Menentukan Akar-Akar Polinomial dengan Metode Bairstow

Iges Windra[#1], Minora Longgom Nasution[#2] , Meira Parma Dewi[#3]

[1]*Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[2,3] *Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

Igeswindra@gmail.com

Abstract--search high degree of real roots of polynomial (of degree more than 3) is very difficult to do analytically, so that numerical methods are needed to search their roots, one of the numerical methods that are fast and can be used efisein search is polynomial roots with Bairstow method. This study discusses how to determine the roots of the polynomial with Bairstow method. The result is a step-by-step search high degree polynomial roots.

Keywords: Polynomial, Numerical Methods, Bairstow method.

Abstrak ---pencarian akar Polinomial real berderajat tinggi (berderajat lebih dari 3) sangat sulit dilakukan secara analitik, sehingga dibutuhkan metode numerik untuk pencarian akarnya, salah satu metode numerik yang secara cepat dan efisein bisa digunakan pencarian akar polinomial adalah dengan metode Bairstow. Penelitian ini membahas cara menentukan akar-akar Polinomial dengan metode Bairstow. Hasil penelitian ini adalah berupa langkah-langkah pencarian akar polinomial berderajat tinggi.

Kata Kunci:Polinomial, Metode numeric, Metode Bairstow.

PENDAHULUAN

Polinomial yang berbentuk $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dengan $n \geq 0$ dan $a_i \in R$mempunyai peran yang penting dalam matematika diantaranya dalam teori fungsi dan teori bilangan sehingga dibutuhkan satu metode untuk bisa menemukan seluruh akarnya baik akar kompleks maupun akar riil.Untuk polinomial yang berbentuk kuadrat atau yang berderajat tiga bisa dilakukan dengan cara analitik tapi jika polinomial yang berderajat lebih dari 3 sangat sulit dicari dengan cara analitik. Oleh karena itu dibutuhkan metode lain salah satu metode yang bisadigunakan adalah dengan metode Bairstow. Pada dasarnya Metode Bairstow hanya mencari faktor kuadrat dari polinomial, dari faktor kuadrat polinomial [3] tersebut dapat ditentukan dua akar sekaligus, baik akar real maupun akar kompleks dari polinomial. Metode ini tidak memerlukan evaluasi turunan fungsinya sehingga sangat mudah digunakan dalam pencarian akar polinomial. Oleh karena itu penulis tertarik untuk mengangkat permasalahan pencarian akar-akar polinomial dengan metode Bairstow.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian yang bersifat teoritis. Metode yang digunakan adalah dengan menganalisa teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas pada studi kepustakaan. Dalam penelitian ini dimulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan teori-teori yang berhubungan dengan masalah penentuan faktor kuadrat kemudian mengaitkan dengan permasalahan yang diteliti.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Metode Bairstow

Metode Bairstow adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikanpersamaan polinomial tingkat n $p_{n(}(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$

Metode Bairstow pada dasarnya hanya mencari faktor dari polinomial baik faktor linear maupun faktor kuadrat. Ide dasar dari algoritma ini adalah bahwa setiap polinomial dapat dibagi oleh pembagi linear atau pembagi kuadrat [4] tapi disini hanya digunakan pembagi kuadrat saja.

Misalkan $p_{n(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ adalah polinomial berderajat n dan $x^2 - ux - v$ adalah pembagi kuadrat dari $p_{n(x)}$ sehingga dapat diekpresikan sebagi berikut

