UNPjoMath Vol.4 No 2 September 2021
ISSN:997 235516589 29-33

# Penentuan Akar Persamaan Tak Linier Menggunakan Metode Prediktor-Korektor Halley

Khairil Amri[#1], Minora Longgom Nst[*2], Riry Sriningsih[*3]

[#]*Student of Mathematics Departement, Universitas Negeri Padang*
[*]*Lecturer of Mathematics Departement, Universitas Negeri Padang*

[1]amrikhairil11@gmail.com
[2]minora_nst@yahoo.com
[3]srirysriningsih@yahoo.com

***Abstract***-Nonlinear equation which is difficult to solve by analysis, but it can be solved using approach of variety of numerical methods, for instance Newton-Raphson and Halley Methods. However, the methods are not guaranteed to be convergent. Predictor Corrector Halley's method is one of the method that appear from the advantages and disadvantages of Newton-Raphson and Method of Halley. This method uses the Newton-Raphson Method as predictor and Halley's Method as corrector. It has a higher order and more efficient from Newton-Raphson and Halley methods. The advantage of this method has a higher convergence that has sixth-order convergence so that the step of the iteration is fewer. Next,an algorithm of this method is used to determine the root approximations of nonlinear equations.

***Key Words***-Non Linear Equations, Newton Method, Halley Method, Prediktor Corector Halley Method, Algorithm.

***Abstrak*** –Persamaan tak linier yang sulit diselesaikan dengan cara analisis dapat diselesaikan dengan melakukan.pendekatan menggunakan berbagai metode numerik, diantaranya Metode Newton-Raphson dan Metode Halley. Namun metode tersebut tidak dijamin kekonvergenannya. Metode Prediktor Korektor Halley merupakan salah satu metode yang muncul dari kelebihan dan kekurangan Metode Newton-Raphson dan Metode Halley.Metode ini menggunakan Metode Newton-Raphson sebagai prediktor dan Metode Halley sebagai korektor yang memiliki orde lebih tinggi dan efesiensi yang lebih baik. Kelebihan dari metode ini adalah memiliki kekonvergenannya yang lebih tinggi dibandingkan Metode Newton-Raphson dan Metode Halleyyaitu kekonvergenan orde enam sehingga langkah iterasi yang dibutuhkan semakin sedikit. Selanjutnya digunakan algoritma dari metode ini untuk menentukan hampiran akar persamaan tak linier.

***Kata Kunci*** – algoritma, persamaan tak linier, metode newton, metode halley, metode prediktor-korektor halley.

## PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu yang banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dan berperan penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan.Permasalahan sering ditemui seperti yang berkaitan dengan menemukan solusi dari persamaan tak linier

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Solusi dari persamaan berupa akar dari persamaan tersebut. Akar persamaan tak linier dapat ditemukan dengan dua cara yaitu secara analitik dan secara numerik.Proses penyelesaian secara analitik digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang masih tergolong sederhana dan masih bisa menggunakan formula matematika, dimana dengan menggunakan rumus matematika akan menghasilkan sebuah nilai eksak (nilai sesungguhnya).Secara numerik yaitucara yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) dengan merumuskan masalah dan menggunakan operasi aritmatika biasasehingga menghasilkan solusi/akar hampiran.

Mengingat bahwa algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan, maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah iterasi yaitu pengulangan proses perhitungan dengan kata lain perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang sehingga diperoleh hasil yang mendekati nilai penyelesaian eksak.

Beberapa metode numerik yang digunakan untuk menemukan akar persamaan tak linier adalah Metode Bagi Dua, Metode Posisi Palsu, Metode Newton-Raphson (N-R), Metode Secant, Metode Halley dan metode lainnya.

Setiap metode memiliki karakteristik, kelebihan dan kekurangan seperti karakteristik Metode N-R adalah memakai konsep garis singgung dimana turunan pertamanya tidak boleh sama dengan nol [5]. Dengan demikian kekonvergenannya tidak dapat dijamin.

