Journal Of Mathematics UNP Vol. 6 No 3 September 2021
P-ISSN/E-ISSN: 2355-1658/2807-3460 73-78

Sifat-Sifat Matriks Ketetanggaan Pada Graf Petersen

Yuco Alsbaldo[#1], Muhammad Subhan[*2]
[#]Student of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia
[*]Lecturer of Mathematics Department Universitas Negeri Padang, Indonesia
[1]yucoa66@gmail.com
[2]13subhan@fmipa.unp.ac.id

Abstract – Graphs are used to represent discrete objects and the relationships between these objects. One of the best known and very popular examples of graphs is Petersen graph. Petersen graph is very popular because of its uniqueness as a counterexample in many places and has many interesting properties. Graphs can be expressed in the form of a matrix adjacency which is denoted. When a graph can be expressed in the form of an adjacency matrix, its determinants and eigenvalues can be determined. This research is a theoretical research through literature study. The purpose of this study is to find out how the properties of the adjacency matrix on a Petersen graph are. The concept that will be discussed in this research is how the properties of the determinants and eigenvalues of the adjacency matrix on the Petersen graph. The result of the research is that the determinant of the adjacency matrix on the Petersen graph is positive with three different eigenvalues and can be diagonalized because the algebraic multiplicity is the same as the geometric multiplicity $m_A = m_G$.

Keywords – Adjacency Matrix, Petersen Graph, Determinants, Eigenvalues.

Abstrak – Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Salah satu contoh graf yang paling dikenal dan sangat populer adalah graf Petersen, graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal (*counterexample*) di banyak tempat dan memiliki banyak sifat menarik. Graf dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks ketetanggaan (*adjacency*) yang dinotasikan $A(G)$. Ketika graf dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks ketetanggaan, maka dapat ditentukan determinan dan nilai eigennya. Penelitian ini merupakan penelitian teoritis melalui studi kepustakaan. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui bagaimana sifat-sifat matriks ketetanggaan pada graf Petersen. Konsep yang dibahas pada penelitian ini ialah bagaimana sifat-sifat dari determinan dan nilai eigen matriks ketetanggaan pada graf Petersen tersebut. Hasil dari penelitian adalah determinan matriks ketetanggaan pada graf Petersen bernilai positif dengan tiga nilai eigen yang berbeda dan dapat didiagonalisasi karena multiplisitas aljabarnya sama dengan multiplisitas geometri $m_A = m_G$.

Kata Kunci – Matriks Ketetanggaan, Graf Petersen, Determinan, Nilai Eigen.

PENDAHULUAN

Teori graf sampai saat ini menjadi pokok bahasan yang memiliki banyak terapan. Graf berguna untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungannya. Gambaran umum dari graf dapat dinyatakan dalam bentuk objek sebagai titik, noktah atau bulatan, sedangkan garis dinyatakan sebagai hubungan antara objek. Daya tarik dari teori graf dapat dilihat berdasarkan penerapannya yang sangat luas, mulai dari teknik kelistrikan, ilmu komputer, fisika, kimia, biologi, linguistik, ekonomi, sosiologi, manajemen, pemasaran, sampai permainan asah otak dan pemecahan teka-teki. Hal yang menarik dari penerapan teori graf adalah mempelajari titik dan garis.

Graf Petersen merupakan salah satu contoh graf yang paling terkenal dan populer. Graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Petersen, karena pada tahun 1898 ia membuktikan bahwa graf Petersen tidak terfaktor-1[1]. Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal (*counterexample*) di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat menarik.[2]

Matriks merupakan salah satu bidang kajian dasar yang mempelajari ilmu matematika mengenai aljabar linear. Secara definisi Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan, jajaran dari bilangan-bilangan tersebut disebut entri dari matriks. [3]

Matriks ketetanggaan dari G dinotasikan oleh $A(G)$ dan berukuran $n \times n$. Baris dan kolomnya diberi indeks oleh $V(G)$. Jika $i \neq j$ maka entri ke-(i, j) dari $A(G)$ bernilai 0 untuk simpul i dan j yang tidak bertetangga dan bernilai 1 untuk i dan j yang bertetangga. [4]