$$p_n(x) = (x^2 - ux - v)q_{n-2}(x) + b_1(x - u) + b_0 \quad (1.1)$$

dimana $q_{n-2}(x)$ adalah polinomial yang telah terdeflasi dengan persamaan $q_n(x) = b_nx^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + b_{n-2}x^{c-3} + \cdots + b_3x + b_2$ dan $b_1(x-u) + b_0$ adalah suku sisa dari pembagian tersebut. Apabila suku sisa tersebut bernilai nol maka $x^2 - ux - v$ merupakan faktor kuadrat dari $p_{n(x)}$. Karena $p_{n(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $q_{n-2}(x) = \sum_{i=2}^{n} b_i x^{i-2}$ maka bentuk persamaan (1.1) diatas dirubah menjadi:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= (x^2 - ux - v)q_{n-2}(x) + b_1(x-u) + b_0 \\
&= [x^2(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + b_{n-2}x^{n-4} + \cdots + b_3 x + b_2) \\
&\qquad - ux(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + b_{n-2}x^{n-4} + \cdots + b_3 x + b_2) - v(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} \\
&\qquad + b_{n-2}x^{n-4} + \cdots + b_3 x + b_2)] + b_1(x-u) + b_0 \\
&= [(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^2 + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2) \\
&\qquad - u(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + b_{n-2}x^{n-3} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x) \\
&\qquad - v(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + b_{n-2}x^{n-4} + \cdots + b_3 x + b_2)] + b_1(x-u) + b_0 \\
&= [(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^2 + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \\
&\qquad - u(b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + b_{n-2}x^{n-3} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1) - v(b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} \\
&\qquad + b_{n-2}x^{n-4} + \cdots + b_3 x + b_2)]
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien x persamaan (1,1) dengan persamaan (1.2) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
&a_n = b_n \\
&a_{n-1} = b_{n-1} - ub_n \\
&a_{n-2} = b_{n-2} - ub_{n-1} - vb_n \\
&a_{n-3} = b_{n-3} - ub_{n-2} - vb_{n-1} \\
&\vdots \\
&a_i = b_i - ub_{i+1} - vb_{i+2}, \text{ dimana } i = n-2, n-3, \ldots, 0
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Karena polinomial terdeflasi $q_n(x)$ merupkan polinomial yang koefisien-koefisiennya adalah b_i maka dari persamaan (1.3) ditentukan koefisien b_i yaitu

$$
\begin{aligned}
&b_n = a_n \\
&b_{n-1} = a_{n-1} + ub_n \\
&b_{n-2} = a_{n-2} + ub_{n-1} + vb_n \\
&b_{n-3} = a_{n-3} + ub_{n-2} + vb_{n-1} \\
&\vdots \\
&b_i = a_i + ub_{i+1} + vb_{i+2} \text{ dimana } i = n-2, n-3, \ldots, 0
\end{aligned}
$$

Untuk $i = 1\ dan\ i = 0$ diperoleh persamaan

$$
\begin{aligned}
&b_1 = a_1 + ub_2 + vb_3 \\
&b_0 = a_0 + ub_1 + vb_2
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Pada persamaan (1.4), tampak bahwa b_1 dan b_0 tergantung pada u dan v. Oleh karena itu, dalam menentukan faktor kuadrat, secara implisit tergantung pada pemilihan $u = u^*$ dan $v = v^* \ni b_1 = b_0 = 0$. Misalkan selisih u dengan u^* adalah Δu dan selisih v dengan v^* adalah Δv maka fungsi dari b_1 dan b_0 dapat diperluas dengan deret Taylor untuk dua variabel [1] sebagai berikut:

$$b_1(u^*, v^*) = b_1(u, v) + \frac{\partial b_1}{\partial u}(u^* - u) + \frac{\partial b_1}{\partial v}(v^* - v) + \cdots$$

$$b_0(u^*, v^*) = b_0(u, v) + \frac{\partial b_0}{\partial u}(u^* - u) + \frac{\partial b_0}{\partial v}(v^* - v) + \cdots$$

diasumsikan pemilihan $u^*\ dan\ v*$ sangat dekat dengan u dan v sehingga selisih $u^* - u$ dan $v^* - v$ sangat kecil sekali sehingga orde deret taylor untuk fungsi $b_1(u^*, v^*)$ dan $b_0(u^*, v^*)$ yang lebih dari satu dapat diabaikan.

$$b_1(u^*, v^*) \approx b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v}\Delta v$$

$$b_0(u^*, v^*) \approx b_0 + \frac{\partial b_0}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v}\Delta v$$

Apabila $u = u^*$ dan $v = v^*$ maka berlaku

$$b_1(u^*, v^*) = 0 = b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v}\Delta v$$

$$b_0(u^*, v^*) = 0 = b_0 + \frac{\partial b_0}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v}\Delta v$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$-b_1 = \frac{\partial b_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v}\Delta v$$
$$-b_0 = \frac{\partial b_0}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial b_0}{\partial v}\Delta v \qquad (1.5)$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas diperlukan turunan parsial b_0 dan b_1 yang masing-masing merupakan fungsi dari u dan v. Turunan parsial ini dapat diperoleh setelah dilakukan pembagian sintetik kedua terhadap $p_n(x)$ dengan faktor $x^2 - ux - v$ yang berarti mencari hubungan b_i dengan c_i sama seperti mendapatkan b_i dari a_i.

