UNPjoMath Vol. 6 No 4 Desember 2021
ISSN:997 235516589 16-22

Matriks *Leslie* dan Aplikasinya pada Pemodelan Jumlah Populasi Perempuan di Sumatera Barat

Mayang Sugara[#1], Arnellis[*2]

[#]*Student of Mathematics Department, Universitas Negeri Padang, Indonesia*

[*]*Lecture of Mathematics Department, Universitas Negeri Padang, Indonesia*

[1]mygsgr0698@gmail.com

[2]arnellis.mathunp25@gmail.com

Abstract— *The Leslie matrix is a demographic method for calculating the number and growth rate of a population. This method was applied to determine the female population in West Sumatera. The growth of the female population in West Sumatera can affect the population because it has the nature to breed. Based on the Central Statistics Agency for West Sumatera in 2020, it was recorded the population of West Sumatera consisted of 5,534,472 people. This data has increased compared to 2010 amounting to 687,563 people. This study aims to prove the theorem of the characteristics of the Leslie matrix and application the number and rate of the female population in West Sumatera on next two years. This research is an applied research with secondary data obtained through the website of the Central Statistics Agency (BPS) and the West Sumatera Health Service. The research was conducted by proving the characteristics of the Leslie matrix and its use with a matrix size of* 16×16*and determining the eigenvalues of matrix. Based on research, it was found that the eigenvalue obtained wan* <1 *so the projection for the next two years decreased from the previous years.*

Keywords—*Leslie* Matrix, Populations Growth, application.

Abstrak— Matriks *Leslie* merupakan metode demografi untuk penghitungan jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Metode ini diaplikasikan pada penentuan jumlah populasi perempuan di Sumatera Barat. Pertumbuhan populasi perempuan di Sumatera Barat dapat mempengaruhi jumlah penduduk karena memiliki sifat untuk berkembangbiak. Berdasarkan Badan Pusat Statistik Sumatera Barat tahun 2020 tercatat bahwa penduduk Sumatera Barat terdiri dari 5,534,472 jiwa**.** Data ini mengalami kenaikan dibandingkan dengan tahun 2010 sebesar 687,563 jiwa. Penelitian ini bertujuan untuk membahas karakteristik matriks *Leslie* dan pengaplikasiannya terhadap populasi perempuan di Sumatera Barat dua tahun selanjutnya. Penelitian ini merupakan penelitian terapan dengan data sekunder yang diperoleh melalui website Badan Pusat Statistik (BPS) dan Dinas Kesehatan Sumatera Barat. Penelitian dilakukan dengan membuktikan karakteristik matriks *Leslie* dan penggunaannya dengan ukuran matriks 16×16 serta penentuan nilai eigen dari matriks. Berdasarkan penelitian diperoleh bahwa nilai eigen yang diperoleh <1 maka proyeksi untuk dua tahun selanjutnya mengalami penurunan dari tahun sebelumnya.

Kata kunci—Matriks *Leslie*, Populasi Perempuan, Aplikasi.

PENDAHULUAN

Matriks *Leslie* merupakan suatu metode yang digunakan oleh ahli demografi dalam penentuan jumlah dan laju suatu populasi[1]. Matriks *Leslie* ditemukan oleh seorang ahli ekologi pada tahun 1945 yang bernama P.H *Leslie*[2]. Matriks *Leslie* ini terfokus pada pertumbuhan populasi perempuan (betina). Pertumbuhan tersebut dipengaruhi oleh tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup populasi serta rentang umur dari populasi tersebut. Matriks *Leslie* berguna dalam penentuan proyeksi pada masa yang akan datang, sehingga matriks *Leslie* dapat diaplikasikan pada analisis jumlah dan laju penduduk perempuan. Pada penelitian ini digunakan analisis terhadap jumlah dan laju populasi perempuan di Sumatera Barat.

