UNPjoMath Vol.4 No 2 September 2021
ISSN:997 235516589 24-28

Model Matematika Persediaan Barang karena Adanya Kerusakan dengan Tingkat Permintaan Eksponensial dan *Partial Backlogging*

Iswarnedi[#1], Muhammad Subhan [*2], RirySriningsih [*3]

[#]*Student of MathematicsDepartment Universitas Negeri Padang, Indonesia*
**Lecturers of MathematicsDepartment Universitas Negeri Padang, Indonesia*

[1]iswarnedi1994@gmail.com
[2]13subhan@gmail.com
[3]srirysriningsih@yahoo.com

Abstract – Inventory control by companies is needed to ensure of customers's demand. Optimal order quantity is a model that uses for counting the optimal total of an item, which could be bought or produced to minimize the costs, both in terms of supplies and processing order purchase. The purpose of this research is to form the inventory model for deteriorating item with exponential demand rate. The method is descriptive method by analyzing the theories which are relevant to the problem. Finally, we get the model form and numerical example that is given to illustrate the model.

Keywords– mathematical model, inventory, exponensialdemandrate,deterioration,partialbacklogging

Abstrak – Pengendalian persediaan oleh perusahaan dagang dibutuhkan untuk menjamin persediaan mencukupi permintaan pelanggan.*Optimal order quantity* merupakan suatu model yang digunakan untuk menghitung jumlah optimal suatu barang, yang dapat dibeli atau diproduksi untuk meminimalkan biaya, baik persediaan maupun pengolahan pesanan pembelian. Tujuan penelitian ini adalah untuk membentuk model persediaan untuk barang yang mengalami kerusakan dengan tingkat permintaan eksponensial.Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas. Terakhir, diperoleh bentuk model dan contoh numerik diberikan untuk mengilustrasikan model.

Kata Kunci – model matematika,persediaan, permintaan eksponensial, kerusakan, *partial backlogging*

PENDAHULUAN

Perkembangan dunia usaha di Indonesia tumbuh dengan pesat, salah satunya adalah usaha perdagangan. Secara umum, perusahaan dagang didefenisikan sebagai perusahaan yang kegiatan usahanya hanya membeli barang jadi, dengan tujuan menjual kembali ke pihak lain tanpa memprosesnya (mengubah bentuk) terlebih dahulu. Contohnya perusahaan ekspor-impor, distributor, dealer motor dan sebagainya [1]. persediaan barang dagang adalah persediaan yang terdiri atas barang-barang yang disediakan untuk dijual kembali kepada para konsumen selama periode normal kegiatan perusahaan [2].

Persediaan mempunyai peranan yang sangat penting bagi perusahaan dagang. Apabila persediaan barang terlalu banyak maka biaya yang harus dikeluarkan perusahaan akan besar, seperti biaya sewa gudang, upah karyawan, tetapi apabila persediaan sedikit akan membuat pelanggan pergi ke perusahaan lain, hal ini disebabkan ketidakmampuan perusahaan dalam mengendalikan persediaan barang [4].

Salah satu model pengendalian persediaan adalah model EOQ (*Economic Order Quantity*) [5]. Model ini biasanya digunakan untuk menjamin ketersediaan barang yang tersedia untuk kelancaran usaha sehingga tidak terjadi kelebihan persediaan barang, menghindari kekurangan persediaan, dan meminimalkan biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan dalam melakukan pengendalian persediaan

Pada penelitian ini, penulis akan melihat persediaan barang karena adanya kerusakan dengan tingkat permintaan eksponensial dan *partial backlogging*. Selanjutnya dilihat dampaknya terhadap ketersediaan barang. Sehingga untuk kedepannya dapat diambil langkah untuk menanggulangi persediaan barang yang sering tidak bisa memenuhi permintaan pelanggan.