Graf Petersen dapat dibentuk kedalam matriks ketetanggaan, karena matriks ketetanggaan merupakan graf sederhana yang simetris, yaitu $a_{ij} = a_{ji}$, dengan 1 jika v_i dan v_j memiliki sisi dan 0 jika tidak ada sisi diantaranya dan selain itu, graf Petersen juga tidak mempunyai *loop*, sehingga diagonal utamanya selalu 0 karena a_{ii}, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah 0.Penentuan sifat-sifat graf yang direfleksikan dari teknik aljabar linear menggunakan matriks adalah salah satu permasalahan utama dari teori graf.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar/teoritis. Metode yang digunakan adalah analisis teori – teori yang relevan dengan permasalahn sifat-sifat matriks ketetanggan pada graf Petersen dengan berlandaskan kajian pustakaan. Penelitian ini dimulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan bahan bacaan yang menjadi rujukan, mengaitkan teori-teori yang diperoleh dari bahan bacaan yang berkaitan dengan permasalahan yang dibahas sehingga dapat menjawab pertanyaan yang muncul dari permasalahan, dan menarik kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan topik bahasan.
2. Mempelajari dan menelaah lebih mendalam teori-teori mengenai topik bahasan.
3. Mendefinisikan matriks ketetanggaan dan graf Petersen.
4. Mendeskripsikan bentuk matriks ketetanggaan pada graf Petersen.
5. Menentukan determinan dari bentuk matriks ketetanggaan pada graf Petersen
6. Menentukan nilai eigen dari matriks ketetanggaan pada graf Petersen.
7. Menentukan diagonalisasi dari matriks ketetanggaan pada graf Petersen
8. Menarik kesimpulan.

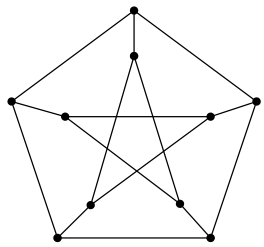
HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Matriks ketetanggaan pada graf Petersen* $P(5,2)$

Menurut [5] Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul $n \geq 1$. G merupakan matriks dwimatra yang berukuran $n \times n$. Jika matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ untuk simpul i dan j bertetangga dan $a_{ij} = 0$ untuk simpul i dan j tidak bertetangga. Matriks ketetanggaan dinamakan juga matriks nol-satu karena pada matriks tersebut hanya berisi angka nol dan satu.

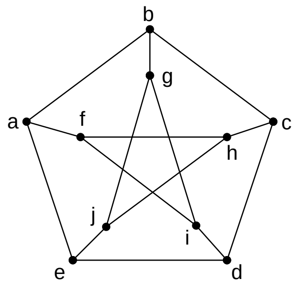
Graf Petersen merupakan graf beraturan (regular) yang memiliki derajat 3 di setiap simpul-simpulnya, graf Petersen dinotasikan sebagai $P(5,2)$. Pada saat ini berkembangnya graf Petersen sehingga diperluas menjadi graf Petersen diperumum, dinotasikan dengan $P(n, m)$, dimana nilai n ialah banyaknya simpul luar (yaitu sama dengan banyaknya simpul dalam) dan nilai m merupakan lompatan sisi dalam, dimana $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Perhatikan graf Petersen berikut!



Gambar 1 Graf Petersen $P(5,2)$

Adapun dalam mencari matriks ketetanggaan dari graf Petersen $P(5,2)$ pada Gambar 1 harus diberikan label terlebih dahulu di setiap titiknya, maka diperoleh sebagai berikut:



Gambar 2 Pemberian label pada graf Petersen $\boldsymbol{P(5,2)}$

Berdasarkan Gambar 2 dapat diperoleh:

1. Simpul a bertetangga dengan simpul b, e dan f maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom a pada baris b, e dan f serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
2. Simpul b bertetangga dengan simpul a, c dan g maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom b pada baris a, c dan g serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
3. Simpul c bertetangga dengan simpul b, d dan h maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom c pada baris b, d dan h serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
4. Simpul d bertetangga dengan simpul c, d dan i maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom d pada baris c, d dan i serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
5. Simpul e bertetangga dengan Simpul a, d dan j maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom e pada baris a, d dan j serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
6. Simpul f bertetangga dengan simpul a, g dan j maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom f pada baris a, g dan j serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
7. Simpul g bertetangga dengan simpul b, f dan h maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom g pada baris b, f dan h serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.

