UNPjoMath Vol. 6 No 4 Desember 2021
ISSN:997 235516589 1-8

Model Matematika Penyebaran Penyakit Tungro pada Tanaman Padi dengan Vektor Wereng Hijau *Nephotettix virescens*

Dwi Shinta Kumala Ningsih#1, Dewi Murni*2

#*Student of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia*

**Lecturer of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia*

1dwishinta21074@gmail.com

2dewimunp@gimail.com

Abstract — Tungro is a disease of rice plants caused by *Rice Tungro Spherical Virus* (RTSV) and *Rice Tungro Bacilliform Virus* (RTBV). The green leafhopper *Nephotettix virescens* is a vector of this disease. The purpose of this study was to determine the form of a mathematical model of the spread of tungro disease by using predators to control its spread and interpret the results of the analysis. The form of the mathematical model is SEI-SIP. This research is a basic or theoretical research. The results of model analysis obtained two fixed points free of disease and two fixed points endemic to spread of tungro. The stability analysis resulted in basic reproduction which interpreted that the high rate of disease transmission, vector suction power and the transition rate from *exposed* to *infected* would result in an outbreak of disease, low predator mortality and high predation rates would reduce the spread of tungro.

Keywords — Tungro, Host and Vector Model, Predators

Abstrak —Penyakit tungro adalah penyakit tanaman padi yang disebabkan *Rice Tungro Spherical virus* (RTSV) dan *Rice Tungro Bacilliform Virus* (RTBV). Wereng hijau *Nephotettix virescens* merupakan vektor dari penyakit ini. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk model matematika penyebaran penyakit tungro dengan menggunakan predator sebagai pengendalian penyebarannya dan menginterpretasikan hasil analisisnya. Bentuk model matematika yaitu SEI-SIP. Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis. Hasil analisis model didapatkan dua titik tetap bebas penyakit dan dua titik tetap endemik penyebaran penyakit tungro. Analisis kestabilan menghasilkan bilangan reproduksi dasar yang menginterpretasikan bahwa tingginya tingkat transmisi penyakit, daya hisap vektor dan tingkat transisi dari exposed ke infected maka penyakit akan mewabah, rendahnya tingkat kematian predator dan tingginya tingkat predasi akan mengurangi penyabaran penyakit tungro.

Kata kunci — Tungro, Model Host dan Vektor, Predator

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakam bidang kajian matematika bertujuan menjelaskan masalah didunia nyata ke bentuk matematika. Masalah yang terjadi didalam kehidupan sehari-hari bisa dipresentasikan kedalam bentuk matematika[1]. Salah satu model matematika yang diterapkan dalam kehidupan didunia nyata dapat dilihat pada bidang biologi yaitu penyebaran penyakit pada tanaman padi.

Salah satu penyakit pada tanaman padi yaitu penyakit tungro. Penyakit tungro disebabkan *Rice Tungro Spherical Virus* (RTSV) dan *rice tungro bacilliform virus* (RTBV). Penyakit tungro dapat menyerang tanaman mulai dari persemaian, pada saat persemaian ini tanaman sangat sensitif terhadap serangan penyakit [2]. Penyakit tungro disebarkan melalui vektor yaitu wereng hijau *Nephitettix virescens*. Virus tungro didalam tubuh vektor tidak mengalami masa inkubasi yang jelas, sedangkan masa inkubasi penyakit tungro dalam tanaman padi yaitu 6-15 hari [3].

Tanaman padi yang diserang tungro akan tumbuh kerdil dan anakannya berkurang, daun muda yang baru muncul mengalami kegagalan pembentukan klorofil sehingga warnanya tidak hijau akan tetapi kuning atau pucat, berbintik, bergaris-garis hijau pucat hingga hijau keputihan, akar tanaman perkembangannya akan terhambat, tanaman muda bisa mati, malai kecil dengan bulir-bulir gabah yang kosong dan mengelompok mengakibatkan tinggi tanaman tidak sama atau bergelombang [4]. Penyebaran penyakit tungro dapat dikendalikan dengan memanfaatkan musuh alami dari wereng hijau sebagai vektor penyakit tungro. Beberapa musuh alami dari wereng hijau yaitu laba-laba serigala, kepikik mirid, dan kepik permukaan air. Di antara musuh alami vektor tersebut yang mudah untuk dikembangbiakan yaitu jenis kepik [5].

Pemodelan matematika penyebaran penyakit tungro sudah pernah diteliti sebelumnya. Pada tahun 2020 oleh Landita tantang model SI pada populasi tanaman padi dan dilengkapi populasi wereng hijau, dan populasi predator [6]. Masih ditahun yang sama dilakukan penelitian oleh

Suryaningrat tentang model SI pada penyebaran penyakit tungro untuk dua populasi yaitu populasi tanaman padi dan populasi vektor dan ditambah populasi predator sebagai metode pengendalian [7]. Oleh sebab itu , dalam penelitian ini dibangun model matematika dengan memperhatikan masa inkubasi penyakit pada tanaman padi sehingga dimunculkan kompartemen *Exposed*, sehingga model untuk populasi vektor SEI, untuk populasi vektor dibentuk model SI dan ditambahkan populasi predator (P) sebagai metode pengendalian.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dasar atau teoritis dengan menggunakan metode deskriptif. Penelitian dimulai dengan mengidentifikasi masalah penyebaran penyakit tungro pada tanaman padi dengan vektor *Nephotettix virescens*, mengumpulkan teori-teori yang relavan dengan masalah penyebaran penyakit tersebut, selanjutnya adalah menentukan metode yang sesuai dengan permasalahan penyebaran penyakit tersebut.