Berdasarkan data Sensus Penduduk Sumatera Barat tahun 2020, Provinsi Sumatera Barat memiliki 5.534.472 jiwa penduduk dengan 2.786.360 jiwa penduduk laki-laki dan 2.748.112 jiwa penduduk perempuan. Data ini, jika dibandingkan dengan Sensus Penduduk sepuluh tahun yang lalu, mengalami peningkatan sebanyak 687.563 jiwa[3]. Hal ini tentunya akan mempengaruhi pada pemerintahan, dimana pemerintah harus mempersiapkan pembangunan yang akan dilakukan pada masa yang akan datang. Peningkatan jumlah penduduk ini tentunya dipengaruhi oleh peningkatan jumlah kelahiran di Sumatera Barat.

Dimana jika angka kelahiran meningkat, otomatis jumlah penduduk juga akan meningkat. Peningkatan angka kelahiran ini tentunya juga dipengaruhi oleh meningkatnya populasi perempuan di Sumatera Barat, dimana perempuan memiliki sifat untuk berkembangbiak.Pertumbuhan populasi perempuan ini dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu kelahiran, kematian, dan penuaan. Sehingga dengan meningkatnya populasi perempuan tentu akan meningkatkan angka kelahiran di Sumatera Barat, yang mana akan mengakibatkan pada meningkatnya jumlah penduduk.

Oleh karena itu untuk mengetahui proyeksi dari jumlah dan laju populasi perempuan di Sumatera Barat dapat dilakukan dengan menggunakan matriks *Leslie* pada data penduduk perempuan di Sumatera Barat tahun 2019 dan 2020 dan menganalisis nilai eigen dari matriks sehingga memperoleh hasil proyeksi dari pertumbuhan populasi perempuan di Sumatera Barat untuk dua tahun yang akan datang. Penelitian ini menggunakan data dengan tingkat kesuburan penduduk perempuan dari rentang usia 15-49 tahun.

Pada matriks *Leslie* data penduduk perempuan dikelompokkan berdasarkan tingkat usia. Dimana akan diperoleh tingkat kesuburan dan tingkat ketahanan dari suatu populasi. Didefinisikan a_i adalah tingkat kesuburan dan b_i merupakan tingkat ketahanan hidup suatu populasi yang lahir dari kelompok i saat waktu t dan yang lahir dari kelompok i sampai $i+1$saat waktu t. Sehingga diperoleh bentuk umum model matriks *Leslie*:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

dengan batasan :

$$a_i \geq 0 \;\; untuk \;\; i = 1,2, \ldots, n$$
$$0 < b_i \leq 1 \;\; untuk \;\; i = 1,2, \ldots, n-1$$

Berdasarkan batasan tersebut diketahui bahwa tingkat kesuburan minimal adalah $a_i = 0$ dengan tidak adannya kelahiran yang terjadi dan untuk tingkat ketahanan hidup $b_i \neq 0$ karena jika $b_i = 0$ maka tidak terdapat populasi yang bertahan hidup.

Pada penelitian ini populasi perempuan dibagi berdasarkan kelas-kelas umum dalam durasi yang sama. Jika batas umur maksimal populasi perempuan adalah A yang dibagi menjadi i kelas umur, sehingga tiap kelas memiliki rentang umur $\frac{A}{i}$ tahun, yang dijelaskan pada tabel berikut:

TABEL I
PENENTUAN KELAS UMUR

Kelas umur	Rentang umur
1	$\left[0, \frac{A}{i}\right]$
2	$\left[\frac{A}{i}\right], \left[\frac{2A}{i}\right]$
3	$\left[\frac{2A}{i}\right], \left[\frac{3A}{i}\right]$
$\vdots$	$\vdots$
$(i-1)$	$\left[\frac{(i-2)A}{i}, \frac{(i-1)A}{i}\right]$
i	$\left[\frac{(i-1)A}{i}, A\right]$