Jika $q_n(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + b_{n-2}x^{n-4} + \cdots + b_3 x + b_2$ adalah hasil pembagian sintetik pertama dari $p_n(x)$ maka untuk mencari hasil pembagian kedua dari $p_n(x)$ adalah dengan membagi $q_n(x)$ dengan faktor $x^2 - ux - v$. Misalkan $z_n(x)$ adalah hasil pembagian sintetik kedua dengan sisa $c_1(x-u) + c_0$ maka:

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= (x^2 - ux - v)z_n(x) + c_1(x-u) + c_0 \\
&= [x^2(c_n x^{n-4} + c_{n-1}x^{n-5} + c_{n-2}x^{n-6} + \cdots + c_3 x + c_2) \\
&\quad -ux(c_n x^{n-4} + c_{n-1}x^{n-5} + c_{n-2}x^{n-6} + \cdots + c_3 x + c_2) \\
&\quad -v(c_n x^{n-4} + c_{n-1}x^{n-5} + c_{n-2}x^{n-6} + \cdots + c_3 x + c_2)] + c_1(x-u) + c_0 \\
&= [(c_n x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} + c_{n-2}x^{n-4} + \cdots + c_3 x^3 + c_2 x^2) \\
&\quad - u(c_n x^{n-3} + c_{n-1}x^{n-4} + c_{n-2}x^{n-5} + \cdots + c_3 x^2 + c_2 x) \\
&\quad - v(c_n x^{n-4} + c_{n-1}x^{n-5} + c_{n-2}x^{n-6} + \cdots + c_3 x + c_2)] + c_1(x-u) + c_0 \\
&= [(c_n x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-3} + c_{n-2}x^{n-4} + \cdots + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0) \\
&\quad - u(c_n x^{n-3} + c_{n-1}x^{n-4} + c_{n-2}x^{n-5} + \cdots + c_3 x^2 + c_2 x + c_1) - v(c_n x^{n-4} + c_{n-1}x^{n-5} \\
&\quad + c_{n-2}x^{n-6} + \cdots + c_3 x + c_2)]
\end{aligned}$$

dengan menyamakan koefisien-koefisien x pada kedua ruas persamaan di atas didapatkan hubungan korelasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_n &= b_n \\
c_{n-1} &= b_{n-1} + uc_n \\
c_{n-2} &= b_{n-2} + uc_{n-1} + vc_n \\
c_{n-3} &= b_{n-3} + uc_{n-2} + vc_{n-1} \\
&\vdots \\
c_1 &= b_1 + uc_2 + vc_3
\end{aligned}$$

Sehingga bentuk umum dari persamaan di atas adalah:

$$\begin{aligned}
c_n &= b_n \\
c_i &= b_i + uc_{i+1} + vc_{i+2} \; untuk \; i = n-2, n-3, \ldots, 2, 1 \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Selanjutnya turunan parsial terhadap u dapat dicari dengan menggunakan persamaan (1.4) dan (1.6) diperoleh hasil:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_n}{\partial u} &= \frac{\partial a_n}{\partial u} = 0 \\
\frac{\partial b_{n-1}}{\partial u} &= u\frac{\partial b_n}{\partial u} + b_n = b_n = c_n \\
\frac{\partial b_{n-2}}{\partial u} &= u\frac{\partial b_{n-1}}{\partial u} + b_{n-1} = uc_n + b_{n-1} = c_{n-1} \\
\frac{\partial b_{n-3}}{\partial u} &= u\frac{\partial b_{n-2}}{\partial u} + b_{n-2} + v\frac{\partial b_{n-1}}{\partial u} = b_{n-2} + uc_{n-1} + vc_n = c_{n-2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial b_1}{\partial u} &= u\frac{\partial b_2}{\partial u} + b_2 + v\frac{\partial b_3}{\partial u} = b_2 + uc_3 + vc_4 = c_2 \\
\frac{\delta b_0}{\delta u} &= u\frac{\delta b_1}{\delta u} + b_1 + v\frac{\delta b_2}{\delta u} = b_1 + uc_2 + vc_3 = c_1 \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Untuk mencari turunan parsial terhadap v analog dengan pencarian turunan parsial terhadap u sehingga diperoleh