Langkah selanjutnya dalam proses tersebut adalah:

1. Menentukan asumsi, variabel, dan parameter model matematika penyebaran penyakit tungro pada tanaman padi dengan vektor wereng hijau *Nephotettix virescens.*
2. Membentuk model matematika penyebaran penyakit tungro.
3. Menganalisis titik ekuilibrium penyebaran penyakit tungro.
4. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium penyebaran penyakit tungro.
5. Menginterpretasikan hasil analisis model matematika tersebut.
6. Melakukan simulasi model matematika penyakit tungro.
7. Membuat kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Model Matematika Penyebaran Penyakit Tungro pada Tanaman Padi dengan Vektor Nephotettix virescens*

Berdasarkan tahapan-tahapan dalam membangun sebuah model matematika, tahapan pertama yaitu mengidentifikasi masalah yang diperoleh dari berbagai pertanyaan yang berhubungan dengan masalah tersebut.

Tahapan ini dilakukan dengan menentukan faktor-faktor yang dianggap penting atau sesuai dengan permasalahan yang meliputi identifikasi variabel, parameter, dan membentuk hubungan antara variabel dan parameter tersebut.

Asumsi-asumsi digunakan untuk membentuk model ini yaitu:

1. Populasi konstan, total populasi manusia dan populasi vektor konstan
2. Populasi tertutup, artinya tidak ada invidu yang melakukan imigrasi dan emigrasi.
3. Tingkat penanaman kembali atau anakan tanaman dan kelahiran vektor memasuki kompartemen yang rentan.
4. Tidak adanya kematian vektor akibat terinfeksi virus tungro.
5. Vektor rentan terinfeksi dengan mengisap tanaman yang terinfeksi.
6. Tanaman rentan terinfeksi melalui vektor yang terinfeksi.
7. Setelah kontak dengan vektor terinfeksi tanaman rentan mengalami masa expose.
8. Tanaman dan vektor yang terinfeksi tidak dapat sembuh.
9. Pada masa inkubasi tanaman tidak dapat menginfeksi vektor.
10. Adanya kematian pada tanaman akibat terinfeksi virus.
11. Predator hanya mendapat makanan dari vektor atau vektor merupakan sumber makanan satu-satunya bagi predator.

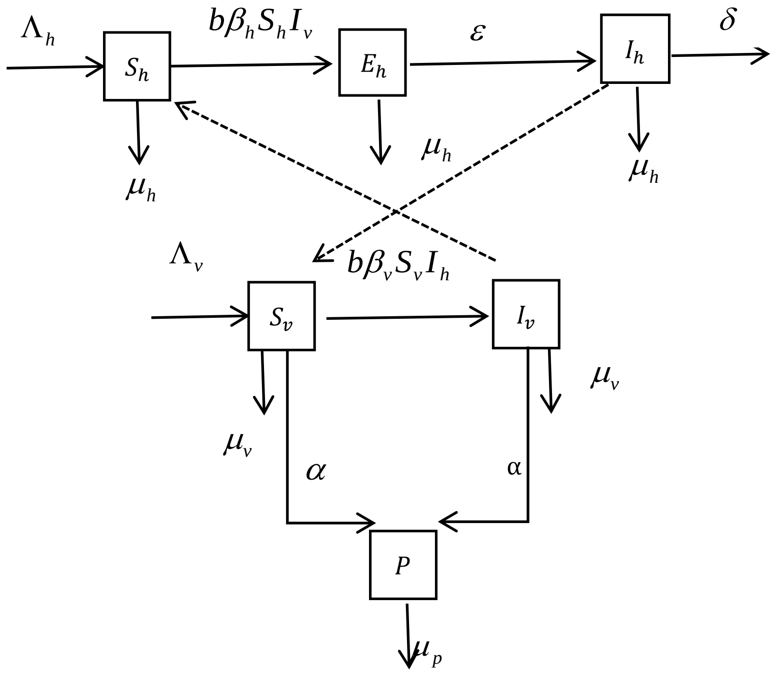
Variabel-variabel yang digunakan untuk membentuk model matematika penyebaran pengguna narkoba adalah:

1. *Susceptible* S_h, kelompok tanaman padi yang rentan terserang penyakit tungro.
2. *Exposed* E_h, kelompok tanaman padi dalam masa inkubasi.
3. *Infected* I_h, kelompok tanaman padi yang terinfeksi penyakit tungro.
4. *Susceptible* S_v, kelompok vektor yang rentan terserang penyakit tungro.
5. *Infected* I_v, kelompok vektor yang terinfeksi penyakit tungro.
6. Predator P, kelompok musuh alami dari vektor.

Parameter yang digunakan adalah:

1. Λ_h adalah jumlah anakan atau tingkat penanaman kembali tanaman padi.
2. Λ_v adalah tingkat kelahiran vektor.
3. μ_h adalah tingkat kematian tanaman padi.
4. μ_v adalah tingkat kematian alami vektor.
5. b adalah daya hisap vektor.
6. β_h adalah laju penularan penyakit dari vektor ke tanaman.
7. β_v adalah tingkatpenularan penyakit dari tanaman ke vektor.
8. b adalah tingkat kematian tanaman karena terinfeksi penyakit tungro.
9. Λ_p adalah efesiensi pemangsaan vektor oleh predator.
10. α adalah tingkat predasi dari predator.
11. ε adalah laju transisi dari tanaman *exposed* ke tanaman *infected.*

Berdasarkan asumsi-asumsi yang diberikan, maka dapat dibentuk diagram model matematika, seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Model Matematika Penyebaran Penyakit Tungro

Diagram model pada Gambar 1 menjelaskan tanaman padi rentan yang kontak dengan vektor terinfeksi akan mengalami masa inkubasi, setelah melewati masa inkubasi akan masuk ke kompartemen *infected*, untuk populasi vektor, vektor rentan akan terinfeksi jika kontak dengan tanaman padi terinfeksi, dan untuk populasi predator akan bertambah karena adanya tinggat kelahiran akibat memakan vektor.