Ada dua kelompok metode penentuan akar dalam metode numerik yaitu metode tertutup (metode pengurungan) dan metode terbuka. Metode tertutup yaitu metode yang menggunakan batas selang akar. Contoh dari metode pengurungan yaitu metode bagi dua dan metode posisi palsu. Kelebihan dari metode ini yaitu dijamin kekonvergenannya namun lambat dalam proses karena menggunakan banyak iterasi. Sedangkan, metode terbuka yaitu metode yang menggunakan tebakan awal sebelum proses iterasi dimulai. Contoh dari metode terbuka yaitu metode Newton-Rhapson, Metode Secant, Metode Halley dan lain-lain.Metode terbuka tidak dijamin kekonvergenannya karena tidak menggunakan batas selang akar, namun cepat dalam proses dengan iterasi yang sedikit dalam menemukan hampiran akar.

Sebuah metode baru dalam menentukan akar persamaan tak linier muncul karena adanya kelebihan ataupun kekurangan dari metode-metode sebelumnya. Metode Newton-Raphson memiliki laju kekonvergenan kuadratik apabila tebakan dekat ke akar yang hendak dicari, namun metode ini bisa tidak stabil jika tebakan jauh dari akar. Sedangkan Metode Halley lebih stabil dibandingkan dengan Metode Newton-Raphson meskipun tebakan jauh dai akar dan memiliki kekonvergenan kubik.

Salah satu metode yang menggabungkan metode-metode sebelumnya adalah metode dua langkah prediktor-korektor Halley. Metode Newton berfungsi sebagai prediktor dan Metode Halley sebagai korektor karena memiliki kekonvergenan yang lebih cepat dibandingkan Newton.Metode Prediktor Korektor Halley ini lebih cepat konvergen jika dibandingkan dengan Metode Newton dan juga memiliki iterasi yang lebih sedikit.

Adapun tujuan dari penelitian ini yaituuntuk mengetahui bagaimana menentukan akar persamaan tak linier dengan Metode Prediktor Korektor Halley, mengetahui kekonvergenannya sertamenyusun algoritmanya.

## METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan dengan menggunakan buku-buku yang relevan untuk menemukan solusi numerik dari sebuah persamaaan tak linier. Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah dengan mengkaji prinsip penggunaan MetodePrediktor Korektor Halley, mengetahui kekonvergenan MetodePrediktor Korektor Halley, dan menyusun algoritma serta menerapkan algoritma yang telah dibuat kedalam program komputer “Matlab”. Kemudian menarik kesimpulan dari hasil yang didapat berdasarkan pada teori yang telah dipelajari.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini dibahas tentang bagaimana menentukan hampiran akar dari sebuah persamaan tak linier dengan menggunakan MetodePrediktor Korektor Halley.Metode Prediktor-Korector Halley merupakan metode dua langkah dalam menemukan akar. Langkah pertama yaitu menggunakan Metode N-R dan selanjutnya Metode Halley. Metode N-R yang berperan sebagai prediktor untuk tebakan akar yang baru, dengan demikian syarat yang ada pada Metode N-R harus terpenuhi yaitu turunan pertama tidak sama dengan nol.

Setelah diperoleh nilai tebakan yang baru, nilai ini nantinya akan digunakan sebagai tebakan awal pada langkah ke-2 menggunakan Metode Halley. Nilai baru dari langkah ke-2 ini merupakan hampiran akar yang lebih baik di bandingkan dengan nilai sebelumnya.Metode Halley dijadikan sebagi korektor karena dalam satu kali iterasi pendekatan yang dilakukan Metode Halley lebih baik dan lebih stabil.Formula Metode Prediktor Korektor Halley diperoleh dari ke-2 langkah iterasi diatas yaitu dari Metode N-R dan Metode HalleyDiberikan beberapa contoh terkait persamaan tak linier, algoritma dari MetodePrediktor Korektor Halley, serta penerapannya dalam sebuah program komputer “matlab”.

### A. *Metode Prediktor-Korektor Halley*

Metode ini pada awalnya menggunakan metode Newton sebagai korektor untuk hampiran solusi dengan bentuk formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

bila tebakan awal yang diberikan cukup dekat ke akar α, maka Metode Newton memiliki kekonvergenan kuadratik.

