Pendugaan Parameter pada *Random Effect Spatial Error Panel Data Model* dengan Penduga *Maximum Likelihood*

Fera Kuraysia[1], Helma[2], Dodi Vionanda[3]

[1]Student of Mathematics Departemen State University of Padang, Indonesia
[2,3]Lectures of Mathematics Departemen State University of Padang, Indonesia

[1]ferakuraysia@yahoo.com
[2]helmaunp@gmail.com
[3]dodi_matunp@yahoo.co.id

Abstract — Panel data is combination of cross section data and time series data. Model how to explaine this data is regression model of panel data. Panel data able to consist of region data are observed many time. If happen correlation between one region data with other region that mutual adjacent, than model how to explaine this data is dependen spatial model consist of lag spatial dan error spatial. Error saptial happend if be found correlation between error for one region with other region. The model with consist panel data with a dependent spatial influence is called panel data spatial model. To get a estimaton parameter from this model, we can use maximum likelihood method. The result of this research are estimation parameter from random effect spatial error panel data model in form mathematics equations, and to get estimation parameter of spatial error coeffisient to finded by numerical iteration, Newton Rapson Iteration.

Keywords — Panel data, Spatial Dependent, Random Effect, Spatial Error, Maximum Likelihood

Abstrak — Data panel merupakan gabungan dari data *cross section* dan data *time series*. Model yang dapat menjelaskan data ini disebut model regresi data panel. Data panel dapat berupa data wilayah (*region*) yang diamati pada beberapa waktu. Apabila terjadi korelasi antar data satu *region* dengan *region* lain yang saling berdekatan, maka model yang dapat menjelaskan data ini disebut dengan model spasial dependen. Spasial dependen terdiri dari spasial lag dan spasial error. Spasial error terjadi jika terdapat korelasi antara error pada satu *region* dengan *region* di sekitarnya. Model yang memuat data panel dengan pengaruh spasial dependen disebut dengan model spasial data panel. Untuk mendapatkan parameter dugaan dari model ini digunakan metode *maximum likelihood*. Hasil penelitian ini diperoleh dugaan parameter dari *random effect spatial error panel data model* dalam bentuk persamaan matematika, serta untuk memperoleh dugaan dari parameter koefisien spasial error dicari dengan menggunakan iterasi numerik *Newton Rapson Iteration*.

Kata Kunci — Data panel, Spasial dependen, *Random effect*, Spasial error, *Maximum likelihood*

PENDAHULUAN

Data panel merupakan gabungan dari data *cross section* dan data *time series.* Data *cross section* adalah data banyak individu atau objek hasil pengamatan yang diamati hanya pada satu waktu. Sedangkan data *time series* merupakan data satu individu atau objek yang diamati pada beberapa waktu.[4]

Salah satu contoh data panel dapat diperoleh dari data wilayah (*region),* seperti data beberapa perusahaan, sekolah, rumah sakit dan daerah yang saling berdekatan. Apabila terjadi korelasi antar data satu *region* dengan *region* lain yang saling berdekatan, maka asumsi error pada observasi saling bebas pada asumsi regresi tidak dipenuhi oleh model. Sehingga model yang diperoleh belum baik untuk menerangkan data hasil pengamatan.[5]

Suatu model regresi yang dapat digunakan untuk menerangkan dengan baik data tersebut adalah model regresi spasial. Model regresi spasial merupakan mode regresi yang menjelaskan suatu data hasil pengamatan suatu lokasi atau *region* yang bergantung pada pengamatan pada lokasi atau *region* disekitarnya. Model ini dikenal dengan model spasial dependen.[5]

Model regresi data panel yang memuat pengaruh spasial dependen disebut dengan model spasial data panel. Model ini merupakan model yang lebih kompleks dari pada model regresi linear biasa. Sehingga untuk mendapatkan parameter dugaan pada model tidak dapat dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil. Karena parameter dugaan yang di hasilkan oleh metode ini bersifat bias.[5] Sehingga diperlukan suatu metode lain untuk mendapatkan dugaan parameter dari model ini.

Untuk itu diperlukan pendugaan parameter pada model spasial error data panel dengan komponen error satu arah dan dengan asumsi komponen error tersebut merupakan peubah acak menggunakan metode *maximum likelihood*.

