamilltonian sebagai berikut:

$$\mathcal{H} = I(t) + \frac{c_1}{2}k_1{}^2(t) + \frac{c_2}{2}k_2{}^2(t) + \lambda_1\left\{\mu(N-S) - S\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right)\right\}$$
$$+ \lambda_2\left\{(1-k_1)S\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right) - (\mu + k_2)I\right\}$$
$$+ \lambda_3\left\{k_1 S\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right) + (1-\gamma)k_2 I - (\mu+\delta)P\right\} + \lambda_4\{k_2\gamma I + \delta P - \mu Q\}$$

Untuk menentukan persamaan state dan costate yang optimal maka dilakukan turunan terhadap fungsi Hamiltonian, diperoleh persamaan statenya yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \mu(N-S) - S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right)$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = (1-k_1)S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right) - (\mu + k_2)I$$
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = k_1 S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right) + (1-\gamma)k_2 I - (\mu+\delta)P$$
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = k_2\gamma I + \delta P - \mu Q$$

Dengan kondisi awal $S(0) = S_0, I(0) = I_0, P(0) = P_0, Q(0) = Q_0$. Kemudian diperoleh pula persamaan co-state yaitu:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = \lambda_1\mu + \lambda_1\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right) - \lambda_2(1-k_1)\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right) - \lambda_3 k_1\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right)$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = -1 + \lambda_1 S\frac{\alpha}{N} - \lambda_2(1-k_1)S\frac{\alpha}{N} + \lambda_2(k_2+\mu) - \lambda_3 k_1 S\frac{\alpha}{N} - \lambda_3(1-\gamma)k_2 - \lambda_4 k_2\gamma$$
$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial P} = \lambda_1 S\frac{\beta}{N} - \lambda_2(1-k_1)S\frac{\beta}{N} - \lambda_3 k_1 S\frac{\beta}{N} + \lambda_3(\delta+\mu) - \lambda_{4\delta}$$
$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = \mu\lambda_4$$

Dimana kondisi awal $\lambda_1(tf) = \lambda_2(tf) = \lambda_3(tf) = \lambda_4(tf) = 0$. Kemudian dicari kondisi stasionernya, Untuk variabel kontrol k_1 yaitu:

$$\frac{\partial H}{\partial k_1} = 0$$
$$k_1{}^* = \frac{1}{c_1}(\lambda_2 - \lambda_3)S\left(\frac{\alpha I}{N} + \frac{\beta P}{N}\right)$$

Untuk variabel kontrol k_2,

$$\frac{\partial H}{\partial k_2} = 0$$
$$k_2{}^* = \frac{1}{c_2}((\lambda_2 - \lambda_3)I + (\lambda_3 - \lambda_4)\gamma I)$$

Karena $0 \le k_2 \le 1$ dan $0 \le k_2 \le 1$ maka nilai kontrol optimalnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$k_1 = \begin{cases} 1, & k_1{}^* \ge 1 \\ k_1{}^*, & 0 < k_1{}^* < 1, \\ 0, & k_1{}^* \le 0 \end{cases} \text{dan } k_2 = \begin{cases} 1, & k_2{}^* \ge 1 \\ k_2{}^*, & 0 < k_2{}^* < 1 \\ 0, & k_2{}^* \le 0 \end{cases}$$

Sehingga dapat pula dituliskan dalam bentuk

$$k_1{}^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_1}(\lambda_2 - \lambda_3)S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right)\right)\right\}$$
$$k_2{}^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_2}\left((\lambda_2 - \lambda_3)I + (\lambda_3 - \lambda_4)\gamma I\right)\right)\right\}$$

4. KESIMPULAN

1. Semua nilai eigen dari masing-masing titik kestimbangan model matematika kecanduan game online kecil dari nol maka model stabil asimtotik pada dua jenis titik kesetimbangan $E_0 dan\ E_1$dan kecanduan *game online* dapat teratasi dimasa yang akan datang.
2. Kontrol optimal model matematika kecanduan game online menggunakan prinsip maksimum pontriyagin dengan dua variabel kontrol k_1 dan k_2 yaitu:

$$k_1{}^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_1}(\lambda_2 - \lambda_3)S\left(\frac{\alpha I + \beta P}{N}\right)\right)\right\}$$

$$k_2{}^* = min\left\{1, maks\left(0, \frac{1}{c_2}((\lambda_2 - \lambda_3)I + (\lambda_3 - \lambda_4)\gamma I)\right)\right\}$$

REFERENSI

[1] Ramadhan.B, (2020). https://teknoia.com/data-pengguna-internet-dunia-ac03abc7476
[2] Rizal.A, (2021).https://infokomputer.grid.id/read/122572616/rata-rata-orang-indonesia-habiskan-3-jam-untuk-main-media-sosial
[3] Nurhadi, J., Rahma, R., & Fadlilah, A. (2019). Multimedia Based on Virtual Reality in Indonesian for Foreign Speakers Learning. Journal of Physics: Conference Series, 1179
[4] Anwar, A., Syam, R., Pratama, M. I., & Side, S. (2021, June). SEIRS model analysis for online game addiction problem of mathematics students. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1918, No. 4, p. 042024). IOP Publishing
[5] Li, T., & Guo, Y. (2019). Stability and optimal control in a mathematical model of online game addiction. *Filomat*, *33*(17), 5691-5711
[6] Rosha, Media. 2013. Pemodelan Matematika. Padang: UNP.
[7] Side, S., Sanusi, W., & Rustan, N. K. (2020). Model Matematika SIR Sebagai Solusi Kecanduan Penggunaan Media Sosial. *JMathCos (Journal of Mathematics, Computations, and Statistics)*, *3*(2), 126-138.