Nilai dari persamaan Newton diatas, selanjutnya akan dijadikan tebakan awal pada Metode Halley yang menjadi korektor dalam metode ini karena memiliki kekonvergenan yang lebih cepat yaitu kekonvergenan kubik dan lebih efisien dari Metode Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)f(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f''(x_n)f(x_n)}; n = 0,1,2,.. \tag{3}$$

Dari kedua langkah diatas, dapat diperoleh metode baru dalam pencarian akar persamaan tak linier yaitu metode prediktor-korektor Halley yang memiliki bentuk formula

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f'(y_n)f(y_n)}{2[f'(y_n)]^2 - f''(y_n)f(y_n)} \tag{4}$$

### B.*Kekonvergenan Metode Prediktor-Korektor Halley*

*Teorema 1 (Orde Konvergensi)*

Misalkan $x^* \in I$ akar sederhana dari fungsi $f: I \subset R \to R$ yang terdiferensial pada interval terbuka $I$ . Jika $x_0$ cukup dekat ke $x^*$ maka metode iterasi pada persamaan

(4) mempunyai orde kekonvergenan enam dengan tingkat kesalahan (error) yaitu

$$e_{n+1} = (c_2^5 - c_2^3 c_3)e_n^6 + O(e_n^7) \quad (5)$$

Bukti Misalakan $r$ adalah akar dari persamaan $f(x) = 0$ maka $f(r) = 0$. Asumsikan $f'(r) \neq 0$ dan $x_n = e_n + r$. Ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ di sekitar $x_n = r$ sampai suku ke tujuh dan mengabaikan suku yang lebih tinggi, diperoleh

$$f(x_n) = f(r) + \frac{(x_n - r)f'(r)}{1!} + \frac{(x_n - r)^2 f''(r)}{2!} + \frac{(x_n - r)^3 f'''(r)}{3!} + \frac{(x_n - r)^4 f^{(iv)}(r)}{4!} + \frac{(x_n - r)^5 f^{(v)}(r)}{5!} + \frac{(x_n - r)^6 f^{(vi)}(r)}{6!} + \cdots \quad (6)$$

$$f(x_n) = f'(r)\{ e_n + \frac{f''(r)*e_n^2}{f'(r)2!} + \frac{f'''(r)*e_n^3}{f'(r)3!} + \frac{f^{(iv)}(r)*e_n^4}{f'(r)4!} + + \frac{f^{(v)}(r)*(e_n)^4}{f'(r)4!} + \frac{f^{(v)}(r)*(e_n)^5}{f'(r)\,5!} + \frac{f^{(vi)}(r)*(e_n)^6}{f'(r)\,6!} + \cdots \quad (7)$$

Misalkan $c_k = \frac{1}{k} * \frac{f^{(k)}(r)}{f'(r)}$ ; $k = 2,3,4, \ldots$

$$f(x_n) = f'(r)\{\; e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + \cdots\} \quad (8)$$

dengan cara yang sama kita peroleh

$$f'(x_n) = f'(r)\{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 {e_n}^5 + \cdots\} \quad (9)$$

dari persamaan (8) dan (9) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 {e_n}^6 + \cdots}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 {e_n}^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 {e_n}^5 + \cdots} \quad (10)$$

dengan menggunakan identitas deret geometri, dimana $\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \cdots$dengan $r = 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 {e_n}^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 {e_n}^5$diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + (8c_2^4 + 10c_2 c_4 + 6c_3^2 - 4c_5 - 20c_3 c_2^2){e_n}^5 + (13c_2 c_5 + 52c_2^3 c_3 + 17c_3 c_4 - 28c_2^2 c_4 - 16c_2^5 + 5c_6){e_n}^6 + \cdots \quad (11)$$

Sehingga dari persamaan (4) $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dan $x_n = e_n + r$diperoleh

$$y_n = r + c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (7c_2 c_3 - 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 - (8c_2^4 + 10c_2 c_4 + 6c_3^2 - 4c_5 - 20c_3 c_2^2){e_n}^5 - (13c_2 c_5 + 52c_2^3 c_3 + 17c_3 c_4 - 28c_2^2 c_4 - 33c_2 c_3^2 - 16c_2^5 + 5c_6){e_n}^6 + \cdots \quad (12)$$

dengan menggunakan ekspansi deret taylor maka untuk $f(y_n), f'(y_n),\; f''(y_n)$ , diperoleh

$$f(y_n) = f(r) + \frac{(y_n - r)f'(r)}{1!} + \frac{(y_n - r)^2 f''(r)}{2!} + \frac{(y_n - r)^3 f'''(r)}{3!} + \ldots$$

