Kajian Metode Frobenius

[1]Abdul Harits

[1] *Student of Mathematics Department State University of Padang, Indonesia*

[1]abdul_harits_01796@yahoo.com

Abstract – One of the problems in differential equation is to get solution of Ordinary differential equation with coefficient variable. So that needed a method to solve it, it is the series solution. The series solution at point t can be used if $t = 0$ is ordinary point of ordinary differential equations, but if $t = 0$ is singular point, it is needed an extend series solution which called Frobenius method. This research aims to determine the form of extend series solution at singular points and the form of linear independently second solutions. The results of this research indicate the form of extend series solution at singular point and then based on roots of indicial terms, there are three kinds linear independently second solution where distinct roots not differing by an integer, roots differing by an integer, and double root.

Keywords - Ordinary Points, Singular Points, Series Solution, Frobenius Method

Abstrak – Salah satu masalah dalam persamaan diferensial adalah memperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa koefisien variable. Sehingga dibutuhkan sebuah metode untuk memperolehnya, yaitu solusi deret. Solusi deret pada titik *t* dapat digunakan jika $t = 0$ adalah titik ordinari dari persamaan diferensial biasa, tetapi jika $t = 0$ adalah titik singular, maka dibutuhkan suatu deret pangkat diperluas yang dikenal dengan metode Frobenius. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh bentuk solusi deret pangkat diperluas pada titik singular dan bentuk solusi kedua yang saling bebas linear. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bentuk dari solusi deret pangkat diperluas pada titik singular dan berdasarkan dari akar-akar persamaan indicator, ada tiga bentuk solusi kedua yang saling bebas linear dimana selisih akar-akar bukan bilangan bulat, selisih akar-akar bilangan bulat, dan akar kembar

***Kata kunci*:** Titik Ordinari, Titik Singular, Solusi Deret, Metode Frobenius

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan dari suatu fungsi dengan satu peubah bebas [5]. Dalam membahas suatu persamaan diferensial biasa, tidak terlepas dalam kajian mencari solusi persamaan diferensial tersebut. Solusi dari persamaan diferensial orde-*n* adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial [4].

Ada banyak cara dalam menyelesaikan suatu persamaan diferensial biasa, akan tetapi sering terjadi kendala dalam memperoleh solusi persamaan diferensial, terutama persamaan diferensial yang mempunyai koefisien berupa variabel. Persamaan diferensial koefisien variabel yang memiliki bentuk khusus seperti persamaan diferensial Cauchy-Euler dan persamaan diferensial Lagrange-Legendre, dapat diselesaikan dengan menyederhanakan bentuk persamaan diferensialnya. Akan tetapi jika koefisien variabelnya tidak memiliki bentuk khusus maka akan sulit untuk memperoleh solusi persamaan diferensialnya. Sehubungan dengan itu dikembangkan metode penyelesaian persamaan diferensial yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial koefisien variabel tersebut. Metode yang dapat digunakan adalah dengan menyatakan penyelesaiannya dalam bentuk solusi deret pangkat. Metode ini sangat efisien digunakan pada persamaan diferensial koefisien variabel, sebab koefisien dari persamaan diferensial tidak dipersyaratkan mempunyai bentuk tertentu.

Penyelesaian persamaan diferensial menggunakan solusi deret pangkat memperhatikan keanalitikan koefisien dari persamaan diferensial. Suatu fungsi *f(t)* dikatakan analitik pada t_0 jika *f(t)* mempunyai sebuah bentuk deret [2]

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n \ .$$

Jika suatu persamaan diferensial direpresentasikan dalam bentuk $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ dengan *P(x)* dan *Q(x)* analitik di $x = x_0$, maka solusi *y(x)* persamaan diferensial tersebut akan analitik di $x = x_0$ artinya solusi persamaan diferensialnya dapat direpresentasikan dalam bentuk [1]:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(x - x_0\right)^m$$

Akan tetapi, jika *P(x)* dan *Q(x)* tidak analitik di $x = x_0$, dengan kata lain memiliki titik singular di $x = x_0$ maka solusi *y(x)* tidak dapat direpresentasikan dalam deret $(x - x_0)$, sehingga dibutuhkan suatu metode deret pangkat diperluas atau dikenal dengan metode Frobenius. Metode ini mempunyai setidaknya satu solusi yang berbentuk:

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

dimana *r* merupakan akar dari persamaan indikator persamaan diferensial. Dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde-2, akan dicari solusi kedua dari persamaan diferensial, dimana bentuk solusi kedua dari persamaan diferensial bergantung pada akar-akar indikatornya, yang mana akar-akarnya bisa sama atau berbeda, dimana solusinya memuat fungsi logaritma [3].