METODE

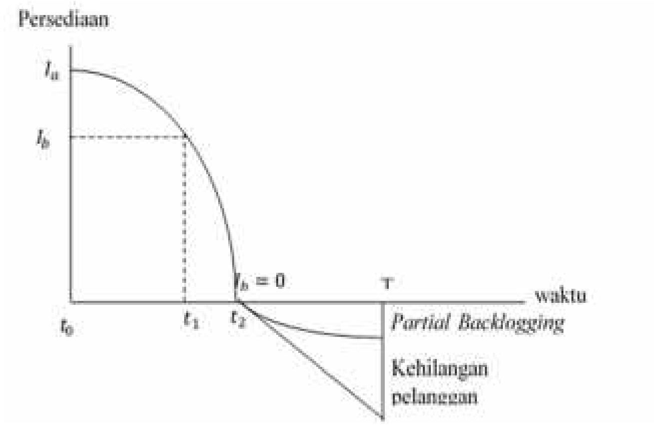
Penelitian ini adalah penelitian dasar. Adapun metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap permasalahan yang dibahas. Langkah-langkah untuk mendapatkan jawaban dari permasalahan yaitu:

1. Mempelajari Model EOQ sederhana.
2. Mempelajari tingkat permintaan yang bersifat eksponensial.
3. Mempelajari masalah kerusakan barang.
4. Mempelajari konsep *partial backlogging.*
5. Menentukan asumsi-asumsi untuk membuat model matematisnya.
6. Menyelesaikan model secara matematika.
7. Memberikan interpretasi dari model tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Situasi Persediaan dalam Pembentukan Model*

Model EOQ merupakan model dasar yang digunakan dalam pengembangan model ini. Model yang akan dikembangkan adalah model persediaan yang mempertimbangkan kendala persediaan seperti terjadinya kerusakan barang saat proses penyimpanan, permintaan barang yang bersifat eksponensial serta adanya kekosongan barang (*shortage*) yang mengharuskan pelanggan menunggu sampai persediaan yang baru datang (*backlogging*). Adapun situasi dari model tersebut seperti pada gambar 1.



Gambar 1. Situasi persediaan dengan adanya kerusakan dengan tingkat permintaan eksponensial dan *partial backlogging*

B. *Asumsi Pembentukan Model*

Berdasarkan permasalahan yang diamati, asumsi-asumsi yang digunakan dalam pembentukan model adalah sebagai berikut:

1. Pemesanan hanya dilakukan untuk satu jenis barang (*single – item*).
2. Tingkat permintaan barang $D(t)$ terhadap waktu adalah:
$$D(t) = \begin{cases} e^{\lambda}, & 0 \le t < t_1 \\ \alpha, & t_1 \le 0 \le T \end{cases}$$
Dimana$\lambda > 0$ dan $\alpha > 0$
3. Masa tunggu barang (*leadtime*) adalah nol
4. Tingkat kerusakan barang adalah θ, dan $0 < \theta < 1$ adalah konstan
5. Kekosongan barang (*shortage*) di perbolehkan.
6. Setiap pemesanan diterima dalam sekali pengiriman, perusahaan dapat langsung di jual, dan jumlah pemesanan tidak terbatas.
7. Tingkat *backlogging* akan dimulai ketika persediaan kosong dan tergantung berapa lama waktu yang dibutuhkan sampai barang datang. Tingkat *partial backlogging* adalah $B(t) = \frac{1}{1+\delta(T-t)}$, dimana $\delta > 0$ menyatakan tingkat *backlogging.*
8. $I_u(t)$adalah persediaan barang saat t, $0 \le t < t_1$ dimana barang belum mengalami kerusakan, $I_b(t)$adalah persediaan barang saat t, $t_1 \le t < t_2$ dimana barang telah mengalami kerusakan, dan $I_b(t)$adalah persediaan barang saat t, $t_2 \le t < T$, saat barang telah kosong (*shortage*) dan terjadinya *partial backlogging*.