8. Simpul h bertetangga dengan simpul c, g dan i maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom h pada baris c, g dan i serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
9. Simpul i bertetangga dengan simpul d, h dan j maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom i pada baris d, h dan j serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.
10. Simpul j bertetangga dengan simpul e, f dan i maka dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks, yaitu bernilai 1 untuk kolom j pada baris e, f dan i serta bernilai 0 untuk baris-baris lainnya.

Sehingga dengan pernyataan di atas maka didapatkan matriks ketetanggaannya sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

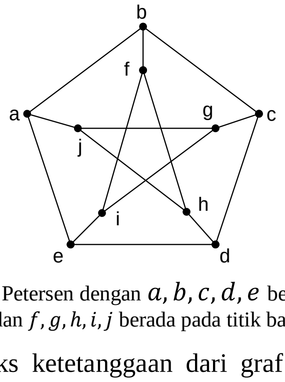
Jika dilakukan penggantian indeks di setiap titiknya, maka hanya akan mengubah pertukaran baris genap buah simpul.

B. Determinan Matriks

Dalam menghitung nilai determinan dari matriks ketetanggaan, terlebih dahulu ditentukan bentuk matriks ketetanggaannya. Oleh sebab itu diberikan label pada setiap titik baik secara berurutan maupun secara tidak berurutan. Hal ini dilakukan untuk melihat bentuk matriks dan nilai determinannya.

Adapun beberapa matriks ketetanggaan yang diperoleh sebagai berikut:

1. Pelabelan titik pada graf Petersen secara beurutan dengan a, b, c, d, e berada pada titik bagian luar dan f, g, h, i, j berada pada titik bagian dalam.

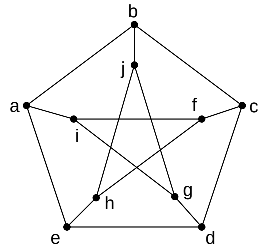


Gambar **3** Graf Petersen dengan a, b, c, d, e berada pada titik bagian luar dan f, g, h, i, j berada pada titik bagian dalam.

Sehingga matriks ketetanggaan dari graf Petersen pada Gambar 3 sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Pelabelan titik pada graf Petersen secara beurutan dengan a, b, c, d, e berada pada titik bagian luar dan f, g, h, i, j berada pada titik bagian dalam dengan urutan titik dalamnya bergeser satu dari graf sebelumnya.

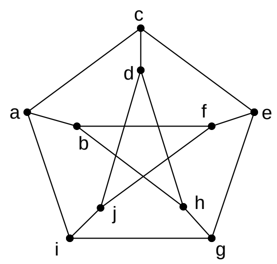


Gambar **4** Graf Petersen dengan a, b, c, d, e berada pada titik bagian luar dan f, g, h, i, j berada pada titik bagian dalam dengan urutan titik dalamnya bergeser satu dari graf sebelumnya

Sehingga matriks ketetanggaan dari graf Petersen pada Gambar 4 sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Pelabelan titik pada graf Petersen dengan a, c, e, g, i berada pada titik bagian luar dan b, d, f, h, j berada pada titik bagian dalam.

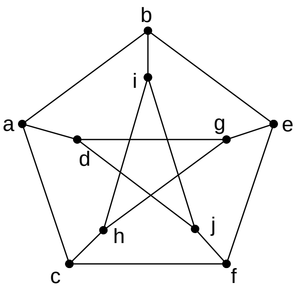


Gambar **5** Graf Petersen dengan a, c, e, g, i berada pada titik bagian luar dan b, d, f, h, j berada pada titik bagian dalam.

Sehingga matriks ketetanggaan dari graf Petersen pada Gambar 5 sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Pelabelan titik pada graf Petersen dengan a, b, e, f, c berada pada titik bagian luar dan d, i, g, j, h berada pada titik bagian dalam.



Gambar **6** Graf Petersen dengan a, b, e, f, c berada pada titik bagian luar dan d, i, g, j, h berada pada titik bagian dalam.

Sehingga matriks ketetanggaan dari graf Petersen pada Gambar 6 adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dalam menghitung determinan dari matriks ketetanggaan pada graf Petersen, peneliti menggunakan konsep matriks segitiga atas dengan meng OBE kan barisnya, Sehingga hasil determinan dari matriks ketetanggaan pada graf Petersen dengan determinan matriks segitiga bawah adalah

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)(1)(1)(1)(1)(2)(4)(2)(3) = 48$$

Merujuk pada hasil penelitian [6], misalkan G adalah graf sederhana dengan banyak titiknya berhingga, akan menimbulkan $\det(G)$ sebagai determinan dari matriks ketetanggaan dari G. Bilangan $\det(G)$ adalah bilangan bulat dan adalah suatu invariant bagi G sehingga nilainya adalah bebas dari pelabelan titik.