Metode Frobenius ini sangat efisien digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial dengan koefisien berupa fungsi. Metode frobenius ini banyak digunakan dalam mencari solusi dari penerapan persamaan diferensial, diantaranya persamaan Bessel, penyebaran suhu dalam tabung, persamaan Laguerre yang digunakan dalam mekanika kuantum dari atom hidrogen, dan persamaan hipergeometrik dari Gauss.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar atau teoritis. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif, dengan menganalisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang akan dibahas, serta berdasarkan pada studi kepustakaan.

Adapun langkah–langkah penelitian yang dilakukan adalah:

1. Menelaah teori mengenai persamaan diferensial biasa.
2. Menelaah teori mengenai titik ordinari dan titik singular persamaan diferensial biasa.
3. Meninjau teori tentang solusi deret pangkat.
4. Menelaah teorema 1 deret Frobenius.
5. Menelaah akar-akar indikator persamaan diferensial orde dua.
6. Menelaah teorema 2 deret Frobenius.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Bentuk Solusi Deret Pangkat yang Diperluas (Metode Frobenius) di Titik Singular

   Persamaan diferensial:

$$t^2 S'' + t\, p(t)\, S' + q(t)\, S = 0 \qquad (1)$$

$s(t) = t^x$ merupakan solusi persamaan diferensial (1), akan dicari solusi deret dari persamaan diferensial yang saling bebas linear dengan memisalkan,

$$S = U .\, t^x , \qquad (2)$$

dengan *U* adalah fungsi *U(t).*

Diturunkan persamaan (2) hingga turunan kedua dan mensubstitusikan ke dalam persamaan diferensial (1). Karena $s(t) = t^x$ adalah solusi persamaan diferensial (1) maka diperoleh,

$$U'' t^{x+2} + U'\left(2x\, t^{x+1} + p(t)\, t^{x+1}\right) = 0$$

Dengan pengintegralan diperoleh:

$$U = t^{-(p_0 + 2x)+1}\left(k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots\right)$$

karena $S = U . t^x$ dan merujuk ke persamaan indikator, yang menyatakan jumlah akar-akarnya adalah $-(p_0 - 1)$, maka diperoleh:

$$S = t^x\left(k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots\right)$$

Sehingga diperoleh solusi deret pertama bagi persamaan diferensial (1) yang memiliki titik singular pada titik *t= 0*.

2. Bentuk Solusi Kedua Persamaan Diferensial Koefisien Variabel yang Saling Bebas Linear

   Persamaan diferensial yang berbentuk:

$$S'' + \frac{p(t)}{t} S' + \frac{q(t)}{t^2} S = 0$$

dimana *p(t)* dan *q(t)* analitik di $t = 0$, dengan $x_1 > x_2$ dimana x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan indikator $x^2 + (p_0 - 1)x + q_0 = 0$, akan memiliki solusi pertama yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$S_1(t) = t^{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} k_n\, t^n \qquad (3)$$

Dan memiliki tiga kasus bentuk solusi kedua:

Kasus 1: akar-akar berbeda dan selisihnya bukan bilangan bulat.

Dalam kasus ini, $x_1 - x_2 = J*$ dengan *J** adalah bukan bilangan bulat

Dengan memisalkan:

$$S_2 = W\, S_1 , \qquad (4)$$

dengan *W* adalah fungsi *W(t).*

Dengan menggunakan langkah yang sama dalam permasalah pertama, dan S_1 adalah solusi persamaan diferensial (1), maka diperoleh:

$$t^2 S_1 W'' + 2t^2 S_1' W' + t\, p\, S_1 W' = 0$$

Sehingga,

$$\frac{W''}{W'} = -\left(\frac{2x_1 + p_0}{t}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} -_n\, t^n \qquad (5)$$

Dalam kasus ini, akar-akar berbeda dan selisihnya bukan bilangan bulat maka $2x_1 + p_0 = 1 + J*$, dan dengan pengintegralan diperoleh:

$$W = V_0 t^{-J*} + V_1 t^{1-J*} + V_2 t^{2-J*} + \ldots$$

Karena $S_2 = W\, S_1$, maka diperoleh solusi kedua persamaan diferensial (1) adalah:

$$S_2(t) = t^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n$$

apabila akar-akar persamaan indikator berbeda dan selisihnya bukan bilangan bulat.