Jenis data panel dapat dikelompokkan menjadi data panel lengkap dan data panel tidak lengkap. Data panel lengkap yaitu data panel yang semua individu teramati pada semua waktu yang sama. Sedangkan data panel tidak lengkap yaitu data individu yang teramati pada waktu yang tidak sama.

Model regresi data panel adalah sebagai berikut :

$$y_{it} = x_{itk}\beta_k + u_{it}$$

Dimana :

y_{it} : variabel dependen pada *region* ke-*i* dan waktu ke-*t*

x_{it} : variabel independen pada *region* ke-*i* dan waktu ke-*t*

β : parameter model

u_{it} : komponen error model pada *region* ke-*i* dan waktu ke-*t*.

Model regresi linear biasanya digunakan untuk melihat hubungan antar peubah dependen dengan peubah independen. Dalam proses analisis regresi adakalanya nilai pengamatan atau error pada wilyah(*region*) yang saling berdekatan tidak saling bebas. Hal inilah yang dikenal dengan regresi spasial dependen. Model spasial dependen ini terdiri dari dua jenis, yaitu model spasial lag dan model spasial error. [5] Model spasial lag merupakan suatu model regresi linear dimana terdapat korelasi spasial pada peubah dependennya. Hal ini juga berarti bahwa nilai pengamatan suatu *region* dengan nilai pengamatan di *region* yang saling berdekatan tidak saling bebas. Misalnya, suatu *region* i, berhubungan dengan *region* j, maka nilai pengamatan pada *region* i merupakan fungsi dari nilai pengamatan pada *region* j, dengan $i \neq j$. Misalkan y_i, merupakan nilai pengamatan peubah dependen pada *region* ke $-i$, x_{it} merupakan nilai peubah bebas ke $-$ k pada *region* ke- i, w_{ij} merupakan bobot yang menggambarkan hubungan antar *region* ke- i dengan *region* ke- j, dan μ_i merupakan error pada *region* ke- i. Misalkan terdapat k peubah bebas dan n *region* pengamatan, maka model spasial lagnya adalah sebagai berikut:

$$y_1 = \rho(w_{11}y_1 + w_{12}y_2 + \cdots + w_{1n}y_n) + x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \cdots + x_{1k}\beta_k + u_1$$

$$y_2 = \rho(w_{21}y_1 + w_{22}y_2 + \cdots + w_{2n}y_n) + x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \cdots + x_{2k}\beta_k + u_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y_n = \rho(w_{n1}y_1 + w_{n2}y_2 + \cdots + w_{nn}y_n) + x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \cdots + x_{nk}\beta_k + u_n$$

Atau dapat ditulis dalam notasi matrik sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y} = \rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$$

Dimana :

$\boldsymbol{y}$: vektor nilai pengamatan peubah dependen berukuran $n \times 1$

ρ : parameter skalar spasial lag

$\boldsymbol{W}$: matriks spasial terboboti dengan baris terstandarisasi ($\sum_j w_{ij} = 1$, $\forall$ i) berukuran $n \times n$

$\boldsymbol{X}$: matrik k peubah bebas berukuran $n \times k$

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter regresi berukuran $k \times 1$

$\boldsymbol{u}$: vektor error berukuran $n \times 1$

[5]

Jika nilai error suatu *region* dengan *region* disekitarnya yang berdekatan tidak saling bebas, maka hal ini menunjukkan adanya spasial error. Model yang dapat menerangkan data ini disebut model spasial error.

Misalkan y_i merupakan nilai pengamatan peubah dependen pada wilayah ke-i, x_{ik} merupakan nilai peubah bebas ke $-$ k pada lokasi ke- i, w_{ij} merupakan bobot yang menggambarkan hubungan antar *region* ke- i dengan *region* ke- j, dan μ_i merupakan error pada *region* ke- i dan ε_i merupakan error yang sebenarnya pada *region* ke- i. Misalkan terdapat k peubah bebas dan n *region* pengamatan, maka model spasial errornya adalah sebagai berikut:

$$y_1 = x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 + \cdots + x_{1k}\beta_k + u_1$$
$$y_2 = x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 + \cdots + x_{2k}\beta_k + u_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$y_n = x_{n1}\beta_1 + x_{n2}\beta_2 + \cdots + x_{nk}\beta_k + u_n$$