Jika diketahui pada n kelas pada waktu $t = 0$, terdapat x_i^0 dengan x_1^0 untuk kelas pertama , x_2^0 untuk kelas kedua dan seterusnya. Dari n bilangan tersebut dapat dibentuk sebuah vektor kolom:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Jika terdapat x^k merupakan jumlah perempuan pada kelas umur ke $-i$ pada waktu t_k maka perempuan berada pada kelas umur pertama yaitu yang lahir antara t_{k-1}dengan t_k, sehingga

$$x_1^k = A_1^{k-1} + A_2^{k-1} + \cdots + A_n^{k-1} \qquad (3)$$

atau

$$x_1^k = a_1^{k-1} x_1^{k-1} + a_2^{k-1} x_2^{k-1} + \cdots + a_n^{k-1} x_n^{k-1} \qquad (4)$$

Selanjutnya jika Dimana $\left(1 - c_i^{k-1}\right)$ adalah jumlah perempuan pada kelompok umur ke-i pada pengamatan waktu t_{k-1} yang mampu bertahan hidup sampai ke kelompok umur ke-$(i + 1)$sampai pengamatan waktu k untuk $k = 1,2, \ldots.$ Misalkan $b_i = \left(1 - c_i^{k-1}\right)$ dengan$0 < b_i < 1$, $i = 1,2, \ldots, n$. sehingga,

$$x_{i+1}^k = b_i^{k-1} x_i^{k-1} \qquad (5)$$

Dengan persamaan (4) dan (5) diperoleh :

$$\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ x_3^{k-1} \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{bmatrix}$$

Atau

$$x^k = L x^{k-1}, \qquad k = 1,2, \ldots \qquad (6)$$

Dengan L merupakan matriks *Leslie*. Sehingga diperoleh:

$$x^1 = Lx^0$$
$$x^2 = Lx^0 = L^2x^0$$
$$x^3 = Lx^2 = L^3x^0$$
$$\vdots$$
$$x^k = Lx^{k-1} = L^kx^0 \qquad (7)^{[4]}$$

Sehingga jika diketahui distribusi umur awal x^0 dan matriks *LeslieL*, maka dapat ditentukan distribusi umur perempuan pada sebarang waktu di masa mendatang[5].

Dalam proyeksi laju pertumbuhan perempuan di lakukan dengan penentuan nilai eigen dari matriks *Leslie*. Nilai eigen yang digunakan adalah nilai eigen positif dan dominan. Dalam hal ini terdapat tiga kasus yaitu 1) jika $\lambda_1 > 1$ maka laju pertumbuhan populasi akan naik, 2) jika $\lambda_1 = 1$ maka laju pertumbuhan populasi stabil/tetap, dan 3) jika $\lambda_1 < 1$ maka laju pertumbuhan populasi menurun[6].

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian terapan, yaitu suatu penelitian yang bertujuan untuk menyelesaikan permasalah kehidupan secara praktis. Penelitian ini dilakukan dengan studi kepustakaan dan diikuti dengan pengambilan data. Data yang digunakan adalah data kuantitatif dengan sumber data sekunder. Penelitian ini menggunakan data Penduduk Sumatera Barat pada tahun 2019 dan 2020 yang diperoleh melalui website resmi Badan Pusat Statistik (BPS) dan melalui Dinas Kesehatan Sumatera Barat. Pada penelitian ini, digunakan metode sebagai berikut:

1. Menentukan pembuktian karakteristik Matriks *Leslie*, dengan cara:
   a) Membuktikan teorema Matriks *Leslie*
   b) Melakukan pembuktian dengan membandingkan persamaan yang diperoleh dan mengurangi persamaan tersebut dengan menganggap bahwa nilai $\lambda \neq 0$.
2. Mencari data penduduk pada Badan Pusat Statistik
3. Mengambil data penduduk perempuan beserta tingkatan umur
4. Menentukan kelas-kelas umur
5. Membentuk model matriks *Leslie*
   a) mencari nilai tingkat kesuburan (a_i) yaitu rata-rata jumlah anak perempuan yang lahir dari tiap perempuan ketika si ibu berada dalam kelas umur ke-i dengan menggunakan persamaan:
   $$a_i = \frac{A_i}{x_i}$$
   b) mencari nilai tingkat ketahanan hidup (b_i) yaitu perbandingan perempuan pada kelas umur ke-i yang diharapkan dapat bertahan da mencapai kelas umur ke-$(i+1)$dengan menggunakan persamaan:
   $$b_i = \left(1 - c_i^{k-1}\right)$$
   c) Menentukan matriks *Leslie*
6. Menentukan nilai eigen dari matriks *Leslie* dengan menggunakan rumus (7) untuk memproyeksi laju pertumbuhan populasi.
   Dari nilai eigen dicari nilai positif. Tiga kasus yang muncul berkaitan dengan nilai dari nilai eigen positif λ_1:
   a) Suatu populasi akhirnya meningkat jika $\lambda_1 > 1$
   b) Suatu populasi akhirnya berkurang jika $\lambda_1 < 1$
   c) Suatu populasi cenderung stabil jika $\lambda_1 = 1$
7. Analisis data yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Karakteristik Matriks Leslie*

