Metode Runge-Kutta Merson untuk Solusi Persamaan Differensial Biasa

Hilman Aquarito[1], Muhammad Subhan [2], Minora Longgom Nst[3]

[1] *Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[2,3] *Lecturers of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[1]hilman.0673012@gmail.com

Abstract -- Runge-Kutta Merson method is a numerical method to find solutions of ordinary differential equations. This method is more efficient than Runge-Kutta method, because the results obtained by this method is more accurate than Runge-Kutta Method. This method was developed from Runge-Kutta method. Runge-Kutta Merson method obtained from Talyor series expansion.

Keyword -- Runge-Kutta Merson method, numerical method, ordinary differential equation, Runge-Kutta method,Talyor series expansion.

Abstrak – Metode Rang kutta Merson adalah sebuah metode numeric untuk menemukan solusi dari persamaan diferensial. Metode ini lebih efisien dari pada metode rang kutta, karena hasil yang diperoleh dari metode ini lebih akurat dibandingkan dengan metode rang-kutta. Metode ini pengembangan dari metode rang-kutta. Metode rang kutta merson diperoleh dari ekspansi deret taylor.

Keyword – Metode Rang-Kutta Merson, metode numeric, persamaan diferensial biasa, metode rang kutta, ekspansi deret taylor.

PENDAHULUAN

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dilakukan dengan metode analitik. Namun, sering terdapat kendala dalam menyelesaikan persamaan differensial tersebut. Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa ketika metode analitik sulit digunakan. Pada beberapa bentuk persamaan differensial, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan.

Salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu adalah metode Runge-Kutta Merson. Metode ini merupakan modifikasi dari metode Runge-Kutta orde-4. Metode ini mempunyai galat yang lebih kecil dari metode Runge-Kutta orde-4, sehingga metode ini lebih bagus dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde-4.

METODE

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar (teoritis), dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap permasalahan yang dibahas berdasarkan pada kajian kepustakaan.

Dalam meninjau permasalahan yang dihadapi, langkah kerja yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menelaah prinsip penurunan rumus metode Runge-Kutta Merson untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa orde satu.
2. Menyusun algoritma untuk pembuatan program komputer metode Runge-Kutta Merson untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa orde satu.
3. Membuat program komputer dari algoritma yang telah dibuat.
4. Menyimpulkan hasil dari penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Metode Runge-Kutta Merson Untuk Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Misalkan persamaan diferensial biasa

$$a_0(x)\frac{dy}{dx} + a_1(x)y = F(x),$$

dengan nilai awal

$$y(x_0) = c_0$$

Akan digunakan metode Runge-Kutta Merson untuk menemukan solusi dari persamaan diferensial tersebut.

Nilai y_{i+1} adalah nilai hampiran dari solusi saat $x_{i+1} = x_0 + (i+1)h$. Titik pertama dari metode Runge-Kutta Merson untuk solusi persamaan tersebut adalah:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \sum_{i=1}^{5} p_i k_i \qquad (1)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$
$$k_2 = hf\left(x_0 + \tfrac{1}{3}h, y_0 + \tfrac{1}{3}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \tfrac{1}{3}h, y_0 + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_3\right)$$
$$k_5 = hf\left(x_0 + h, y_0 + \tfrac{1}{3}k_1 - \tfrac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)$$

Dari persamaan di atas konstanta p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 dapat ditemukan dengan cara menyamakan koefisien-koefisien yang bersesuaian dengan uraian berikut ini:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}y^{IV}(x_0)$$

dimana:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

Sehingga

$$y''(x_0) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$
$$y''(x_0) = f_x + f_y f$$
$$y'''(x_0) = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2$$
$$y^{IV}(x_0) = f_{xxx} + 3f_{xxy}f + 3f_{xyy}f^2 + f_{yyy}f^3$$

Substitusikan nilai turunan-turunan dari persamaan di atas ke dalam persamaan (1), sehingga didapat:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h^2}{2}(f_x + f_x f) + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2\right) + \frac{h^4}{24}\left(f_{xxx} + 3f_{xxy}f + 3f_{xyy}f^2 + f_{yyy}f^3\right) \qquad (2)$$