Dengan

$$u_1 = \lambda(w_{11}u_1 + w_{12}u_2 + \cdots + w_{1n}u_n) + \varepsilon_1$$
$$u_2 = \lambda(w_{21}u_1 + w_{22}u_2 + \cdots + w_{2n}u_n) + \varepsilon_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$u_n = \lambda(w_{n1}u_1 + w_{n2}u_2 + \cdots + w_{nn}u_n) + \varepsilon_n$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dimana :

$\boldsymbol{y}$: vektor nilai pengamatan peubah dependen berukuran $n \times 1$

λ : parameter skalar spasial error

$\boldsymbol{W}$: matriks spasial terboboti dengan baris terstandarisasi ($\sum_j w_{ij} = 1, \forall\, i$) berukuran $n \times n$

$\boldsymbol{X}$: matriks k peubah bebas berukuran $n \times k$

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter regresi berukuran $k \times 1$

$\boldsymbol{u}$: vektor error berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor error sebenarnya, berukuran $n \times 1$

[5]

Matriks pembobot spasial $\boldsymbol{W}$ adalah matriks berukuran $n \times n$ yang menyatakan hubungan antara observasi spasial dependen. w_{ij} adalah elemen dari matriks $\boldsymbol{W}$ pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dengan $w_{ij} > 0$ untuk *j* =1,2, ... ,*N*, dimana *j* merupakan region di sekitar observasi *i*. [10]

Selanjutnya akan dijelaskan jenis-jenis matriks pembobot spasial [10] yaitu:

a. *Linear Contiguity*
Didefinisikan :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } region\ i \text{ dan } j \\ & \text{mempunyai } common\ edge \\ 0, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

b. *Rook Contiguity*
Didefinisikan :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } region\ i \text{ dan } j \\ & \text{mempunyai } common\ side \\ 0, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

c. *Bishop Contiguity*
Didefinisikan :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } region\ i \text{ dan } j \\ & \text{mempunyai } common\ vertecs \\ 0, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

d. *Queen Contiguity*
Didefinisikan :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } region\ i \text{ dan } j \text{ mempunyai} \\ & common\ edge \text{ dan } common\ vertecs \\ 0, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

Tidak ada teori yang menjelaskan pemilihan matriks bobot spasial yang akan digunakan dalam model spasial dependen. Namun para peneliti biasanya menggunakan *queen contiguity*.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis pada bidang kajian statistika. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah :

1. Menelaah teori tentang *random effect spatial panel data model*.
2. Menemukan fungsi *maximum likelihood* dari *random effect spatial panel data model.*
3. Menduga parameter-parameter dengan menggunakan fungsi *likelihood* yang telah didapat pada langkah 2.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$ adalah matriks berukuran $p \times q$. Maka *Kronecker Product* dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\mathbf{B}$ adalah sebuah matriks berukuran $mp \times nq$, yang dinotasikan sebagai $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} \otimes \boldsymbol{B}_{p\times q} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi *kronecker product* tersebut, maka dapat ditulis bentuk matriks dari *random effect spatial error panel data model* adalah,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\iota_T \otimes \boldsymbol{I}_N)\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \rho \boldsymbol{W\phi} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \textbf{(1)}$$

Dimana:

$\mathbf{y}$ = vektor variabel dependen berukuran $NT \times 1$

$\mathbf{X}$ = matriks variabel independen berukuran $NT \times k$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter yang berukuran $k \times 1$

ρ = koefisien spasial error

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor error berukuran $NT \times 1$ yang saling bebas dan berdistribusi normal

$\boldsymbol{\phi}$ = vektor error berukuran $NT \times 1$

$\boldsymbol{\mu}$ =pengaruh individu yang tidak teramati berukuran $N \times 1$

$\boldsymbol{W}$ = matriks bobot spasial berukuran $NT \times NT$

$\mathbf{I_N}$ = Matriks identitas berukuran $N \times N$

$\iota_\mathbf{T}$ = vektor berukuran $T \times 1$ yang setiap entrinya berisi 1

Pendugaan parameter *random effect spatial error panel data model* dilakukan dengan menggunakan metode *maximum likelihood*. Metode ini digunakan untuk mendapatkan statistik yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Selanjutnya akan dibahas fungsi log *likelihood* dari *Random Effect Spatial Error Panel Data Model*.