C. *Proses Pembentukan Model*

Bersadarkan langkah-langkah dalam membentuk model persediaan, langkah pertama yang dilakukan adalah memahami kondisi persediaan barang. Langkah ini dilakukan dengan menentukan faktor-faktor yang dianggap penting atau sesuai dengan permasalahan.

Adapun variabel yang digunakan dalam pembentukan model matematika persediaan barang karena adanya kerusakan dengan tingkat permintaan eksponensial dan *partial backlogging* yaitu:

$I_u(t)$ = Persediaan barang pada $0 \le t \le t_1$
$I_b(t)$ = Persediaan pada waktu $t_1 \le t \le t_2$
$I_L(t)$ = barang yang kurang waktu $t_2 \le t \le T$
Q = Optimal order quantity
T = Panjang satu kali siklus persediaan,
S = Banyak barang yang *backlogging*
t_1 = waktu ketika barang mulai mengalami kerusakan (tahun)
t_2 = waktu ketika persediaan habis (tahun)

Sedangkan parameter yang digunakan adalah:

A = Biaya pemesanan per sekali pesan (Rp)
c_h = Biaya simpan per unit (Rp per unit)
c_p = Biaya pembelian per unit (Rp /unit)
c_d = Biaya kerusakan barang per unit (Rp /unit)
c_s = Biaya kekurangan barang per unit (Rp /unit)
c_u = Biaya kehilangan penjualan per unit (Rp /unit)
θ = Tingkat kerusakan barang
δ = tingkat *backlogging*
λ = tingkat permintaan

Pada awal siklus persediaan, barang akan mencapai persediaan maksimum (I_m) unit barang saat $t = 0$. Persediaan barang akan terus mengalami pengurangan dengan tingkat permintaan eksponensial terhadap waktu. Persediaan pada waktu t, $0 \le t < t_1$ tidak mengalami kerusakan barang, dikarenakan barang masih disimpan dalam waktu yang singkat.

Kondisi persediaan saat $I_u(t)$ didefinisikan oleh persamaan differensial berikut:
$\frac{dI_u(t)}{d} = -e^{\lambda}$, $0 \le t < t_1$

Dengan kondisi $I_u(0) = I_m$

$$I_u(t) = -\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} + c$$

Karena $I_u(0) = I_m$

$$c = I_m \quad + \frac{1}{\lambda}$$

Substitusikan nilai c ke persamaan $I_u(t)$ awal, maka diperoleh:

$$I_u(t) = I_m \quad + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda}\ \right) \qquad (1)$$

Pada siklus berikutnya $t_1 \le t < t_2$ persediaan akan mengalami kerusakan, karena waktu penyimpanan yang lebih lama, hal ini menyebabkan persediaan pada waktu t_1 adalah sebanyak $I_b(t)$ akan terus berkurang karena proses jual beli tetap berlangsung dan juga karena kerusakan. Persediaan barang akan mencapai kondisi minimum saat t_2, dimana persediaan $I_b(t_2) = 0$. Kondisi persediaan saat $I_b(t)$ didefinisikan oleh persamaan differensial berikut:

$$\frac{dI_u(t)}{d} + 6I_b(t) = -e^{\lambda}\ , \qquad t_1 \le t \le t_2$$

Dengan kondisi $I_b(t_2) = 0$.
Persamaan di atas diselesaikan dengan menggunakan persamaan linear orde satu, didapatkan:

$$I_b(t) = -\frac{1}{\theta - \lambda}e^{t} \ + Ce^{-6}$$

Karena $I_b(t_2) = 0$. Diperoleh

$$C = \frac{1}{6 - \lambda}e^{t_2(\lambda+\theta)}$$

Substitusikan nilai C, didapat

$$I_b(t) = \frac{1}{\theta-\lambda}\left(e^{t_2(\lambda+\theta)}.e^{-6} \ - e^{t}\ \right)$$

Karena persediaan pada $I_u(t_1) = I_b\,(t_1)$, diperoleh:

$$I_m \quad = \frac{1}{\theta-\lambda}\left(e^{t_2(\lambda+\theta)}.e^{-\theta t_1} - e^{t_1\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t_1}\right) \qquad (2)$$