Untuk nilai k_2, k_3, k_4, k_5 diperoleh sebagai berikut:

$$k_2 = hf + h^2\left(\tfrac{1}{3}f_x + \tfrac{1}{3}f_y f\right) + h^3\left(\tfrac{1}{18}f_{xx} + \tfrac{1}{9}f_{xy}f + \tfrac{1}{18}f_{yy}f^2\right) + h^4\left(\tfrac{1}{162}f_{xxx} + \tfrac{1}{54}f_{xxy}f + \tfrac{1}{54}f_{xyy}f^2 + \tfrac{1}{162}f_{yyy}f^3\right)$$

$$k_3 = hf + h^2\left(\tfrac{1}{3}f_x + \tfrac{1}{3}f_y f\right) + h^3\left(\tfrac{1}{18}f_{xx} + \tfrac{1}{18}f_y f_x + \tfrac{1}{18}{f_y}^2 f + \tfrac{1}{9}f_{xy}f + \tfrac{1}{18}f_{yy}f^2\right) + h^4\left(\tfrac{1}{162}f_{xxx} + \tfrac{1}{54}f_{xxy}f + \tfrac{1}{54}f_{xyy}f^2 + \tfrac{1}{162}f_{yyy}f^3 + \tfrac{1}{36}f_y f^2 f_{yy} + \tfrac{1}{54}f_{yy}f f_x + \tfrac{1}{108}f_y f_{xx} + \tfrac{1}{54}f_{xy}f_x + \tfrac{1}{24}f_y f_{xy}f\right)$$

$$k_4 = hf + h^2\left(\tfrac{1}{2}f_x + \tfrac{1}{2}f_y f\right) + h^3\left(\tfrac{1}{8}f_x f_y + \tfrac{1}{8}{f_y}^2 f + \tfrac{1}{8}f_{xx} + \tfrac{1}{4}f_{xy}f + \tfrac{1}{8}f_{yy}f^2\right) + h^4\left(\tfrac{1}{48}f_{xxx} + \tfrac{1}{16}f_{xxy}f + \tfrac{1}{16}f_{xyy}f^2 + \tfrac{1}{48}f_{yyy}f^3 + \tfrac{1}{16}f_{xy}f_x + \tfrac{1}{16}f_{yy}f f_x + \tfrac{7}{96}f_y f_{yy}f^2 + \tfrac{1}{16}f_{xy}f f_y\right)$$

$$k_5 = hf + h^2(f_x + f_y f) + h^3\left(\tfrac{1}{2}f_x f_y + \tfrac{1}{2}{f_y}^2 f + \tfrac{1}{2}f_{xx} + f_{xy}f + \tfrac{1}{2}f_{yy}f^2\right) + h^4\left(\tfrac{1}{6}f_{xxx} + \tfrac{1}{2}f_{xxy}f + \tfrac{1}{2}f_{xyy}f^2 + \tfrac{1}{6}f_{yyy}f^3 + \tfrac{1}{2}f_{xy}f_x + \tfrac{1}{2}f_{yy}f f_x + \tfrac{2}{3}f_y f_{yy}f^2 + \tfrac{5}{6}f_{xy}f f_y + \tfrac{1}{6}f_x {f_y}^2 + \tfrac{1}{6}{f_y}^3 f + \tfrac{1}{6}f_{xx}f_y\right)$$

Selanjutnya substitusikan nilai-nilai k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 ke dalam persamaan (1) sehingga didapat persamaan

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \boldsymbol{h}f(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) + \boldsymbol{h^2}\left[f_x\left(\tfrac{1}{3}p_2 + \tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{1}{2}p_4 + p_5\right) + f_y f\left(\tfrac{1}{3}p_2 + \tfrac{1}{3}p_3 + \tfrac{1}{2}p_4 + p_5\right)\right] + \boldsymbol{h^3}\left[\tfrac{1}{2}f_{xx}\left(\tfrac{1}{9}p_2 + \tfrac{1}{9}p_3 + \tfrac{1}{4}p_4 + p_5\right) + f_{xy}f\left(\tfrac{1}{9}p_2 + \tfrac{1}{9}p_3 + \tfrac{1}{4}p_4 + p_5\right) + \tfrac{1}{2}f_{yy}f^2\left(\tfrac{1}{9}p_2 + \tfrac{1}{9}p_3 + \tfrac{1}{4}p_4 + p_5\right)\right] + \boldsymbol{h^4}\left[\tfrac{1}{6}f_{xxx}\left(\tfrac{1}{27}p_2 + \tfrac{1}{27}p_3 + \tfrac{1}{8}p_4 + p_5\right) + \tfrac{1}{2}f_{xxy}f\left(\tfrac{1}{27}p_2 + \tfrac{1}{27}p_3 + \tfrac{1}{8}p_4 + p_5\right) + \tfrac{1}{2}f_{xyy}f^2\left(\tfrac{1}{27}p_2 + \tfrac{1}{27}p_3 + \tfrac{1}{8}p_4 + p_5\right) + \tfrac{1}{6}f_{yyy}f^3\left(\tfrac{1}{27}p_2 + \tfrac{1}{27}p_3 + \tfrac{1}{8}p_4 + p_5\right)\right] \qquad (3)$$