Berdasarkan Gambar 1 dibentuk model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - b\beta_h S_h I_v - \mu_h S_h$$
$$\frac{dE_h}{dt} = b\beta_h S_h I_v - \varepsilon E_h - \mu_h E_h$$
$$\frac{dI_h}{dt} = \varepsilon E_h - \delta I_h - \mu_h I_h$$
$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - b\beta_v S_v I_h - \mu_v S_v - \alpha P S_v$$
$$\frac{dI_v}{dt} = b\beta_v S_v I_h - \mu_v I_v - \alpha P I_v$$
$$\frac{dP}{dt} = \Lambda_p \alpha P(S_v + I_v) - \mu_p P$$

Untuk mempermudah analisis maka akan dimisalkan sebagai berikut:

$$K = \varepsilon + \mu_h \text{ dan} L = \delta + \mu_h$$

Sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h - b\beta_h S_h I_v - \mu_h S_h \quad (1)$$
$$\frac{dE_h}{dt} = b\beta_h S_h I_v - K E_h \quad (2)$$
$$\frac{dI_h}{dt} = \varepsilon E_h - L I_h \quad (3)$$
$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - b\beta_v S_v I_h - \mu_v S_v - \alpha P S_v \quad (4)$$
$$\frac{dI_v}{dt} = b\beta_v S_v I_h - \mu_v I_v - \alpha P I_v \quad (5)$$
$$\frac{dP}{dt} = \Lambda_p \alpha P(S_v + I_v) - \mu_p P \quad (6)$$

B. *Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Tungro pada Tanaman Padi dengan Vektor Wereng Hijau Nephotettix virescens*

Dari model yang didapatkan akan dilakukan analisis model sehingga diperoleh titik tetap model.

1) Titik Ekuilibrium Bebas Penyebaran Penyakit

Titik ekuilibrium bebas dari penyebaran penyakit tungro yaitu kondisi didalam sebuah populasi tidak terjadi penyebaran penyakit. Secara matematis dapat diekspresikan dengan: $S_h > 0, E_h = 0, I_h = 0, S_v > 0, I_v = 0$ dan P dua keadaan yaitu $P = 0$ dan $P > 0$ Maka titik tetap bebas penyebaran penyakit tungro adalah:

$$T_0 = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, 0, 0\right)$$
$$T_1 = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, \frac{\mu_p}{\Lambda_p \alpha}, 0, \frac{\alpha \Lambda_v \Lambda_p - \mu_v \mu_p}{\mu_p}\right)$$

2) Titik Ekuilibrium Endemik Penyebaran Penyakit

Titik ekuilibrium endemik berarti terdapat sejumlah individu yang terinfeksi penyakit tungro dalam populasi.

Secara matematis dapat diekspresikan dengan: $\mathrm{S_h} > 0, \mathrm{E_h} > 0, \mathrm{I_h} > 0, \mathrm{S_v} > 0, \mathrm{I_v} > 0$ dan P dua keadaan yaitu $P > 0$ dan $P = 0$. Maka diperoleh titik ekuilibrium endemik penyebaran penyakit tungro adalah:

$$T_2 = ({S_h}^*, {E_h}^*, {I_h}^*, {S_v}^*, {I_v}^*, P^*)$$

$${S_h}^* = \frac{\Lambda_p\alpha(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_v)}{b\beta_v\varepsilon\mu_p(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)}$$

$${E_h}^* = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h{\mu_p}^2 - KL\alpha^2\Lambda_v{\Lambda_p}^2\mu_h}{b\beta_v\varepsilon\mu_p(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)K}$$

$${I_h}^* = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h{\mu_p}^2 - KL\alpha^2\Lambda_v{\Lambda_p}^2\mu_h}{b\beta_v\mu_p(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)KL}$$

$${S_v}^* = \frac{KL\Lambda_v(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)}{\beta_h(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_p)b}$$

$${I_v}^* = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h{\mu_p}^2 - KL\alpha^2\Lambda_v{\Lambda_p}^2\mu_h}{\beta_h(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_p)b\Lambda_p\alpha}$$

$$P^* = \frac{\alpha\Lambda_v\Lambda_p - \mu_v\mu_p}{\alpha\mu_p}$$

$$T_3 = ({S_h}^*, {E_h}^*, {I_h}^*, {S_v}^*, {I_v}^*, 0)$$

$${S_h}^* = \frac{\mu_v(b\beta_v\varepsilon\Lambda_h + KL\mu_v)}{\varepsilon b\beta_v(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)}$$

$${E_h}^* = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h\Lambda_v - KL\mu_h{\mu_v}^2}{b\varepsilon\beta_v(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)A}$$

$${I_h}^* = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h\Lambda_v - KL\mu_h{\mu_v}^2}{b\beta_v(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)KL}$$

$${S_v}^* = \frac{KL(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)}{(b\beta_v\varepsilon\Lambda_h + KL\mu_v)b\beta_h}$$

$${I_v}^* = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h\Lambda_v - KL\mu_h{\mu_v}^2}{(b\beta_v\Lambda_h + AB\mu_v)\mu_v\beta_h b}$$

$$P^* = 0$$

3) Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi endemik atau tidak. Dengan metode NGM didapatkan Bilangan Reproduksi sebesar:

$$R_0 = \sqrt{\frac{b^2\beta_h\beta_v\Lambda_h\varepsilon\mu_p}{\mu_h\mu_v\alpha\Lambda_p(\varepsilon + \mu_h)(\mu_h + \delta)(\mu_v + \frac{\alpha\Lambda_v\Lambda_p - \mu_v\mu_p}{\mu_p})}}$$

Setelah didapatkan titik tetap model maka akan di analisis kestabilan dari setiap titik tetap.