Substitusikan nilai I_m ke persamaan (1). Diperoleh

$$I_a(t) = \frac{1}{\theta-\lambda}\left(e^{t_2(\lambda+\theta)}.e^{-\theta t_1} - e^{t_1\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t_1} - e^{\lambda}\ \right) \qquad (3)$$

Persediaan akan mencapai titik minimum (nol) pada saat t_2 dan terjadilah kekurangan barang, hal ini terjadi karena pemesanan barang yang baru belum datang, sedangkan penjualan tetap berlangsung. Permintaan barang bersifat *backlogging* dapat didefinisikan dalam persamaan differensialdibawah ini:

$$\frac{dI_L(t)}{d} = -\frac{u}{1 + \delta\ (T - t_t)}, \quad t_2 \le t \le T$$

Dengan kondisi $I_L(t_2) = 0$, $t_2 \le t \le T$

Untuk mencari solusinya dapat dilakukan dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh:

$$I_L(t) = \frac{u}{\delta}\ln(1 + \delta(T - t)) + C$$

Dimana$I_L(t_2) = 0$, $t_2 \le t \le T$, maka

$$C = -\frac{u}{\delta}\ln\left(1 + \delta(T - t_2)\right)$$

Substitusikan nilai C yang diperoleh, maka

$$I_L(t) = -\frac{u}{\delta}[\ln 1 + \delta(T - t_2) - \ln 1 + \delta(T - t)] \qquad (4)$$

Total permintaan barang yang backlogging per siklus persediaan adalah saat $t = T$ dari persamaan (4), diperoleh

$$S = -I_L(T)$$

$$S = \frac{u}{\delta}[\ln 1 + \delta(T - t_2)], \quad t_2 \le t \le T \qquad (5)$$

Dari persamaan (2) dan (5) diperoleh order quantity(Q), dimana

$$Q = I_m \quad + S$$

$$Q = \frac{1}{\theta-\lambda}\left(e^{t_2(\lambda+\theta)}.e^{-\theta t_1} - e^{t_1\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t_1}\right) + \frac{u}{\delta}(\ln 1 + \delta(T - t_2)) \qquad (6)$$

Pada proses pengendalian persediaan yang mempertimbangkan kendala persediaan seperti terjadinya kerusakan barang saat proses penyimpanan, permintaan barang yang eksponensial dan *partialbacklongging* memuat beberapa biaya yang mempengaruhi biaya total persediaan.

Adapun biaya-biaya tersebut yaitu:

a. Biaya Pemesanan

$$A_L = A$$

b. Biaya Pembelian

$$P = c_p * \left[\frac{1}{\theta-\lambda}\left(e^{t_2(\lambda+\theta)}.e^{-\theta t_1} - e^{t_1\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t_1}\right) + \frac{\alpha}{\delta}(\ln 1 + \delta(T - t_2)\right]$$

c. Biaya Penyimpanan (H_L)

$$H_L = c_h\left[\left\{\frac{e^{t_2\lambda}}{\lambda+\theta}\langle e^{-\theta t_1}.e^{t_2\theta}\left(t_1+\frac{1}{\theta}\right)-\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\lambda}\right)\rangle\right\} + e^{t_1\lambda}\left(\frac{t_1}{\lambda}-\frac{t_1}{\lambda(\theta+\lambda)}+\frac{1}{\lambda(\theta+\lambda)}-\frac{1}{\lambda^2}\right)+\frac{1}{\lambda^2}\right]$$

d. Biaya kerusakan barang (D_L)

$$D_L = c_d\left(I_b t_1 - \int_{t_1}^{t_2} D(t)\ d\ \right)$$

$$D_L = c_d\left\{e^{\lambda t_2}\left(\frac{e^{-\theta t_1}.e^{\theta t_2}}{\theta+\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)+e^{\lambda t_1}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\theta+\lambda}\right)\right\}$$