Perhatikan persamaan (**1**):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\iota_T \otimes \boldsymbol{I}_N)\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\phi}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \rho \boldsymbol{W\phi} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dari persamaan ini akan diperoleh,

$$\boldsymbol{I_{NT}}\phi = \rho\boldsymbol{W\phi} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{I_{NT}\phi} - \rho\boldsymbol{W\phi}$$

$$= (\boldsymbol{I_N} \otimes \boldsymbol{I_T})\boldsymbol{\phi} - \rho(\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{W_N})\boldsymbol{\phi}$$

$$= (\boldsymbol{I_N} \otimes \boldsymbol{I_T})\boldsymbol{\phi} - (\boldsymbol{I_T} \otimes \rho\boldsymbol{W_N})\boldsymbol{\phi}$$

$$= [\boldsymbol{I_T} \otimes (\boldsymbol{I_N} - \rho\boldsymbol{W_N})]\boldsymbol{\phi}$$

Sehingga,

$$\boldsymbol{\phi} = [(\boldsymbol{I_T} \otimes (\boldsymbol{I_N} - \rho\boldsymbol{W_N})]^{-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

Misalkan,

$$\boldsymbol{I_N} - \rho\boldsymbol{W_N} = \boldsymbol{B}$$

Maka,

$$\boldsymbol{\phi} = [(\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B}]^{-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

Persamaan **(1)** dapat ditulis sebagai berikut,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + (\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{v} \qquad \textbf{(2)}$$

Dimana :

$$\boldsymbol{v} = (\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \textbf{(3)}$$

Vektor $\boldsymbol{v}$ merupakan vektor komponen error model yang terdiri dari dua variabel random $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ yang masing-masing berdistribusi normal.

Fungsi likelihood dari varabel dependen $\boldsymbol{y}$ adalah, $L(\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \varphi) = f(y_{11}, y_{21}, \dots, y_{NT}; \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2, \rho, \varphi)$.
Dimana, $f(y_{11}, y_{21}, \dots, y_{NT})$ adalah p.d.f dari variabel dependen $\boldsymbol{y}$. Karena, variabel acak $\boldsymbol{y}$ tidak diketahui bentuk distribusinya, maka untuk memperoleh p.d.f dari variabel $\boldsymbol{y}$ dapat digunakan transformasi variable. Transformasi ini dilakukan dengan menggunakan variabel acak $\boldsymbol{v}$ yang telah diketahui distribusinya.

Sehinga diperoleh p.d.f bersama dari peubah acak $y_{11}, y_{21}, \dots, y_{NT}$ adalah :

$$f(y_{11}, y_{21}, \dots, y_{NT}) = [(2\pi)^{NT}|\boldsymbol{\Omega}|]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{v}\right] \qquad \textbf{(4)}$$

Persamaan **(4)** ini disebut dengan fungsi likelihood dari variabel acak $\boldsymbol{y}$.

Dimana, $\boldsymbol{\Omega}$ adalah matriks varian kovarian dari komponen error $\boldsymbol{v}$. Maka terlebih dahulu akan dicari matriks varian kovarian dari $\boldsymbol{v}$.

Perhatikan persamaan **(3)** :

$$\boldsymbol{v} = (\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{E}[(\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon}]$$

$$= (\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Karena $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ yang masing-masing adalah peubah acak berdistribusi normal, maka $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$, sehingga,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

Diperoleh bahwa mean dari komponen error $\boldsymbol{v}$ adalah nol, dan

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{vv}') - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})'$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{vv}') - 0$$

$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{vv}')$$

Diperoleh matriks varian kovarian dari komponen error $\boldsymbol{v}$ adalah

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{vv}')$$

$$= \boldsymbol{E}\{[(\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon}]\,[(\iota_T \otimes \boldsymbol{I_N})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{B^{-1}})\,\boldsymbol{\varepsilon}]'\}$$

Dan dengan menggunakan sifat *kronecker product*, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi:

$$\boldsymbol{\Omega} = \sigma_\varepsilon^2[\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{T}} \otimes (\boldsymbol{T\varphi I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1})] \qquad \textbf{(5)}$$

Dengan memisalkan :

$$[\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{T}} \otimes (\boldsymbol{T\varphi I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1})] = \boldsymbol{\Sigma} \qquad \textbf{(6)}$$

Maka diperoleh :

$$\boldsymbol{\Omega} = \sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{\Sigma} \qquad \textbf{(7)}$$

Selanjutnya akan di cari invers matriks varian kovarian $\boldsymbol{\Omega}$.