4) Kestabilan Model Matematika Matematika Penyebaran Penyakit Tungto pada Tanaman Padi

Analisis pada kestabilan titik tetap dicari dengan cara mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada persamaan (1), (2), (3), (4), (5) dan (6). Sehingga matriks Jacobian yang akan terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -b\beta_h I_v - \mu_h & 0 & 0 & 0 & -b\beta_h S_v & 0 \\ b\beta_h I_v & -K & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \varepsilon & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\beta_v S_v & -b\beta_v I_h - D & 0 & \alpha S_v \\ 0 & 0 & b\beta_v S_v & b\beta_v I_h & -D & \alpha I_v \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_p\alpha P & \Lambda_p\alpha P & -C \end{bmatrix}$$

keterangan: $C = -\Lambda_p\alpha(S_v + I_v) + \mu_p$

$$D = \mu_v + \alpha P$$

Karena terdapat dua jenis titik ekuilibrium, maka analisis kestabilan titik ekuilibrium juga dilakukan pada kedua jenis titik ekuilibrium tersebut.

a. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Kestabilan titik ekuilibrium bebas pada penyebaran tungro dibutuhkan nilai eigen. Titik ekuilibrium dikatakan stabil jika semua nilai eigennya bernilai negatif. Matriks Jacobian pada titik bebas penyakit ini adalah:

$$J(T_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & -b\beta_v\frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & -K & 0 & 0 & b\beta_v\frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\beta_v\frac{\Lambda_v}{\mu_v} & -\mu_v & 0 & \alpha\frac{\Lambda_v}{\mu_v} \\ 0 & 0 & b\beta_v\frac{\Lambda_v}{\mu_v} & 0 & -\mu_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \end{bmatrix}$$

keterangan: $C = -\Lambda_p\alpha\frac{\Lambda_v}{\mu_v} + \mu_p$

Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J, maka berlaku:

$$\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{J}) = 0 \text{ atau } |\lambda I - J| = 0$$

Pandang $|\lambda I - J| = 0$

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda + \mu_h & 0 & 0 & 0 & b\beta_v\frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & \lambda + K & 0 & 0 & -b\beta_v\frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \lambda + L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\beta_v\frac{\Lambda_v}{\mu_v} & \lambda + \mu_v & 0 & -\alpha\frac{\Lambda_v}{\mu_v} \\ 0 & 0 & -b\beta_v\frac{\Lambda_v}{\mu_v} & 0 & \lambda + \mu_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + C \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga persamaan yang terbentuk karakteristik dari matriks $\mathrm{J}(\mathrm{T}_0)$ adalah:

$$(\lambda + \mu_h)(\lambda + K)(\lambda + L)(\lambda + \mu_v)(\lambda + \mu_v)(\lambda + C) = 0$$

Maka nilai eigen yang didapatkan dari matriks jacobian tersebut adalah:

$\lambda_1 = -\mu_h$ maka $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = -K$ maka $\lambda_2 < 0$
$\lambda_3 = -L$ maka $\lambda_3 < 0$, $\lambda_4 = -\mu_v$ maka $\lambda_4 < 0$
$\lambda_5 = -C$ maka $\lambda_5 < 0$

Jadi, λ_5 akan bernilai negatif jika $\mu_p > \Lambda_p\alpha\frac{\Lambda_v}{\mu_v}$. Hal ini berarti bahwa titik tetap bebas penyakit T_0 stabil asimtotik, yang berarti bahwa penyakit tungro dalam waktu tertentu akan menghilang.

$$J(T_1) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & -b\beta_v\frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & -K & 0 & 0 & b\beta_v\frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\beta_v\frac{\mu_p}{\Lambda_p\alpha} & -\mu_v - \alpha X & 0 & \frac{\mu_p}{\Lambda_p} \\ 0 & 0 & b\beta_v\frac{\mu_p}{\Lambda_p\alpha} & 0 & -\mu_v - \alpha X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_p\alpha X & \Lambda_p\alpha X & 0 \end{bmatrix}$$

Keterangan: $X = \frac{\alpha\Lambda_v\Lambda_p - \mu_v\mu_p}{\alpha\mu_p}$

Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J, maka berlaku:

$$\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{J}) = 0 \text{atau } |\lambda I - J| = 0$$