Hasil nilai determinan yang diperoleh berdasarkan perubahan bentuk matriks ketetanggaannya bahwa semua nilai determinannya selalu sama, jadi bentuk matriks ketetanggaanya tidak mempengaruhi nilai dari determinannya. Nilai determinan matriks ketetanggaan pada graf Petersen $D > 0$ yaitu bernilai 48. Hal ini menandakan bahwa matriks tersebut adalah matriks non singular, sehingga matriks ketetanggaan tersebut memiliki invers.

C. Invers Matriks

Matriks ketetanggaan pada graf Petersen memiliki ordo 10×10, sehingga metode invers yang digunakan dalam perhitungan invers matriks ketetanggaan pada graf Petersen adalah dengan Eliminasi Gauss-Jordan dan operasi baris elementer, untuk menentukan invers matriks dapat menggunakan sejumlah operasi baris elementer pada matriks ketetanggaannya dan melakukan urutan yang sama pada matriks I (matriks identitas), dimana

$$(A|I) \text{ dilakukan OBE } (I|A^{-1})$$

Sehingga diketahui matriks ketetanggaan pada graf Petersen dan matriks identitasnya sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan pengoperasian pada baris elementer dengan matriks ketetanggaan dan matriks identitasnya, maka hasil invers matriks ketetanggaan dari graf Petersen yang diperoleh adalah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

D. Nilai Eigen (Spectrum) dan Vektor Eigen

Perhatikan bahwa matriks ketetanggaan pada graf Petersen berupa matriks simetris, sehingga nilai nilai eigennya akan berupa bilangan real dan basis vektor eigen yang saling ortogonal. Himpunan nilai eigen dari suatu graf adalah spektrum dari graf tersebut.

Teorema 1
Jumlah semua nilai eigen dari suatu matriks adalah jumlah nilai eigennya, yaitu Trace $tr(A) = \sum_i^n \lambda_i$.

Akibat 1
Jumlah nilai eigen dari matriks ketetanggaan suatu graf sederhana adalah 0.
Bukti:
Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki *loop* di setiap simpulnya sehingganya untuk $v_{ii} = 0$. Dari Teorema 2 diperoleh bahwa $(A) = \sum_i^n \lambda_i$. Karena diagonal utama dari matriks ketetanggaan suatu graf sederhana adalah 0, maka jumlah nilai eigennya adalah juga 0.

Akibat 2
Jumlah nilai eigen dari matriks ketetanggaan dari graf Petersen adalah 0.
Bukti:
Matriks ketetanggaan pada graf Petersen adalah graf sederhana.
Untuk menghitung nilai eigen dari graf Petersen, kami menggunakan fakta bahwa graf tersebut sangat teratur. Ini berarti bahwa tidak hanya setiap simpul memiliki derajat yang sama yaitu 3, tetapi setiap pasangan simpul $(u, v) \in E$ memiliki jumlah tetanggga yang sama (0), dan setiap pasangan simpul $(u, v) \notin E$ memilki tetangga yang sama (1). Dalam hal matriks ketetanggaan ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. $(A^2)_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{kj}$ ialah jumlah tetangga oleh i dan j
2. Untuk $i = j$, $(A^2)_{ij} = 3$
3. Untuk $i \neq j$, $(A^2)_{ij} = 1 - a_{ij}$, baik 0 atau 1 tergantung pada $(i, j) \in E$

Dalam bentuk ini dapat ditulis sebagai

$$A^2 + A - 2I = J \qquad (1)$$

Sekarang perhatikan vektor eigen, $Ax = \lambda x$. Kita mengetahui bahwa satu vektor eigen adalah 1 yang memiliki nilai eigen $d = 3$. Selain itu, semua vektor eigen x adalah ortogonal terhadap 1, yang juga berarti bahwa $Jx = 0$. Maka kita mendapatkan

$$A^2 + A - 2I = \lambda^2 x + \lambda x - 2x = 0 \qquad (2)$$

Ini berarti bahwa setiap nilai eigen selain yang terbesar harus memenuhi persamaan kuadrat $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Persamaan ini memiliki dua akar, 1 dan -2. Jadi, kita menghitung multiplisitas setiap akar dari kondisi bahwa $\sum \lambda_i = 0$.