$$\frac{\partial b_n}{\partial v} = \frac{\partial a_n}{\partial v} = 0$$
$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial v} = u\frac{\partial b_n}{\partial v} = 0$$
$$\frac{\partial b_{n-2}}{\partial v} = u\frac{\partial b_{n-1}}{\partial v} + b_n + v\frac{\delta b_n}{\delta v} = b_n = c_n$$
$$\frac{\partial b_{n-3}}{\partial v} = u\frac{\partial b_{n-2}}{\partial v} + b_{n-1} + v\frac{\partial b_{n-1}}{\partial v} = b_{n-1} + uc_n = c_{n-1}$$
$$\frac{\delta b_{n-4}}{\delta v} = u\frac{\delta b_{n-3}}{\delta v} + b_{n-2} + v\frac{\delta b_{n-2}}{\delta v} = b_{n-2} + uc_{n-1} + vc_n = c_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial b_1}{\partial v} = u\frac{\partial b_2}{\partial v} + b_3 + v\frac{\partial b_3}{\partial v} = b_2 + uc_4 + vc_5 = c_3$$
$$\frac{\delta b_0}{\delta v} = u\frac{\delta b_1}{\delta v} + b_2 + v\frac{\delta b_2}{\delta v} = b_1 + uc_3 + vc_4 = c_2 \tag{1.8}$$

Dengan mensubsitusi persamaan (1.7) dan (1.8) ke persamaan (1.5) diperoleh:

$$-b_1 = c_2\Delta u + c_3\Delta v$$
$$-b_0 = c_1\Delta u + c_2\Delta v$$

bentuk diatas dapat dibuat dalam bentuk perkalian matrik berikut:

$$J\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}b_1\\ b_0\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Di mana $J = \begin{pmatrix}c_2 & c_3\\ c_1 & c_2\end{pmatrix}$.

Dari persamaan (1.9) dapat dicari Δu dan Δv dengan menggunakan aturan Cramer [2] sebagai berikut:

$$\Delta u = \frac{\begin{vmatrix}-b_1 & c_3\\ -b_0 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}} = \frac{(c_2)(-b_1)-(-b_0)(c_3)}{(c_2)(c_2)-(c_1)(c_3)}$$
$$\Delta v = \frac{\begin{vmatrix}-b_1 & c_2\\ -b_0 & c_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}} = \frac{(c_1)(-b_1)-(c_2)(-b_0)}{(c_2)(c_2)-(c_1)(c_3)} \tag{2.0}$$

Karena formula Δu dan Δv sudah diperoleh maka u* dan v* dapat diperbaharui dengan pengulangan terus-menerus sehingga $u^* \approx u$ dan $v^* \approx v$ atau dengan kata lain nilai u^* dan u^* semakin dekat dengan nilai $u\ dan\ v$

$$u = u^* + \Delta u$$
$$v = v^* + \Delta v$$

Proses pengulangan untuk menemukan u* dan v* dilakukan dengan iterasi terus menerus sehingga mendapatkan nilai yang mendekati nilai eksaknya, atau dengan bantuan komputer dibuat algoritmanya sehingga proses iterasi dapat dilakukan dengan cepat.

B. Penerapan Dalam Kasus.

Pencarian akar dengan metode Bairstow secara manual sangat tidak efisien sehingga, dibuatlah algoritma untuk Mathlab 7.10 selengkapnya lihat referensi [4]. Diberikan contoh yang diambil dari [4] yaitu:

$$f(x) = x^5 - 3{,}5x^4 + 2{,}75x^3 + 2{,}125x^2 - 3{,}875x + 1.25$$

Dengan tebakan awal u = -1 dan v = -1 dan $\varepsilon = 0.001$ akan ditentukan semua akarnya.

TABEL I

HASIL PERHITUNGAN PENCARIAN AKAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE BAIRSTOW

Iterasi (k)	Δu_k	Δv_k	u_k	v_k	εu_k	εv_k
1	0.35583	1.138109	−0.64417	0.138109	55.23%	824.065%
2	0.133057	0.33162	−0.5111	0.469734	26.03%	70.6%
3	0.011423	0.03047	−0.4999577	0.5002	2.28%	6.93%
4	−0.00031	−0.0002	−0.5	0.5	0.062%	0.004%

Pencarain akar dapat dihentikan pada itersai ke-4 dengan $u = -0.5$ dan $v = 0.5$ sehingga bentuk dari faktor kuadrat polinom ini adalah: $x^2 - 0.5x + 0.5$ Dengan demikian didapat akar $f(x)$

$$x_{1,2} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4.0.5}}{2} = 0.5\ dan - 1$$

Metode Bairstow menghasilkan pendekatan $x^2 - ux - v$ yang sangat akurat dengan estimasi eror 0.062% untuk u dan 0.004%untuk v, hal ini menunjukan metode Bairstow memiliki laju konvergensi yang sangat tinggi.