$$f'(y_n) = f'(r) + \frac{(y_n - r)f''(r)}{1!} + \frac{(y_n - r)^2 f'''(r)}{2!} + \frac{(y_n - r)^3 f^{(iv)}(r)}{3!} + \ldots \text{ dan}$$

$$f''(y_n) = f''(r) + \frac{(y_n - r)f'''(r)}{1!} + \frac{(y_n - r)^2 f^{(iv)}(r)}{2!} + \frac{(y_n - r)^3 f^{(v)}(r)}{3!} + \ldots$$

diekspansikan disekitaran $y_n = r$ , sehingga $f(r) = 0$ , dan dengan memisalkan $c_k = \frac{1}{k} * \frac{f^{(k)}(r)}{f'(r)}$ ; $k = 2,3,4, \ldots$diperoleh

$$f(y_n) = f'(r)\{\; c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 - (7c_2 c_3 - 5c_2^3 - 3c_4)e_n^4 - (12c_2^4 + 10c_2 c_4 + 6c_3^2 - 4c_5 - 24c_3 c_2^2)e_n^5 - (13c_2 c_5 + 73c_2^3 c_3 + 17c_3 c_4 - 34c_2^2 c_4 - 37c_2 c_3^2 - 28c_2^5 - 5c_6)e_n^6 + \cdots \quad (13)$$

dengan mengikuti langkah diatas juga dicari nilai $f'(y_n),\; f''(y_n)$ yaitu

$$f'(y_n) = f'(r)\{\, 1 + 2\, c_2^2 e_n^2 - 4(c_2^3 - c_2 c_3)e_n^3 - (11c_2^2 c_3 - 8c_2^4 - 6c_2 c_4)e_n^4 - (16c_2^5 + 20c_2^2 c_4 - 28c_2^3 c_3 - 8c_2 c_5)e_n^5 - (68c_2^4 c_3 + 16c_3 c_2 c_4 - 60c_2^3 c_4 - 26c_2^2 c_5 - 32c_2^6 - 12c_3^3)e_n^6 + \cdots \quad (14)$$

$$f''(y_n) = f'(r)\{\, 2c_2 + 6c_2 c_3 e_n^2 - 12(c_2^2 c_3 - c_3^2)e_n^3 + (18c_3 c_4 - 42c_2 c_3^2 + 12c_2^2 c_4 + 24c_2^3 c_3)e_n^4 + (24c_3 c_5 - 36c_3^3 - 12c_2 c_3 c_4 + 120c_2^2 c_3^2 - 48c_2^3 c_4 - 48c_2^4 c_3)e_n^5 + (30c_3 c_6 - 54c_3^2 c_4 + 72c_4^2 c_2 - 78c_2 c_3 c_5 + 198c_2 c_3^3 - 96c_2^2 c_3 c_4 + 20c_2^3 c_5 - 312c_2^3 c_3^2 + 144c_2^4 c_4 + 96c_5 c_2^5)e_n^6 + \cdots \quad (15)$$

Substitusikan persamaan (8) sampai (15) ke persamaan (4) $x_{n+1} = y_n - \frac{2f'(y_n)f(y_n)}{2[f'(y_n)]^2 - f''(y_n)f(y_n)}$ dan dengan dibantu dengan identitas deret geometri seperti diatas diperoleh

$$x_{n+1} = r + (c_2^5 - c_2^3 c_3)e_n^6 + O(e_n^7) \qquad (16)$$

Misalkan $x_{n+1} - r = e_{n+1}$ , maka persamaan (16) menjadi

$e_{n+1} = (c_2^5 - c_2^3 c_3)e_n^6 + O(e_n^7)$ dengan $x_{n+1} = e_{n+1} + r$ .

yang menunjukkan Metode Prediktor-Korektor Halley memiliki kekonvergenan orde enam, maka teorema terbukti.