Pandang $|\lambda I - J| = 0$

ISSN:997 235516589 1-8

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda+\mu_h & 0 & 0 & 0 & b\beta_v \frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & \lambda+K & 0 & 0 & -b\beta_v \frac{\Lambda_h}{\mu_h} & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda+L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\beta_v \frac{\mu_p}{\Lambda_p \alpha} & \lambda+\mu_v+\alpha X & 0 & -\frac{\mu_p}{\Lambda_p} \\ 0 & 0 & -b\beta_v \frac{\mu_p}{\Lambda_p \alpha} & 0 & \lambda+\mu_v+\alpha X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda_p \alpha X & -\Lambda_p \alpha X & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga persamaan yang terbentuk karakteristik dari matriks $J(T_1)$ adalah:

$$(\lambda+\mu_h)(\lambda+K)(\lambda+L)(\lambda+\mu_v+\alpha X)(\lambda+\mu_v+\alpha X)\lambda = 0$$

Karena salah satu nilai eigen sama dengan nol, maka kestabilan tidak dapat ditentukan dengan kriteria nilai eigen.

b. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium akan stabil jika semua nilai eigen dari matriks jacobian bernilai negatif.

$$J(T_2) = \begin{bmatrix} -b\beta_h W - \mu_h & 0 & 0 & 0 & -b\beta_h U & 0 \\ b\beta_h W & -K & 0 & 0 & b\beta_h U & 0 \\ 0 & \varepsilon & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\beta_v V & -D & 0 & \alpha Y \\ 0 & 0 & b\beta_v V & -b\beta_v X & -(\mu_v+\alpha Z) & \alpha W \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_p \alpha Z & \Lambda_p \alpha Z & -C \end{bmatrix}$$

keterangan:

$V = \frac{\Lambda_p\alpha(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_v)}{b\beta_v\varepsilon\mu_p(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)}$

$W = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h{\mu_p}^2 - KL\alpha^2\Lambda_v{\Lambda_p}^2\mu_h}{\beta_h(AB\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_p)b\Lambda_p\alpha}$

$X = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h{\mu_p}^2 - KL\alpha^2\Lambda_v{\Lambda_p}^2\mu_h}{b\beta_v\mu_p(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)KL}$

$Y = \frac{KL\Lambda_v(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)}{\beta_h(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_p)b}$

$Z = \frac{\alpha\Lambda_v\Lambda_p - \mu_v\mu_p}{\alpha\mu_p}$

$C = -\Lambda_p\alpha(Y+W)+\mu_p,\ D = b\beta_v X + (\mu_v + \alpha Z)$

Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J, maka berlaku:

$$\det(\lambda I - J) = 0 \text{atau } |\lambda I - J| = 0$$

Pandang $|\lambda I - J| = 0$

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda+b\beta_h W+\mu_h & 0 & 0 & 0 & b\beta_h U & 0 \\ -b\beta_h W & \lambda+K & 0 & 0 & -b\beta_h U & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \lambda+L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\beta_v V & \lambda+D & 0 & -\alpha Y \\ 0 & 0 & -b\beta_v V & b\beta_v X & \lambda+(\mu_v+\alpha Z) & -\alpha W \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda_p\alpha Z & -\Lambda_p\alpha Z & \lambda+C \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda + b\beta_h W + \mu_h)(\lambda+K)(\lambda+L)(\lambda+D)(\lambda+(\mu_v+\alpha Z))(\lambda+C) = 0$

$\lambda = -(b\beta_h W + \mu_h)$ maka $\lambda_1 < 0$

$\lambda = -K$ maka $\lambda_2 < 0$

$\lambda = -L$ maka $\lambda_3 < 0$

$\lambda = -D$ maka $\lambda_4 < 0$, $\lambda = -(\mu_v + \alpha Z)$ maka $\lambda_5 < 0$

$\lambda = -C$ maka $\lambda_6 < 0$

Jadi, λ_6 akan bernilai negatif jika

$$\mu_p > \Lambda_p\alpha\left(\frac{KL\Lambda_v(\alpha\Lambda_p\mu_h + b\beta_h\mu_p)}{\beta_h(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_p)b} + \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h{\mu_p}^2 - KL\alpha^2\Lambda_v{\Lambda_p}^2\mu_h}{\beta_h(KL\alpha\Lambda_v\Lambda_p + b\beta_v\varepsilon\Lambda_h\mu_p)b\Lambda_p\alpha}\right)$$

. Hal ini berarti bahwa titik tetap bebas penyakit T_2 stabil, yang berarrti bahwa penyakit akan mewabah jika tingkat kematian predator lebih besar dari tingkat kelahiran akibat predasi dan efisiensi konversi pemangsaan dari predator.

$$J(T_3) = \begin{bmatrix} -b\beta_h X - \mu_h & 0 & 0 & 0 & -b\beta_h U & 0 \\ b\beta_h X & -K & 0 & 0 & b\beta_h U & 0 \\ 0 & \varepsilon & -L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\beta_v W & -D & 0 & \alpha W \\ 0 & 0 & b\beta_v W & -b\beta_v V & -\mu_v & \alpha X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \end{bmatrix}$$

keterangan:

$U = \frac{\mu_v(b\beta_v\varepsilon\Lambda_h + KL\mu_v)}{\varepsilon b\beta_v(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)}$

$V = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h\Lambda_v - KL\mu_h{\mu_v}^2}{b\beta_v(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)KL}$

$W = \frac{KL(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)}{(b\beta_v\varepsilon\Lambda_h + KL\mu_v)b\beta_h}$

$X = \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h\Lambda_v - KL\mu_h{\mu_v}^2}{(b\beta_v\Lambda_h + KL\mu_v)\mu_v\beta_h b}$