Nilai eigen terbesar memiliki multiplisitas $1's$ (jelas bahwa vektor apapun sehingga $Ax = 3x$ adalah kelipatan dari 1). Oleh karena itu, jika nilai eigen 1 dengan multiplisitas a dan -2 dengan multiplisitas b , kita mendapatkan $3 + a \cdot 1 - b(-2) = 0$ dan $a + b = 9$, yang implikasi $a = 5$ dan $b = 4$. Kita dapat menyimpulkan bahwa graf Petersen memiliki multiplisitas $(3,1,1,1,1,1,-2,-2,-2,-2)$ Hasil yang didapatkan bahwa nilai eigen dari matriks ketetanggaan dari graf Petersen memiliki nilai $(\lambda - 3), (\lambda + 2)^4, (\lambda - 1)^5$, dimana $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ dan $\lambda_3 = 1$. Untuk $\lambda_1 = 3$ memiliki vektor eigen $[P_1] = [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$, untuk $\lambda_2 = -2$ memiliki vektor eigen $[P_2, P_3, P_4, P_5] = [2, -1,0,1, , -2, -1,0,0,0,1; 1, -1,1, -1,0, -1,0,0,1,0; 1,0, -1,1, -1, -1,0,1,0,0; 2, -2,1,0, -1, -1,1,0,0,0]$ dan untuk $\lambda_3 = 1$ vektor eigen $[P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}] = [0, -1, -1,1,0,0,0,0,0,1; -1, -1,0,1,0,0,0,0,1,0; -1,0,1,0, -1,0,0,1,0,0; 0,1,0, -1, -1,0,1,0,0,0; 1,0, -1, -1,0,1,0,0, 0,0]$.

E. Diagonalisasi

Matriks A dapat didiagonalisasi jika dan hanya jika multiplisitas geometrinya sama dengan multiplisitas aljabar $(m_G = m_A)$. Sebelumnya didapatkan ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 3$ sebanyak-banyaknya berdimensi satu, ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = -2$ sebanyak-banyaknya berdimensi 4 dan ruang eigen $\lambda = 1$ sebanyak-banyaknya berdimensi 5. Pada ruang eigen yang terkait dari masing-masing λ memiliki dimensi yang sama sehingga matriks ketetanggaan pada graf Petersen dapat didiagonalisasi.

Proses perkalian dari vektor tak nol v dengan kebalikan panjangnya (*norm*) untuk memperoleh suatu vektor dengan norm 1 disebut dengan penormalan atau normalisasi (*normalizing*) v, yaitu

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

Basis ruang eigen matriks ketetanggaan pada graf Petersen yang sudah didapatkan kita normalisasi agar matriks tersebut dapat didiagonalisasikan.

Sehingga, diperoleh matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk sebuah matriks dapat didiagonalkan jika terdapat sebuah matriks P yang dibalik sedemikian rupa sehingga $D = P^{-1}A$. Sehingga, diagonalisasi dari matriks ketetanggaannya adalah
$D = \deg(3, -2, -2, -2, -2, 1, 1, 1, 1, 1)$

SIMPULAN

Matriks ketetanggaan pada graf Petersen memiliki determinan $(+)$ dengan tiga nilai eigen yang berbeda yaitu $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ dan $\lambda_3 = 1$. Karena pada multipisitas aljabar dan multiplisitas geometri sama $m_A(\lambda) = m_G(\lambda)$, maka matriks ketetanggaannya dapat didiagonalisasi.

REFERENSI

[1] Ginting, Juneidi. 2016. *Graf Petersen dengan Beberapa Sifat-Sifat yang Berkaitan dalam Teori Graph*. No 1 Vol 2. Medan: Universitas Negeri Medan.

[2] Holton D.A. and J. Sheehan. 1993. *The Petersen Graph*. Cambridge: University Press.

[3] Rores. Anton. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi: Edisi 8 Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

[4] Bapat, R. 2014. *Graphs and Matrices Second Edition*. Hindustan Book Agency: New Delhi.

[5] Munir, Rinaldi. 2007. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

[6] Alireza, abdollahi. 2012. *Determinants of Adjacency Matrices of Graphs*. Vol. 1 No. 4, 9-16 University of Isfahan: Department of Mathematics.