Kemudian sesuaikan koefisien-koefisien yang bersesuaian antara persamaan (2) dengan persamaan (3), sehingga didapat sistem persamaan berikut:

- $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$
- $\frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{2}p_4 + p_5 = \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{9}p_2 + \frac{1}{9}p_3 + \frac{1}{4}p_4 + p_5 = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{27}p_2 + \frac{1}{27}p_3 + \frac{1}{8}p_4 + p_5 = \frac{1}{4}$

Solusi dari sistem persamaan di atas adalah

$$p_1 = \frac{1}{6} \qquad p_2 = p_3 = 0$$
$$p_4 = \frac{4}{6} \qquad p_5 = \frac{1}{6}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai tersebut ke persamaan 1, maka persamaannya menjadi:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5$$

dengan

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \tfrac{1}{3}h, y_0 + \tfrac{1}{3}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_0 + \tfrac{1}{3}h, y_0 + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_3\right)$$
$$k_5 = hf\left(x_0 + h, y_0 + \tfrac{1}{3}k_1 - \tfrac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)$$

Untuk titik ke-$i + 1$, $y(x_i + h)$ dapat ditulis y_{i+1}, maka secara umum Metode Runge-Kutta Merson ditulis:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5$$

dengan

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \tfrac{1}{3}h, y_i + \tfrac{1}{3}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \tfrac{1}{3}h, y_i + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_3\right)$$
$$k_5 = hf\left(x_i + h, y_i + \tfrac{1}{3}k_1 - \tfrac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)$$

2. *Algoritma Metode Runge-Kutta Merson Untuk Solusi Persamaan Diferensial Biasa*

Berdasarkan bentuk umum metode Runge-Kutta Merson di atas, maka dapat disusun algoritma dari Metode Runge-Kutta Merson untuk solusi numerik persamaan diferensial biasa. Algoritmanya adalah sebagai berikut:

Masukan : fungsi $f(x, y)$, nilai awal $y(x_0)$, ukuran langkah h, batas awal x_0, batas akhir x_m .
Keluaran : $y(x_i)$
Proses :

1. $n := \frac{x_m - x_0}{h}$
2. *Untuk* i =*0* sampai $n - 1$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf\left(x_i + \tfrac{1}{3}h, y_i + \tfrac{1}{3}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_i + \tfrac{1}{3}h, y_i + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{6}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{8}k_1 + \tfrac{3}{8}k_3\right)$$
$$k_5 = hf\left(x_i + h, y_i + \tfrac{1}{3}k_1 - \tfrac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)$$
$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{2}{3}k_4 + \tfrac{1}{6}k_5$$
$$x_{i+1} = x_0 + (i + 1)h$$

3. *Penerapan Konsep*

Pada bagian ini akan diperlihatkan solusi numerik dan analitik untuk persamaan diferensial biasa $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ dengan nilai awal $y_0 = \frac{1}{2}$, pada interval $[0,5]$ dengan $h = 0{,}5$.