$C = -\Lambda_p\alpha(W+X)+\mu_p$

$D = b\beta_v V + \mu_v$

Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks J, maka berlaku:

$$\det(\lambda I - J) = 0 \text{ atau } |\lambda I - J| = 0$$

Pandang $|\lambda I - J| = 0$

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda+b\beta_h X-\mu_h & 0 & 0 & 0 & b\beta_h U & 0 \\ -b\beta_h X & \lambda+K & 0 & 0 & -b\beta_h U & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \lambda+L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\beta_v W & \lambda+D & 0 & -\alpha W \\ 0 & 0 & -b\beta_v W & b\beta_v V & \lambda+\mu_v & -\alpha X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda+C \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda + b\beta_h X + \mu_h)(\lambda+K)(\lambda+L)(\lambda+)(\lambda+\mu_v)(\lambda+C) = 0$

$\lambda = -(b\beta_h X + \mu_h)$ maka maka $\lambda_1 < 0$

$\lambda = -K$ maka $\lambda_2 < 0$, $\lambda = -L$ maka $\lambda_3 < 0$

$\lambda = -D$ maka $\lambda_4 < 0$,$\lambda = -\mu_v$ maka $\lambda_5 < 0$

$\lambda = -C$ maka $\lambda_6 < 0$

Jadi, λ_6 akan bernilai negatif jika

$$\mu_p > \Lambda_p\alpha\left(\frac{KL(b\beta_h\Lambda_v + \mu_h\mu_v)}{(b\beta_v\varepsilon\Lambda_h + KL\mu_v)b\beta_h} + \frac{b^2\beta_h\beta_v\varepsilon\Lambda_h\Lambda_v - KL\mu_h{\mu_v}^2}{(b\beta_v\Lambda_h + KL\mu_v)\mu_v\beta_h b}\right)$$

.Hal ini berarti bahwa titik tetap bebas penyakit T_3 stabil, yang berarrti bahwa penyakit akan mewabah jika tingkat kematian predator lebih besar dari tingkat kelahiran akibat predasi dan efisiensi konversi pemangsaan dari predator.

5) Simulasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Tungro pada Tanaman Padi dengan Vektor Wereng Hijau Nephotettix virescens

Simulasi numerik model matematika Penyebaran Penyakit Tungro menggunakan software Maple18 memberikan nilai untuk masing-masing parameter.

TABEL I
PARAMETER UNTUK TITIK TETAP MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT TUNGRO PADA TANAMAN PADI

Parameter	Nilai		
	T_0	T_2	T_3
Λ_h	8	8	8
Λ_v	10	10	10
μ_h	0,05	0,05	0,05
μ_v	0,1	0,1	0,1
μ_p	0,04	0,04	0,04
ε	0,06	0,06	0,06
β_h	0,0015	0,45	0,15
β_v	0,0025	0,5	0,25
[illegible]	0,002	0,4	0,002
[illegible]	0,5	0,5	0,5
Λ_p	0,015	0,15	0,15
b	0,8	0,8	0,8

a. Simulasi Model Matematika dengan Titik Ekuilibrium Bebas Penyebaran Penyakit

Dari nilai parameter pada Tabel 1 terlebih dahulu dihitung nilai R_0 dari T_0 yang diperoleh:

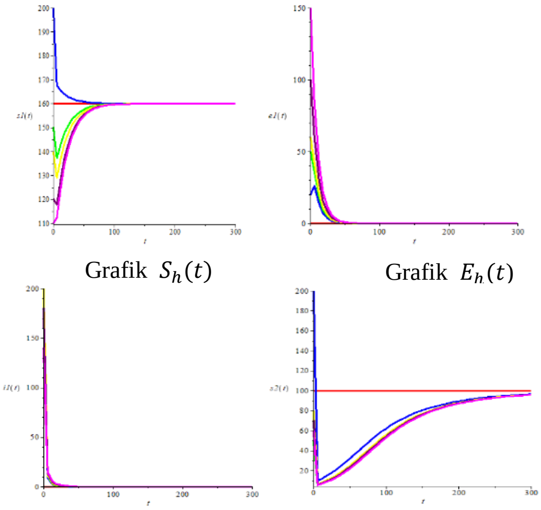
$$R_0 = 0{,}6171113728$$

Diperoleh $R_0 < 1$. Kemudian dihitung nilai titik ekuilibrium $T_0 = (160{,}0{,}0;100{,}0{,}0)$.

Dalam simulasi titik ekuilibrium T_0 digunakan enam nilai awal:

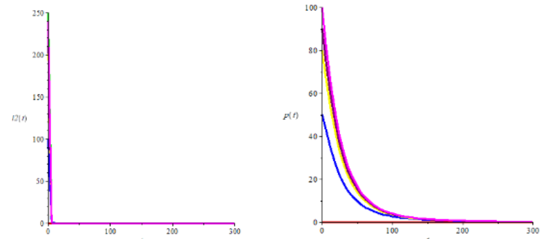
$S_h(0)=160, E_h(0)=0, I_h(0)=0, S_v(0)=100, I_v(0)=0, P(0)=0$
$S_h(0)=200, E_h(0)=20, I_h(0)=180, S_v(0)=200, I_v(0)=50, P(0)=50$
$S_h(0)=150, E_h(0)=50, I_h(0)=200, S_v(0)=50, I_v(0)=250, P(0)=100$
$S_h(0)=140, E_h(0)=60, I_h(0)=200, S_v(0)=80, I_v(0)=220, P(0)=80$
$S_h(0)=120, E_h(0)=100, I_h(0)=180, S_v(0)=70, I_v(0)=230, P(0)=90$
$S_h(0)=110, E_h(0)=150, I_h(0)=140, S_v(0)=60, I_v(0)=240, P(0)=100$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas dengan menggunakan software Maple18 diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu *t*:



Grafik $S_h(t)$ Grafik $E_h(t)$

Grafik $I_h(t)$ Grafik $S_v(t)$



Grafik $I_v(t)$ Grafik $P(t)$

Gambar 2. Trayektori di Sekitar Titik Ekuilibrium Bebas T_0

Berdasarkan Gambar 2 kurva merah mewakili titik ekuilibrium bebas dari penyakit. Sedangkan kurva biru, hijau, kuning, ungu dan magenta yang nantinya akan menentukan stabil atau tidak pada titik tetap bebas dari penyebaran penyakit tungro pada masing-masing grafik. Dapat dillihat bahwa titik tetap T_0 stabil karena trayektori (kurva biru, hijau, kuning, ungu dan magenta) dari masing-masing grafik bergerak mendekati T_0. Jadi T_0 stabil dapat diartikan bahwa dalam waktu tertentu penyebaran penyakit tungro pada tanaman padi akan menghilang.

b. Simulasi Model Matematika dengan Titik Ekuilibrium Endemik

Dari nilai parameter pada Tabel 1 terlebih dahulu dihitung nilai R_0 yang diperoleh:

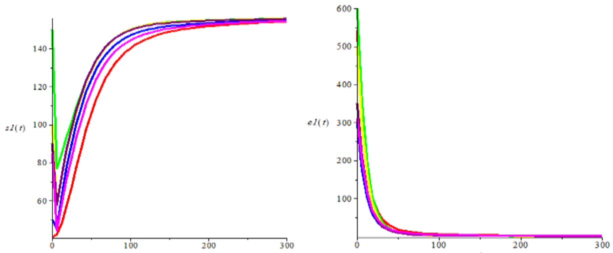
$$R_0 = 1{,}007738652$$

Diperoleh $R_0 > 1$. kemudian dihitung nilai titik tetap endemik $T_2 = (41{,}542{,}59{,}1{,}1{,}37)$.

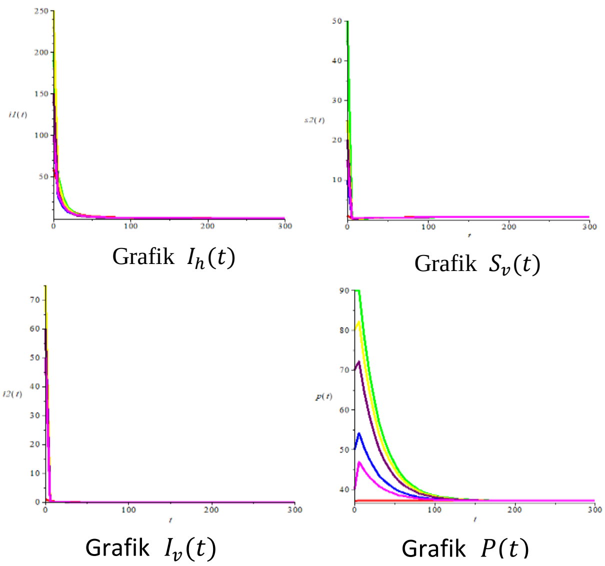
Dalam simulasi titik tetap endemik digunakan enam nilai awal:

$S_h(0)=41, E_h(0)=542, I_h(0)=59, S_v(0)=1, I_v(0)=1, P(0)=37$
$S_h(0)=50, E_h(0)=300, I_h(0)=100, S_v(0)=10, I_v(0)=50, P(0)=50$
$S_h(0)=150, E_h(0)=600, I_h(0)=200, S_v(0)=50, I_v(0)=100, P(0)=90$
$S_h(0)=100, E_h(0)=500, I_h(0)=250, S_v(0)=25, I_v(0)=75, P(0)=80$
$S_h(0)=90, E_h(0)=350, I_h(0)=150, S_v(0)=20, I_v(0)=60, P(0)=70$
$S_h(0)=80, E_h(0)=310, I_h(0)=100, S_v(0)=15, I_v(0)=50, P(0)=40$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t:



Grafik $S_h(t)$ Grafik $E_h(t)$



Gambar 4. Trayektori di Sekitar Titik Ekuilibrium Endemik T_2

Berdasarkan Gambar 4 kurva merah mewakili titik tetap endemik, sedangkan kurva biru, hijau, kuning, ungu dan magenta yang akan menentukan stabil atau tidak pada titik tetap endemik T_2 masing-masing grafik. Dapat dilihat T_2 merupakan titik tetap yang stabil karena trayektori (kurva biru, hijau, kuning,ungu dan magenta) dari masing-masing grafik bergerak mendekati T_2 yang ditujukan oleh kurva merah. Titik tetapT_2 stabil dapat diartikan bahwa akan terjadi penyebaran penyakit tungro dalam jangka waktu yang lama.