Misalkan bahwa :

$$\boldsymbol{\Sigma^{-1}} = [\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{T}} \otimes [(T\boldsymbol{\varphi I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1})]^{-1} + (\boldsymbol{E_T} \otimes (\boldsymbol{B'B})]$$

Perhatikan persamaan **(6)**:

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{T}} \otimes (T\boldsymbol{\varphi I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1})]$$

Dengan memisalkan :
$(T\boldsymbol{\varphi I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1}) = \boldsymbol{\alpha}$, $\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}$, dan $(\boldsymbol{B'B}) = \boldsymbol{p}$, maka diperoleh,

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p^{-1}}) \text{ dan}$$

$$\boldsymbol{\Sigma^{-1}} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p})$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma\Sigma^{-1}} &= [(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p^{-1}})][(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p})] \\
&= (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p}) + \\
&\quad (\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p^{-1}})(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p^{-1}})(\boldsymbol{E_T} \otimes \boldsymbol{p}) \\
&= (\boldsymbol{A^2} \otimes \boldsymbol{\alpha\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{AE_T} \otimes \boldsymbol{\alpha p}) \\
&\quad + (\boldsymbol{E_T A} \otimes \boldsymbol{p^{-1}\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{E_T}^{\boldsymbol{2}} \otimes \boldsymbol{p^{-1}p}) \\
&= (\boldsymbol{A^2} \otimes \boldsymbol{I_N}) + (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I_T} - \boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{\alpha p}) \\
&\quad + ((\boldsymbol{I_T} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{p^{-1}\alpha^{-1}}) + (\boldsymbol{E_T}^{\boldsymbol{2}} \otimes \boldsymbol{I_N}) \\
&= (\boldsymbol{A^2} \otimes \boldsymbol{I_N}) + \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} + (\boldsymbol{E_T}^{\boldsymbol{2}} \otimes \boldsymbol{I_N}) \\
&= \boldsymbol{A^2} + (\boldsymbol{E_T}^{\boldsymbol{2}} \otimes \boldsymbol{I_N}) \\
&= \boldsymbol{A^2} + ((\boldsymbol{I_T} - \boldsymbol{A})^2 \otimes \boldsymbol{I_N}) \\
&= \boldsymbol{A^2} + (\boldsymbol{I_T} - \boldsymbol{2A} + \boldsymbol{A^2}) \otimes \boldsymbol{I_N} \\
&= \boldsymbol{I_T} \otimes \boldsymbol{I_N} = \boldsymbol{I_{NT}}
\end{aligned}$$

Karena $\boldsymbol{\Sigma\Sigma^{-1}} = \boldsymbol{I_{NT}}$ maka invers dari $\boldsymbol{\Sigma}$ adalah,

$$\boldsymbol{\Sigma^{-1}} = [\bar{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{T}} \otimes [(T\boldsymbol{\varphi I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1})]^{-1} + (\boldsymbol{E_T} \otimes (\boldsymbol{B'B})] \qquad \textbf{(8)}$$

Dan diperoleh invers dari matriks varian kovarian adalah,

$$\boldsymbol{\Omega^{-1}} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\,\boldsymbol{\Sigma^{-1}}$$

Kemudian akan dicari determinan dari matriks varian kovarian $\boldsymbol{\Omega}$.

Perhatikan persamaan **(6)**, apabila $\boldsymbol{\Sigma}$ dijabarkan, maka membentuk sebuah persamaan :

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\frac{1}{T}\iota_T\iota_T' \otimes (T\varphi\boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-1}) + ((\boldsymbol{I_T} - \tfrac{1}{T}\iota_T\iota_T') \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1})]$$

Misalkan *T=2* dan *N=3* maka akan diperoleh :

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\frac{1}{2}\iota_2\iota_2' \otimes (2\varphi\boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{B'B})^{-1}) + ((\boldsymbol{I_2} - \frac{1}{2}\iota_2\iota_2') \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1})]$$

Dimana :

$$\iota_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\iota_2' = [\mathbf{1} \quad \mathbf{1}]$$

$$\iota_2\iota_2' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$2\varphi \boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} 2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 2\varphi \end{bmatrix}$$

Dan,

$$(\boldsymbol{B'B}) = (\boldsymbol{I_N} - \rho \boldsymbol{W_N})'(\boldsymbol{I_N} - \rho \boldsymbol{W_N})$$