Teorema

Sebuah matriks *Leslie* L mempunyai sebuah nilai eigen positif yang unik λ_1. Nilai eigen ini mempunyai kelipatan 1 dan mempunyai sebuah vektor eigen x_1 yang entrinya adalah positif.

Bukti:

Diketahui $p(\lambda) = \det(\lambda I - 1) = 0$

Maka

$$p(\lambda) = \det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}\right)$$

dengan pengurangan maka diperoleh

$$p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 - a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & \lambda_n \end{bmatrix}\right)$$

Diketahui bahwa $p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$

Dengan melakukan penjabaran persamaan diatas maka diperoleh :

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} = 0$$

Dengan melakukan pemindahan ruas sehingga diperoleh :

$$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3b_1b_2\lambda^{n-3} + \cdots + a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}$$

Pada teorema diketahui bahwa nilai eigen memiliki kelipatan 1, maka untuk pembuktian tersebut dilakukan dengan membagi persamaan diatas deng λ^n maka akan diperoleh :

$$1 = \frac{a_1\lambda^{n-1}}{\lambda^n} + \frac{a_2\lambda^{n-2}}{\lambda^n} + \frac{a_3b_1b_2\lambda^{n-3}}{\lambda^n} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

Dimisalkan bahwa

$$q(\lambda) = \frac{a_1\lambda^{n-1}}{\lambda^n} + \frac{a_2\lambda^{n-2}}{\lambda^n} + \frac{a_3b_1b_2\lambda^{n-3}}{\lambda^n} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

Maka diperoleh $q(\lambda) = 1, \lambda \neq 0$

Untuk membuktikan bahwa persamaan tersebut benar maka dilakukan

1. Bandingkan $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$

$$\frac{a_1}{\lambda_1^1} + \frac{a_2}{\lambda_1^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda_1^3} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_1^n} = \frac{a_1}{\lambda_2^1} + \frac{a_2}{\lambda_2^2} + \frac{a_3b_1b_2}{\lambda_2^3} + \cdots + \frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_2^n}$$

2. Pengurangan terhadap q(λ_1)-q(λ_2)=0

$$\frac{a_1}{\lambda_1^1}+\frac{a_2}{\lambda_1^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda_1^3}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_1^n}=\frac{a_1}{\lambda_2^1}+\frac{a_2}{\lambda_2^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda_2^3}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_2^n}$$

$$a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}=a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}$$

$$\left(\frac{a_1}{\lambda_1^1}+\frac{a_2}{\lambda_1^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda_1^3}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_1^n}\right)-\left(\frac{a_1}{\lambda_2^1}+\frac{a_2}{\lambda_2^2}+\frac{a_3b_1b_2}{\lambda_2^3}+\cdots+\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_2^n}\right)=0$$

$$\left(\frac{a_1}{\lambda_1^1}-\frac{a_1}{\lambda_2^1}\right)+\left(\frac{a_2}{\lambda_1^2}-\frac{a_2}{\lambda_2^1}\right)+\left(\frac{a_3b_1b_2}{\lambda_1^3}-\frac{a_3b_1b_2}{\lambda_2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_1^n}-\frac{a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}}{\lambda_2^n}\right)=0$$

$$a_1\left(\frac{\lambda_2^1-\lambda_1^1}{\lambda_1^1\lambda_2^1}\right)+a_2\left(\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_1^1\lambda_2^1}\right)+a_3b_1b_2\left(\frac{\lambda_2^3-\lambda_1^3}{\lambda_1^1\lambda_2^1}\right)+\cdots+a_nb_1b_2\cdots b_{n-1}\left(\frac{\lambda_2^n-\lambda_1^n}{\lambda_1^1\lambda_2^1}\right)=0$$

$0=0$ terbukti.