C. *Algoritma Metode Prediktor Korektor Halley*

Masukan :

Nilai awal $x_0$,
Fungsi $f$,
Maksimal iterasi M,
Batas galat maksimal $e$

Proses :

1. Masukan nilai awal $x_0$,f ungsi $f$, batas galat maksimal
2. Untuk $n = 1, \ldots, M$ lakukan

a. $y_{[n]} = x_{[n]} - \frac{f(x_{[n]})}{f'(x_{[n]})}$

$$x_{[n+1]} = y_{[n]} - \frac{2f'(y_{[n]})\,f(y_{[n]})}{2\left[f'(y_{[n]})\right]^2 - f''(y_{[n]})f(y_{[n]})}$$

b. Jika $\left(x_{[n+1]} - x_{[n]}\right) < e$ maka akar adalah $x[n]$.
Jika tidak $x_0 = x_{[n]}$

3. Keluaran akar $c$

D. *Simulasi Numerik*

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan banyak iterasi dari Metode Newton (MN) (2), Metode Halley (3), dan Metode Prediktor-Korektor Halley (PCH) (4) dalam menemukan akar dari persamaan tak linier. Dalam melakukan perbandingan ini, persamaan tak linier yang digunakan adalah :

$f_1(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$ ,

$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ ,

$f_3(x) = \cos x - x$ ,

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$ ,

$f_5(x) = x^3 - 10$ ,

$f_6(x) = e^{x^2+7x-3} - 1$ ,

Perbandingan contoh diatas menggunakan program Matlab R2014a, dengan menggunakan kriteria pemberhentian program komputasi yang sama untuk setiap metode yaitu :

1. Jika $f'(x_n) = 0$ ,
2. Jika $f(x_{n+1}) \leq e$,
3. Jika $|x_n - x_{n+1}| \leq e$,

dengan $e$ adalah sebesar $10^{-1}$ dan maksimum iterasi 100.

Hasil ditampilkan pada tabel perbandingan dari tiga metode yang berbeda. Kolom pertama merupakan no, kolom kedua merupakanfungsi, kolom ketiga merupakan tebakan awal yang dinotasikan dengan $x_0$, kolom keempat sampai keenam merupakan metode yang dibandingkan, sedangkan $d\ v$ (divergen) menyatakan bahwa iterasi yang dihasilkan tidak menuju ke satu akar.

Dengan nilai tebakan awal dan galat yang sama pada satu persamaan terdapat perbedaan kecepatan dalam menemukan hampiran akar sesuai galat yang ditetapkan.Berdasarkan jumlah iterasi, maka dari tabel terlihat bahwa terdapat perbedaan yang signifikan antara ketiga metode. Secara umum Metode Prediktor-Korektor Halley lebih unggul dari metode pembanding yang lain.

TABEL I
JUMLAH ITERASI METODE N-R, H, PKH.

| No | $f(x)$ | $x_0$ | Akar | N-R | H | PKH |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $f_1(x)$ | 1 | 1,40449164821534 | 6 | 4 | 2 |
| 2 | $f_2(x)$ | 2 | 0,25753028543968 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | $f_3(x)$ | 1,7 | 0,73908513321516 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | $f_4(x)$ | 3,5 | 2,00000000000000 | 7 | 4 | 3 |
| 5 | $f_5(x)$ | 1,5 | 2,15443469003188 | 6 | 3 | 2 |
| 6 | $f_6(x)$ | 3,5 | 3,00000000000000 | 12 | 6 | 4 |

## SIMPULAN

Berdasarkan penelitian, dapat diambil kesimpulan bahwa metode Prediktor Korektor Halleylebih cepat menemukan akar dibandingkan Metode Newton Raphson dan Metode Halley karena memiliki orde kekonvergenan enam dalam menyelesaikan akar persamaan tak linier.

## REFERENSI

[1] Conte, Samuel D. 1992. *Dasar-Dasar Analisis Numerik.* Jakarta: Erlangga.

[2] Spanos, Aris. 1986. *Statistical Foundations of Econometric Modelling*. New York : Cambidge University Press

[3] Inayat, Noor Khalida & Muhammad Aslam Noor. 2007. "*Predictor-Corrector Halley Method for Nonlinear Equations*." Jurnal Applied Mathematics And Computation. 1587-1591

[4] Amri, Khairil. "Menentukan Akar Persamaan Tak Linier dengan Menggunakan Metode Prediktor Korektor Halley". Skripsi. Universitas Negeri Padang, Padang Indonesia, Juli, 2016.

[5] Susila, I Nyoman. 1992. *Dasar-Dasar Metode Numerik*. Bandung: FMIP