Misalkan,

$$(\boldsymbol{B'B})^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh,

$$\frac{1}{2}\iota_2\iota_2' \otimes (2\varphi \boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{B'B})^{-1} = \frac{1}{2}\iota_2\iota_2' \otimes 2\varphi \boldsymbol{I_3} + \frac{1}{2}\iota_2\iota_2' \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1}$$

$$\frac{1}{2}\iota_2\iota_2' \otimes (2\varphi \boldsymbol{I_3} + (\boldsymbol{B'B})^{-1} = \begin{bmatrix} \varphi + \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c & \varphi + \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}d & \varphi + \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & \frac{1}{2}d & \varphi + \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \varphi + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \varphi + \frac{1}{2} \\ \varphi + \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c & \varphi + \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}d & \varphi + \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & \frac{1}{2}d & \varphi + \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \varphi + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \varphi + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dan,

$$(\boldsymbol{I_2} - \frac{1}{2}\iota_2\iota_2') \otimes (\boldsymbol{B'B})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & -\frac{1}{2}d & -\frac{1}{2}e & -\frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}g & -\frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}d & -\frac{1}{2}e & -\frac{1}{2}f & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f \\ -\frac{1}{2}g & -\frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \varphi + a & b & c & \varphi & 0 & 0 \\ d & \varphi + e & f & 0 & \varphi & 0 \\ g & h & \varphi + i & 0 & 0 & \varphi \\ \varphi & 0 & 0 & \varphi + a & b & c \\ 0 & \varphi & 0 & d & \varphi + e & f \\ 0 & 0 & \varphi & g & h & \varphi + i \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\det \boldsymbol{\Sigma} = \det \begin{bmatrix} 2\varphi + a & b & c \\ d & 2\varphi + e & f \\ g & h & 2\varphi + i \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{\mathbf{1}}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$|\boldsymbol{\Sigma}| = |T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-\mathbf{1}}| . |(\boldsymbol{B'B})^{-\mathbf{1}}|^{T-1}$$

Kemudian invers dan determinan dari matriks varian kovarian tersebut disubsitusikan pada persamaan fungsi *likelihood* **(4)**, sehingga diperoleh:

$$L = [(2\pi)^{NT}\sigma_\varepsilon{}^2 |T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-\mathbf{1}}| . |(\boldsymbol{B'B})^{-\mathbf{1}}|^{T-1}]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2} v'\boldsymbol{\Sigma}^{-1} v\right]$$

Maka fungsi log likelihood dari fungsi di atas adalah:

$$\ln L = -\frac{NT}{2} ln(2\pi\sigma_\varepsilon{}^2) - \frac{1}{2} ln|T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B'B})^{-\mathbf{1}}| + (T-1) ln|\boldsymbol{B}| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2} \boldsymbol{v'\Sigma^{-1}v} \quad \textbf{(9)}$$

Pendugaan parameter untuk *Random Effect Spatial Error Panel Data Model* diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi *likelihood*. Hal ini akan ekivalen dengan memaksimumkan fungsi log *likelihood* pada pembahasan sebelumnya.

Dugaan Parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{x}^{*\prime}\boldsymbol{x}^{*})^{-1}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}^{*})$$

Dengan $\boldsymbol{x}^{*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1{}^{*} \\ \boldsymbol{X}_2{}^{*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_T{}^{*} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^{*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1}^{*} \\ \boldsymbol{y_2}^{*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_T}^{*} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X_1}^{*} = \begin{bmatrix} x_{11}{}^{*} \\ x_{21}{}^{*} \\ \vdots \\ x_{N1}{}^{*} \end{bmatrix}$, dan

$$\boldsymbol{y}^{*} = \begin{bmatrix} y_{11}{}^{*} \\ y_{21}{}^{*} \\ \vdots \\ y_{NT}{}^{*} \end{bmatrix}$$

Dugaan Parameter $\sigma_\varepsilon{}^2$ adalah:

$$\widehat{\sigma_\varepsilon{}^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{e_t}'\boldsymbol{e_t}}{NT}$$