Jadi, terbukti bahwa q(λ)=1 dan $\lambda\neq0$. Maka terbukti bahwa matriks *Leslie* memiliki nilai eigen yang positif dan unik.

B. *Aplikasi Matriks Leslie*

1) Data yang digunakan

Pada penelitian ini data yang digunakan meliputi data jumlah penduduk perempuan di Sumatera Barat tahun 2019 dan 2020 yang dikelompokkan berdasarkan tingkat usia, jumlah kelahiran perempuan dan jumlah kematian penduduk di Sumatera Barat. Data yang digunakan dapat dilihat pada tabel I dan tabel II berikut:

TABEL II
DATA JUMLAH PENDUDUK PEREMPUAN DI SUMATERA BARAT TAHUN 2019-2020

kelas umur	jumlah perempuan tahun 2019	jumlah perempuan tahun 2020
0 - 4	263,450	261,888
5 - 9	266,597	266,239
10-14	255,026	258,512
15-19	239,435	241,159
20-24	223,134	225,638
25-29	202,424	202,837
30-34	194,814	195,924
35-39	185,272	186,668
40-44	177,137	179,178
45-49	161,100	163,784
50-54	143,382	145,508
55-59	129,016	130,702
60-64	107,704	111,240
65-69	73,056	78,135
70-74	46,380	47,771
75+	61,498	62,031
Total	2,729,425	2,757,214

TABEL III
DATA PENDUDUK PEREMPUAN BERDASARKAN TINGKAT USIA DAN JUMLAH KELAHIRAN BERDASARKAN ASFR SUMATERA BARAT

kelas umur	jumlah perempuan tahun 2019	Jumlah anak yang lahir pada tahun 2019-2020	jumlah perempuan tahun 2020
0 – 4	263,450	0	261,888
5 – 9	266,597	0	266,239
10-14	255,026	0	258,512
15-19	239,435	10,618	241,159
20-24	223,134	15,535	225,638
25-29	202,424	25,604	202,837
30-34	194,814	19,761	195,924
35-39	185,272	12,821	186,668
40-44	177,137	4,244	179,178
45-49	161,100	4,158	163,784
50-54	143,382	0	145,508
55-59	129,016	0	130,702
60-64	107,704	0	111,240
65-69	73,056	0	78,135
70-74	46,380	0	47,771
75+	61,498	0	62,031

Model matriks *Leslie* merupakan suatu matriks berukuran persegi yang entri-entrinya terdiri dari baris pertama merupakan tingkat kesuburan penduduk (a_i) dan diagonal merupakan tingkat ketahanan hidup (b_i). Pada table III diperoleh data untuk pembentukan model matriks *Leslie*.

TABEL IV
TINGKAT KESUBURAN DAN KETAHANAN PENDUDUK PEREMPUAN DI SUMATERA BARAT PADA TAHUN 2019 DAN 2020

Kelas Umur (i)	**Tingkat Kesuburan (a_i)**	**Rata-rata Kematian (c_i^{k-1})**	**Tingkat Ketahanan (b_i)**
1	0	0.00024	0.99976
2	0	0.00053	0.99946
3	0	0.00047	0.99953
4	0.04435	0.00050	0.99950
5	0.06962	0.00033	0.99967
6	0.12649	0.00022	0.99978
7	0.10144	0.00082	0.99918
8	0.06920	0.00047	0.99953
9	0.02396	0.00025	0.99975
10	0.02581	0.00035	0.99965
11	0	0.00087	0.99913
12	0	0.00093	0.99907
13	0	0.00140	0.99860
14	0	0.00045	0.99955
15	0	0.00121	0.99879
16	0	0.00046	0.99954