Untuk mencari akar selanjutnya akan ditentukan polinomial terdeflasi terlebih dahulu dengan membagi polinomial awal dengan faktor kuadra $x^2 - 0.5x + 0.5$ dengan hasil sebagai berikut:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5.25x - 2.5$$

Dengan tebakan awal $u = 0.5$ dan $v = -0.5$ dan $\varepsilon = 0.001$, maka pencarian akarnya dapat terlihat pada tabel 1 berikut

TABEL II
PENCARIAN AKAR POLINOMIAL DENGAN METODE BAIRSTOW

Iterasi (k)	Δu_k	Δv_k	u_k	v_k	εu_k	εv_k
1	2.232143	3.160714	1.7321	3.660714	128.86%	86.34%
2	−0.067	−5.0183	1.6652	−1.3576	4.022%	369.63%
3	0.2332	0.1517	1.8984	−1.2059	12.29%	12.58%
4	0.0942	−0.0353	1.992	−1.2412	4.73%	2.84%
5	0.0074	−0.0088	2.000	−1.2499	0.37%	0.7%
6	0	0.00008	2	−1.25	0%	0.0064%

Pencarain akar dapat dihentikan pada itersai ke-6 dengan $u = 2$ dan $v = -1.25$ sehingga bentuk dari faktor kuadrat polinom ini adalah: $x^2 - 2x + 1.25$ Dengan demikian didapat akar $f(x)$

$$x_{1,2} = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4v}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1.25)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

Untuk mencari akar selanjutnya akan ditentukan polinomial terdeflasi terlebih dahulu dengan membagi polinomial awal dengan faktor kuadrat:$x^2 - 2x + 1.25$, sehingga didapat polinomila terdeflasi: $f(x) = x - 2$. Karena polinomial terdeflasi adalah liniear maka akar dicari dengan rumus analitik biasa yaitu:$x - 2 = 0\ maka\ x = 2$. Jadi didapat akar dari polinomial

$$f(x) = x^5 - 3{,}5x^4 + 2{,}75x^3 + 2{,}125x^2 - 3{,}875x + 1.25$$

Sebagai berikut:

$$x_1 = 0.5$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1 + 0.5i$$
$$x_4 = 1 - 0.5i$$
$$x_5 = 2$$

SIMPULAN

Berdasarkan penurunan algoritma metode Bairstow dapat diperoleh kesimpulan:

1. Dalam menentukan faktor kuadrat dengan metode Bairstow, digunakan pembagian sintetik dengan pembagi kuadrat sehingga dapat ditentukan dua akar sekaligus baik akar real maupun kompleks.
2. Dalam menemukan akar polinomial dengan metode bairstow ada beberapa langkah yaitu:
   a. Menentukan tebakan awal dari variable $x^2 + ux + v$
   b. Menghitung nilai $b_n = a_n$
   c. Menghitung $b_{n-1} = a_{n-1} + ub_n$ *dan* $b_i = a_i + ub_{i+1} + vb_{i+2}$
   d. Menghitung nilai $c_n = b_n$
   e. Menghitung nilai $c_{n-1} = b_{n-1} + uc_n$ *dan* $c_i = b_i + uc_{i+1} + vc_{i+2}$
   f. Mencari Δu dan Δv dengan aturan Cramer sebagai berikut:

$$\Delta u = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & c_3 \\ -b_0 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{(c_2)(-b_1) - (-b_0)(c_3)}{(c_2)(c_2) - (c_1)(c_3)}$$

$$\Delta v = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & c_2 \\ -b_0 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{(c_1)(-b_1) - (c_2)(-b_0)}{(c_2)(c_2) - (c_1)(c_3)}$$

g. Mencari nilai u dan v yang terbaru dengan persamaan

$u_{baru} = u^* + \Delta u$

$v_{baru} = v^* + \Delta v$

h. Melakukan proses iterasi dengan mengulang langkah kedua dan ketiga sampai memenuhi kriteria penghentian.

i. Mencari akar-akar persamaan polinomial dengan bantuan rumus kuadratis.

j. Menentukan polinomial yang telah terdeflasi, dengan beberapa kemungkinan yaitu:

   a. Jika polinomial yang telah terdeflasi berderajat satu atau dua maka dapat dicari akarnya dengan rumus analitik.

   b. Jika polinomial yang telah terdeflasi berderajat lebih dari 2 maka dilanjutkan dengan pencarian akar dengan langkah metode Bairstow

REFERENSI

[1] Munir, R. 2003. *Metode Numerik.* Informatika : Banadung.

[2] Howard, Anton dan Chris, Rores. 2004. *Aljabar Linear Elementer*, Erelangga: Jakarta.

[3] http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/Bairstowmethod. Di akses 23 oktober 2011

[4] Windra, Iges. 2013. *Menentukan Akar-Akar Polinomial Dengan Metode Bairstow.* FMIPA UNP