Langkah pertama yang dilakukan untuk memperoleh dugaan parameter ρ dan φ adalah dengan mensubsitusikan nilai dugaan dari parameter $\boldsymbol{\beta}$ dan $\sigma_\varepsilon{}^2$ ke dalam fungsi log *likelihood* pada persamaan **(9)**. sehingga akan diperoleh bentuk fungsi log *likelihood* sebagai berikut:

$$\ln L = \boldsymbol{C} - \frac{NT}{2}\ln \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} - \frac{1}{2}\ln|T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}| + (T-1)\ln|\boldsymbol{B}|$$

Dengan $\boldsymbol{C} = -\frac{NT}{2}\ln 2\pi - \frac{NT}{2} + \frac{NT}{2}\ln NT$

Dugaan dari parameter ρ yang akan memaksimumkan fungsi log *likelihood* diperoleh dengan cara $\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = 0$, dimana φ akan dianggap sebagai konstanta.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \frac{\partial\left[-\frac{NT}{2}\ln \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} - \frac{1}{2}\ln|T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}| + (T-1)\ln|\boldsymbol{B}|\right]}{\partial \rho}$$

Karena nilai log *likelihood* yang diperoleh merupakan fungsi polinomial terhadap ρ maka solusi ρ menjadi tidak tunggal. Sehingga diperlukan suatu iterasi numerik untuk memperoleh dugaan dari parameter ρ yang akan memaksimumkan fungsi log *likelihood*. [5]

Pada iterasi ini fungsi objektif *lnL* diaprosimaksikan dengan *second order taylor series* di sekitar nilai awal $\rho^{(1)}$**.** Untuk log *likelihood* disekitar nilai parameter awal, yaitu:

$$LnL = LnL|_{\rho^{(1)}} + \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\rho - \rho^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\frac{\left(\rho - \rho^{(1)}\right)^2}{2}$$

Untuk memperoleh kondisi maksimum, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameter ρ dengan operasi sebagai berikut:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \rho} = \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}} + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\rho - \rho^{(1)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial \rho} = \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}} + \left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\rho^{(2)} - \rho^{(1)}\right) = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\rho^{(2)} - \rho^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}}$$

$$\left(\rho^{(2)} - \rho^{(1)}\right) = -\left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\right)^{-1}$$

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(1)}}\left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(1)}}\right)^{-1}$$

Bila pada persamaan di atas, $\rho^{(2)}$ menggantikan $\rho^{(1)}$ maka akan diperoleh $\rho^{(3)}$ dan begitu seterusnya. Sehingga diperoleh persamaan umumnya sebagai berikut:

$$\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)} - \left.\frac{\partial LnL}{\partial \rho}\right|_{\rho^{(n)}}\left(\left.\frac{\partial^2 LnL}{\partial \rho^2}\right|_{\rho^{(n)}}\right)^{-1}$$

Persamaan inilah yang dikenal dengan iterasi newton rapson. Saat iterasi mencapai konvergen yaitu ketika $\rho^{(n+1)} = \rho^{(n)}$ atau $\left|\rho^{(n+1)} - \rho^{(n)}\right| < \varepsilon$**,** maka hal ini telah memenuhi syarat *first order condition.*

Untuk menemukan dugaan parameter dari φ dapat dilakukan dengan cara yang sama dengan cara menemukan parameter ρ**.** Dengan menemukan dugaan dari parameter yang akan memaksimumkan fungsi log *likelihood* yang diperoleh dengan : $\frac{\partial LnL}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = 0$, dimana ρ akan dianggap sebagai konstanta sehingga:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \varphi} = \frac{\partial\left[-\frac{NT}{2}\ln \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} - \frac{1}{2}\ln|T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}| + (T-1)\ln|\boldsymbol{B}|\right]}{\partial \varphi}$$

Bila persamaan log *likelihood* tersebut dijabarkan maka akan diperoleh bentuk polinomial dari φ sehingga solusi untuk φ juga menjadi tidak tunggal. Seperti halnya mencari penduga parameter ρ**,** maka diperlukan suatu itersi numerik untuk mendapatkan penduga dari φ yang akan memaksimumkan fungsi log *likelihood*.

Metode numerik yang digunakan untuk menduga parameter φ ini sama seperti metode numerik *Newton Rapson Iteration* untuk menduga parameter ρ hanya saja parameter ρ diganti dengan parameter φ di setiap langkahnya.