Kasus 2: selisih kedua akarnya adalah bilangan bulat

Dalam kasus ini, $x_1 - x_2 = J$ dengan J adalah bilangan bulat.

Dengan menggunakan langkah yang sama pada pembuktian kasus 1, sehingga akan diperoleh persamaan (5). Dalam kasus ini, selisih kedua akarnya adalah bilangan bulat, sehingga $2x_1 + p_0 = 1 + J$ dan dengan pengintegralan, diperoleh:

$$W = -\frac{1}{J} t^{-J} + v_1 t^{1-J} + v_2 t^{2-J} + \ldots + v_{J-1} t^{-1}$$
$$+ v_J \ln t + v_{J+1} t + v_{J+2} t^2 + \ldots$$

Karena $S_2 = W\, S_1$, *s*ehingga diperoleh solusi kedua persamaan diferensial (1) adalah:

$$S_2(t) = v\, S_1(t) \ln t + t^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n$$

apabila akar-akar persamaan indikator berbeda dan selisihnya bilangan bulat.

Kasus 3: akar kembar

Karena akar-akar persamaan indikator memiliki nilai sama yaitu $x_1 = x_2 = x$, maka akar indikatornya $x = \frac{1}{2}(1 - p_o)$.

Dengan menggunakan langkah yang sama pada pembuktian kasus 1, sehingga akan diperoleh persamaan (5). Karena $x = \frac{1}{2}(1 - p_o)$ adalah akar-akar persamaan indikator, maka $2x + p_0 = 1$, dan dengan pengintegralan, diperoleh:

$$W = \ln t + v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \ldots$$

Karena $S_2 = W\, S_1$ *s*ehingga diperoleh solusi kedua persamaan diferensial (1) adalah:

$$S_2(t) = S_1(t) \ln t + t^{x+1} \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n$$

apabila akar-akar persamaan indikator bernilai sama.

SIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulan bahwa:

1. Bentuk Solusi Deret Pangkat yang Diperluas (Metode Frobenius) di Titik Singular Sebarang persamaan diferensial yang berbentuk:

$$S'' + \frac{p(t)}{t} S' + \frac{q(t)}{t^2} S = 0$$

dimana *p(t)* dan *q(t)* analitik di $t = 0$, memiliki setidaknya satu solusi yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$S(t) = t^{x} \sum_{n=0}^{\infty} k_n t^n$$

dengan x adalah akar-akar persamaan indikator persamaan diferensial.

2. Bentuk Solusi Kedua Persamaan Diferensial Koefisien Variabel yang Saling Bebas Linear

Bentuk solusi kedua persamaan diferensial koefisien variabel yang saling bebas linear dengan $x_1 > x_2$ dimana x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan indikator $x^2 + (p_0 - 1)x + q_0 = 0$, akan memiliki solusi pertama yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$S_1(t) = t^{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} k_n t^n$$

Dan memiliki tiga kasus bentuk solusi kedua:

Kasus 1: akar-akar berbeda dan selisihnya bukan bilangan bulat.

$$S_2(t) = t^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n$$

Kasus 2: selisih kedua akarnya adalah bilangan bulat

$$S_2(t) = v\, S_1(t) \ln t + t^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n, \ (t > 0)$$

Kasus 3: akar kembar

$$S_2(t) = S_1(t) \ln t + t^{x+1} \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n, \ (t > 0)$$

Dengan $K_1, K_2, K_3, \ldots K_n$ adalah konstanta.

REFERENSI

[1] Boyce, William E. and Richard C. DiPrima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Edisi ke-7. USA: John Wiley & Sons, Inc.

[2] Kohler, W. & Lee Johnson. 2006. *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems.* Edisi ke-2. USA: Pearson Education, Inc.

[3] Nagy, Gabriel. 2012. *Ordinary Differential Equations.* Michigan State University: Mathematics Department.

[4] Rahardi, R., dkk. 2003. *Persamaan Diferensial Biasa.* Universitas Negeri malang: FMIPA.

[5] Swift, Randal J. dan Stephen A. Wirkus. 2007. *A Course in Ordinary Differential Equations.* Taylor & Francis Group: Chapman & Hall/CRC.