C. Hasil Penelitian

Dalam penelitian ini kan dilakukan pembentukan matriks *Leslie*,dimana entri-entri dari elemen-elemen matriks adalah nilai dari tingkat kesuburan populasi perempuan untuk baris pertama pada matriks dan tingkat ketahanan populasi perempuan pada bagian diagonal matriks. Matriks yang dibentuk adalah matriks berukuran 16 x 16. Berdasarkan data pada tabel IV, maka diperoleh matriks *Leslie* sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.04435 & 0.06962 & 0.12649 & 0.10144 & 0.06920 & 0.02396 & 0.02581 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.99976 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.99946 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.99953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.99950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.99967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99918 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99907 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99860 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99955 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99879 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari model matriks *Leslie* diatas dapat ditentukan proyeksi penduduk Sumatera Barat untuk dua tahun yang akan datang dengan menggunakan persamaan, sehingga diperoleh:

$$x^1 = Lx^0$$

$$x^1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.04435 & 0.06962 & 0.12649 & 0.10144 & 0.06920 & 0.02396 & 0.02581 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.99976 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.99946 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.99953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.99950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.99967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99918 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99907 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99860 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99955 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99879 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
261{,}888 \\ 266{,}239 \\ 258{,}512 \\ 241{,}159 \\ 225{,}638 \\ 202{,}837 \\ 195{,}924 \\ 186{,}668 \\ 179{,}178 \\ 163{,}784 \\ 145{,}508 \\ 130{,}702 \\ 111{,}240 \\ 78{,}135 \\ 47{,}771 \\ 62{,}031
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
93373.49742 \\
26181.71488 \\
2.660952309\ 10^5 \\
2.583904994\ 10^5 \\
2.410384205\ 10^5 \\
2.255635395\ 10^5 \\
0.027923759\ 10^5 \\
1.957633423\ 10^5 \\
1.865802660\ 10^5 \\
1.791332055\ 10^5 \\
1.637266756\ 10^5 \\
1.453814080\ 10^5 \\
1.305804471\ 10^5 \\
1.110842640\ 10^5 \\
78099.83925 \\
47713.19709
\end{bmatrix}$$

Memproyeksikan jumlah penduduk yang akan datang, dapat dilakukan dengan menjumlahkan semua hasil kali matriks diatas. Sehingga diperoleh:

$x^1 = 93373.4974 + 261825.1469 + 266095.2309 + 258390.4994 + 241038.4205 + 225563.5395 + 202795.3759 + 195763.3423 + 186580.2660 + 179133.2055 + 163726.6756 + 1453742.1430 + 130580.4471 + 111084.2640 + 78099.8393 + 47713.1971 = 2551497.91334.$

Untuk satu tahun pertama diperoleh x^1=2551497.91334. Pada penelitian ini, untuk proyeksi dua tahun yang akan datang maka diperoleh:

x^2

$$
= \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.04435 & 0.06962 & 0.12649 & 0.10144 & 0.06920 & 0.02396 & 0.02581 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.99976 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.99946 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.99953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.99950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.99967 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99978 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99918 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99953 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99907 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99860 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99955 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99879 & 0
\end{bmatrix}^2
\begin{bmatrix} 261,888 \\ 266,239 \\ 258,512 \\ 241,159 \\ 225,638 \\ 202,837 \\ 195,924 \\ 186,668 \\ 179,178 \\ 163,784 \\ 145,508 \\ 130,702 \\ 111,240 \\ 78,135 \\ 47,771 \\ 62,031 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 99984.2187 \\ 93351.08778 \\ 26167.57675 \\ 265970.1662 \\ 258261.3041 \\ 240958.8778 \\ 225513.9155 \\ 202626.0861 \\ 195671.3335 \\ 185633.6210 \\ 179070.5089 \\ 163584.2334 \\ 145246.2033 \\ 130397.6345 \\ 111034.2761 \\ 78005.33844 \end{bmatrix}
$$