SIMPULAN

Pendugaan parameter pada tugas akhir ini dilakukan dengan menggunakan metode *maximum likelihood.* Fungsi log *likelihood* dari *random effect spatial error panel data model* adalah,

$$\ln L = -\frac{NT}{2}\ln(2\pi\sigma_\varepsilon{}^2) - \frac{1}{2}\ln\left|T\varphi \boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-1}\right| + (T-1)\ln|(\boldsymbol{B})| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon{}^2}\sum \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$$

Dengan menggunakan fungsi log *likelihood* di atas diperoleh dugaan parameternya sebagai berikut:

1. Dugaan Parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{x}^{*\prime}\boldsymbol{x}^{*}\right)^{-1}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}^{*})$,

   Dengan $\boldsymbol{x}^{*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1^{\,*} \\ \boldsymbol{X}_2^{\,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_T^{\,*} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^{*} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1^{\,*} \\ \boldsymbol{y}_2^{\,*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_T^{\,*} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}_1^{\,*} = \begin{bmatrix} x_{11}^{\,*} \\ x_{21}^{\,*} \\ \vdots \\ x_{N1}^{\,*} \end{bmatrix}$, dan $\boldsymbol{y}^{*} = \begin{bmatrix} y_{11}^{\,*} \\ y_{21}^{\,*} \\ \vdots \\ y_{NT}^{\,*} \end{bmatrix}$

2. Dugaan parameter $\sigma_\varepsilon^{\,2}$ adalah $\widehat{\sigma_\varepsilon^{\,2}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{e_t}'\boldsymbol{e_t}}{NT}$

3. Dugaan parameter ρ dan φ tidak dapat dilakukan dengan cara manual. Untuk menduga parameter ini diperlukan suatu iterasi numerik. Hal ini disebabkan karena $\frac{\partial ln\,L}{\partial\rho} = 0$ dan $\frac{\partial LnL}{\partial\varphi} = 0$ merupakan suatu fungsi polinomial. Dimana fungsi *likelihood* yang memuat kedua parameter tersebut adalah $ln\ L = \boldsymbol{C} - \frac{NT}{2}ln\ \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} - \frac{1}{2}ln\left|T\varphi\boldsymbol{I_N} + (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B})^{-\boldsymbol{1}}\right| + (T-1)ln|\boldsymbol{B}|$

REFERENSI

[1] Abadir, Karim M. and Jan R. Magnus. 2005. *Matrix Algebra*. New York: Cambridge University Press.

[2] Anton, Howart. 1987. *Elementary Linear Algebra* (Terjemahan). Jakarta: Erlangga.

[3] Avidati. 2009. *Penaksiran Prameter pada Random Effect Spatial Lag Panel Data Model*. Departemen Matematika (skripsi), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesi: Depok.

[4] Baltagi, Badi H.2005. *Econometric Analysis of Panel Data* 3rd ed. Chichester : John Willey & Sons Ltd.

[5] Kuraysia, Fera. 2013. *Pendugaan Parameter pada Random Effect Spatial Error Panel Data Model dengan Penduga Maximum Likelihood*. Departemen Matematika (TA), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Padang: Padang.

[5] Fischer, M. Fisher and Arthur Getis. 2010. *Handbook of Applied Spatial Analysis, software tools, Methods and Application*. New York: Springer.

[6] Harville, David A. 2008. *Matrix Algebra From a Statistician's Persepective*. New York: Springer

[7] Hoog,Robert V. & Allen. T. Craig. 1995.*Introduction to Mathematical Statistics*. New Jersey: Prentice-Hall Internation

[8] Johnson, Richard A. And Dean W. Wichern. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis* 6th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

[9] Kosasih, Rifki. 2009. *Penaksiran Parameter pada Model Regresi Spatial panel data satu arah.* Departemen Matematika (skripsi), Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Indonesia, Depok.

[10] Lesage, James P. 1998. Spatial Econometrics. Departement of Economics, University of Toledo.

[11] Rencher, Alvin C. 2002. *Method of Multivariate Analysis,* 2nd *edition*. New York: John wiley and Sons, Inc.

[12] Schoot, James R. 1997. *Matrix Analysis for Statisties*. New York: John Willey & Sons.

[13] Seber, George A.F. 2008. *A Matrix Handbook for Statisticians*. New Jersey: John Willey & Sons.

[14] Walpole. Ronald. E. and John E. Freund. 1987. *Mathematical Statistics*. New Jersey: A Division of simon & Schuster.

.