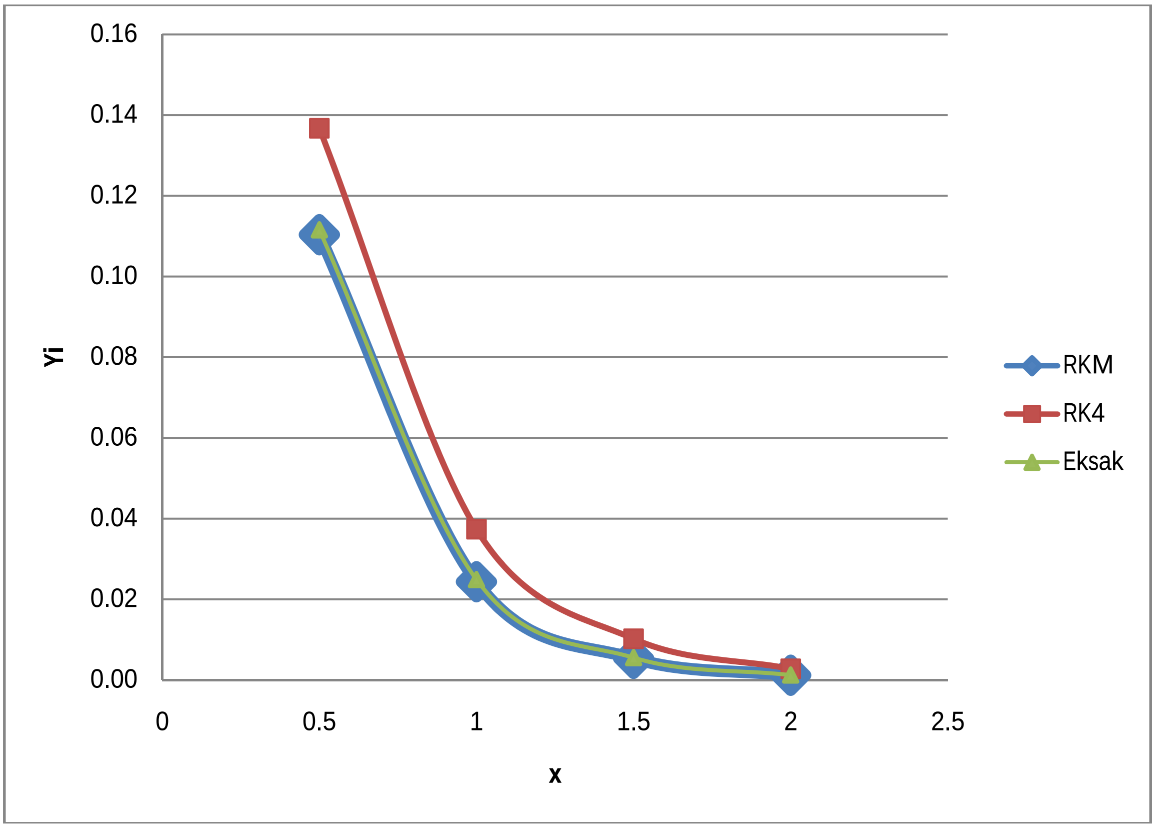
Dari perbandingan pada tabel I, dapat dilihat bahwa galat dari metode Runge-Kutta Merson lebih baik daripada galat Metode Runge-Kutta orde-4.

Perbandingan plot solusi menggunakan metode Runge-Kutta Merson, metode Runge-Kutta orde4, dan solusi eksak dapat dilihat pada gambar 1.

TABEL I

PERBANDINGAN SOLUSI EKSAK DENGAN METODE RANG KUTTA MERSON DAN RANG KUTA ORDE -4UNTUK PERSAMAAN $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

x_i	y_i			Galat RKM	Galat RK4
	Solusi RKM	Solusi RK4	Solusi Eksak		
0.5	0.1103515625	0.1367187500	0.1115650801	0.0012135176	0.0251536699
1.0	0.02435493472	0.03738403320	0.0248935342	0.0005385995	0.0124904990
1.5	0.005375210202	0.01022219658	0.0055449830	0.0001697728	0.0046772136
2.0	0.001186325688	0.002795131877	0.0012393761	0.0000530504	0.0015557558
2.5	0.0002618257868	0.0007642938725	0.0002765422	0.0000147164	0.0004877517
3.0	0.00005778576933	0.0002089866057	0.0000617049	0.0000039191	0.0001472817
3.5	0.00001275349988	0.000057144477502	0.0000137682	0.0000010147	0.0000433763
4.0	0.000002814737278	0.00001562552442	0.0000030721	0.0000002574	0.0000125534
4.5	0.00000062122131313	0.000004272604340	0.0000006855	0.0000000643	0.0000035871
5.0	0.0000001371054851	0.000001168290249	0.0000001530	0.0000000159	0.0000010153



Gambar 1. Perbandingan plot solusi Rang kutta Merson Orde 4 dengan solusi eksak

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Prinsip penurunan rumus metode Runge-Kutta Merson untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu adalah dengan cara ekspansi deret taylor dan menyamakan koefisien-koefisien yang didapat. Kemudian substitusikan ke dalam persamaan awal.
2. Solusi yang didapat menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta Merson lebih akurat daripada metode Runge-Kutta orde-4

REFERENSI

[1] Aquarito, Hilman. 2013. *Metode Runge-Kutta untuk Solusi Persamaan Differensial Biasa*. FMIPA UNP. Padang

[2] Kincaid, David dan Ward Cheney. 1996. *Numerical Analysis*. Cole Publishing Company: New York.

[3] Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Informatika Bandung: Bandung.

[4] Ross, Shepley L. 1989. *Introduction To Ordinary Differential Equations* 4^{th} *edition*. John Willey and Sons Inc: Canada.

[5] Valberg, Dale. 2004. *Kalkulus jilid 2 edisi ke delapan*.Erlangga:Jakarta.