Hasil proyeksi dua tahun yang akan datang diperoleh dengan menjumlahkan matriks kolom diatas, maka:

$$x^2 = 99984.2187 + 93351.0878 + 261683.7613 + 265970.1662 + 258261.3041 + 240958.8778 + 225513.9155 + 202626.0861 + 195671.3335 + 186533.6210 + 179070.5089 + 163584.2334 + 1452390.1628 + 130397.6345 + 111034.2761 + 78005.33844 = 2601476.38207$$

Sehingga diperoleh untuk proyeksi dua tahun yang akan datang diperoleh x^2=2601476.38207. Berdasarkan nilai dari x^1 dan x^2 diketahui bahwa untuk prediksi jumlah penduduk mengalami penurunan.

Dalam proyeksi laju penduduk dapat dilihat dari nilai eigen yang diperoleh dengan menggunakan penghitungan dengan aplikasi Maple, nilai eigen yang diperoleh adalah:

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.890479507306083 \\ 0.481934023474350 + 0.579507602930756I \\ 0.481934023474350 - 0.579507602930756I \\ 0.167746153625985 + 0.568004693434179I \\ 0.16776153625985 - 0.568004693434179I \\ -0.207430783488481 + 0.644258635948154I \\ 0.207430783488481 - 0.644258635948154I \\ -0.532525101420639 + 0.402439969633859I \\ -0.53252510142039 - 0.402439969633859I \\ -0.709928091688511 \end{bmatrix}
$$

Diketahui bahwa nilai eigen positif yang dominan adalah 0.890479507306083. Pemilihan nilai eigen ini berdasarkan angka mutlak terbesar dari nilai eigen yang diperoleh. Berdasarkan nilai eigen tersebut dapat disimpulkan bahwa angka ini <1 sehingga untuk laju penduduk dua tahun yang akan datang mengalami penurunan dari tahun sebelumnya.

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang dilakukan diperoleh bahwa terbukti bahwa karakteristik matriks *Leslie* bernilai positif dengan kelipatan 1 dan jumlah populasi perempuan di Sumatera Barat untuk dua tahun yang akan datang yaitu tahun 2022 mengalami penurunan dari tahun sebelumnya yaitu tahun 2019 dan 2020 yaitu menjadi 2,601,477 jiwa. Sedangkan untuk laju populasi perempuan di Sumatera Barat juga mengalami penurunan. Hal ini ditandai dengan nilai eigen yang diperoleh lebih kecil dari 1.

REFERENSI

[1] Sukmanaputri, Dewi. 2019. "Aplikasi Matriks *Leslie* untuk Meprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Populasi Perempuan". Skripsi. Sains dan Teknologi. Matematika. Universitas Sanata Dharma. Yogyakarta.

[2] Fitriani. 2016. "Proyeksi Matriks *Leslie* Pada Laju Pertumbuhan Populasi (Studi Kasus :Pertumbuhan Populasi Di Dusun

Marannu)" skripsi. Sains dan Teknologi. Matematika. universitas Islam Negeri Alauddin Makassar: Makassar.
[3] Hasil Sensus Penduduk Sumatera Barat 2020.http://sumbar.bps.go.id. (diakses 23 Maret 2021).
[4] Lomansyah, Urva. 2008. Model Populasi Hewan Betina pada Usia Tertentu. Skripsi. Matematika. Universitas Negeri Padang. Padang.
[5] Anggreini, Dewi dan Ratri Candra Hastari, "*Leslie* Matrix Application in Determining Number and Growth Rate of Female Population," in *Proc. SCI.ENGIN'17*, 2017, paper 1, p. 165-170.
[6] C. M. Corazon, Yuslenita Muda, dan Nurul Hasanah. 2016. Aplikasi Matriks *Leslie* Untuk Memprediksi Jumlah Dan Laju Pertumbuhan Perempuan Di Provinsi Riau Pada Tahun 2017. Jurnal Sains dan Statistika. Vol.02, No.I. hal.163-172.