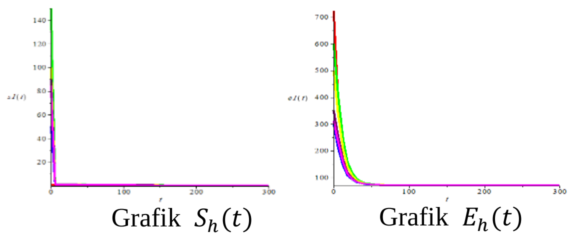
Dari nilai parameter pada Tabel 1 terlebih dahulu dihitung nilai R_0 yang diperoleh:

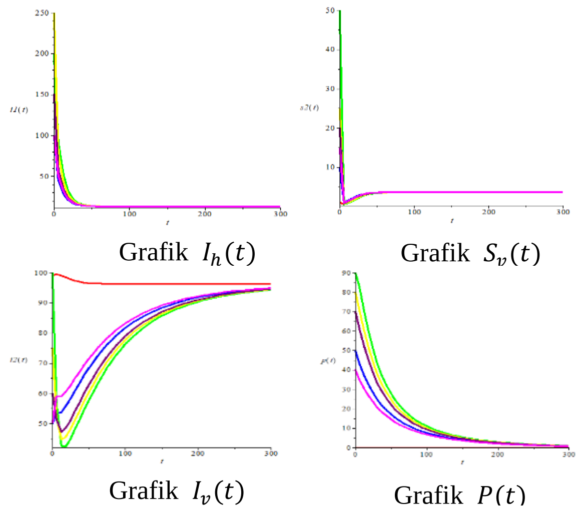
$$R_0 = 61{,}71113728$$

Diperoleh $R_0 > 1$. kemudian dihitung nilai titik tetap endemik $T_3 = (1{,}724{,}79{,}1{,}99{,}0)$. Dalam simulasi titik tetap endemik digunakan enam nilai awal:

$S_h(0)=160, E_h(0)=0, I_h(0)=0, S_v(0)=1, I_v(0)=0, P(0)=37$
$S_h(0)=50, E_h(0)=300, I_h(0)=100, S_v(0)=10, I_v(0)=50, P(0)=50$
$S_h(0)=150, E_h(0)=600, I_h(0)=200, S_v(0)=50, I_v(0)=100, P(0)=90$
$S_h(0)=100, E_h(0)=500, I_h(0)=250, S_v(0)=25, I_v(0)=75, P(0)=80$
$S_h(0)=90, E_h(0)=350, I_h(0)=150, S_v(0)=20, I_v(0)=60, P(0)=70$
$S_h(0)=80, E_h(0)=310, I_h(0)=100, S_v(0)=15, I_v(0)=50, P(0)=40$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t:





Gambar 5. Trayektori di Sekitar Titik Ekuilibrium Endemik T_2

Berdasarkan Gambar 5 kurva merah mewakili titik tetap endemik, sedangkan kurva biru, hijau, kuning, ungu dan magenta yang akan menentukan stabil atau tidak pada titik tetap endemik T_3 masing-masing grafik. Dapat dilihat bahwa titik tetap T_2 stabil karena trayektori (kurva biru, hijau, kuning, ungu dan magenta) dari masing-masing grafik bergerak mendekati T_3 yang ditujukan oleh kurva merah. Titik T_3 yang stabil dapat diartikan bahwa akan terjadi penyebaran penyakit tungro dalam jangka waktu yang lama.

C. *Interpretasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Tungro pada Tanaman Padi*

Berdasarkan analisis yang dilakukan dapat dilihat titik ekuilibrium bebas dari penyakit bersifat stabil yang berarti penyakit tungro akan menghilang dalam jangka waktu tertentu, titik tetap endemik juga bersifat stabil yang berarti penyebaran penyakit tungro akan mewabah dalam waktu yang lama. Daya hisap vektor, laju transisi dari tanaman *exposed* ke tanaman *infected* dan transmisi penyakit tungro dari vektor ke tanaman ataupun sebaliknya mempengaruhi tinggi rendahnya penyebaran penyakit. Penyebaran penyakit tungro bisa dikurangi dengan memanfaatkan predator, semakin tinggi tingkat predasi dan semakin rendah tingkat kematian predator maka penyakit tungro akan berkurang.

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan diperoleh model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial. Berdasarkan model didapatkan empat titik tetap. Penyakit tungro akan menghilang jika tingkat kematian predator lebih rendah dari tingkat efisiensi konversi pemangsaan oleh predator dan tingkat predasi predator. Sedangkan, penyakit akan mewabah saat tingkat kematian predator lebih tinggi dari tingkat predasi predator dan tingkat efisiensi konversi pemangsaan oleh predator.

REFERENSI

[1] Rosha, Media. 2013. Pemodelan Matematika. Padang: UNP.

[2] Tim Kementerian Pertanian RI. 2017. *Inovasi Budidaya Padi*. Jakarta: IAAD Press.

[3] Liswarni, Y., Martinius, M., & Nurbailis, N. (2019). Bahasa Indonesia. *JPT: JURNAL PROTEKSI TANAMAN (JOURNAL OF PLANT PROTECTION)*, *3*(2), 93-99.

[4] Pracaya. 2007. *Hama dan Penyakit Tanaman Edisi Revisi*. Jakarta: Penebar Swadaya.

[5] Said, M.Y, I.N. Widiarta, M. Muhsin. 2007. *Pengendalian Terpadu Penyakit Tungro*. Bogor: Badan Penelitian dan Pengembangan Pertanian.

[6] Landita, A., Ratianingsih, R., & Nacong, N. (2020). Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Tungro Pada Tanaman Padi Melalui Vektor Wereng Hijau (Nephotetix Virescens). *JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN*, *17*(2), 179-190.

[7] Suryaningrat, W., Anggriani, N., Supriatna, A. K., & Istifadah, N. (2020, September). The optimal control of rice tungro disease with insecticide and biological agent. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2264, No. 1, p. 040002). AIP Publishing LLC.

[8] Praliska, W., Arnellis, A., & Suherman, S. (2019). Model Matematika SIK Penyebaran Penyakit Kaki Gajah (Filariasis). *UNP Journal of Mathematics*, *2*(4).