e. Biaya kekurangan barang (S_L)

$$S_L = c_s\int_{t_2}^{T}[-I_L(t)]\ d$$

$$S_L = \frac{c_s\alpha}{\delta}\left[(T-t_2)-\frac{\ln(1+\delta(T-t_2))}{\delta}\right]$$

f. Biaya kehilangan pelanggan

$$O_L = c_o\int_{t_2}^{T}\alpha\left(1-\frac{1}{1+\delta(T-t)}\right)d$$

$$O_L = c_o\alpha\left[(T-t_2)-\frac{1}{\delta}(\ln 1+\delta(T-t_2))\right]$$

Jadi, total biaya persediaan adalah:

$$T\ (t_2) = \frac{1}{T}[A_L + H_L + D_L + S_L + O_L]$$

$$T\ (t_2) = \frac{1}{T}\Bigg[A + c_h\left[\frac{e^{t_2\lambda}}{\lambda+\theta}\left\{e^{-\theta t_1}.e^{t_2\theta}\left(t_1+\frac{1}{\theta}\right)-\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\lambda}\right)\right\}+e^{t_1\lambda}\left\{\frac{t_1}{\lambda}-\frac{t_1}{\lambda(\theta+\lambda)}+\frac{1}{\lambda(\theta+\lambda)}-\frac{1}{\lambda^2}\right\}+\frac{c_h}{\lambda^2}\right] + c_p\left[\frac{1}{\theta-\lambda}\left(e^{t_2(\lambda+\theta)}.e^{-\theta t_1}-e^{t_1\lambda}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{\lambda t_1}\right)+\frac{\alpha}{\delta}(\ln 1+\delta(T-t_2))\right] + c_d\left\{e^{\lambda t_2}\left(\frac{e^{-\theta t_1}.e^{\theta t_2}}{\theta+\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)+e^{\lambda t_1}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\theta+\lambda}\right)\right\} + \frac{c_s\alpha}{\delta}\left[(T-t_2)-\frac{\ln(1+\delta(T-t_2))}{\delta}\right] + c_L\alpha\left[(T-t_2)-\frac{1}{\delta}(\ln 1+\delta(T-t_2))\right]\Bigg] \quad (7)$$

Selanjutnya, misalkan:

$B = \frac{A}{T}+\frac{1}{\lambda^2 T}+\frac{e^{t_1\lambda}}{T}\left(\frac{t_1+1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}-\frac{t_1+1}{\theta+\lambda}+\frac{1}{\lambda(\theta+\lambda)}\right)+\alpha\left(\frac{1}{\delta}+1\right)$

$C = \frac{e^{-\theta t_1}}{(\theta+\lambda)T}\left(t_1+1+\frac{1}{\theta}\right),$

$D = \theta+\lambda,$

$E = \frac{1+\theta}{\theta},$

$F = \frac{\alpha}{T}\left(\frac{1}{\delta}+1\right), d$

$G = 1+\delta$

Sehingga diperoleh persamaan t b p yang baru, yaitu:

$$T\ (t_2) = B + Ce^{Dt_2} - Ee^{\lambda t_2} - Ft_2 - F\left(\frac{\ln(G-\delta t_2)}{\delta}\right) \quad (8)$$

Berdasarkan aturan untuk menentukan nilai minimum untuk turunan harus memenuhi syarat, antara lain:

i. $\frac{d}{dt_2} = 0,$

$$\frac{d}{dt_2} = -F + C\ \ e^{Dt_2} - \lambda\ \ e^{\lambda t_2} + \frac{F}{G-\delta t_2} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$\lambda\ \ \delta t_2 e^{\lambda t_2} - C\ \ \ t_2 e^{Dt_2} + C\ \ G\ \ ^{Dt_2} - \lambda\ \ \ e^{\lambda t_2} + F\ \ t_2 + F - F\ \ = 0 (9)$$

ii. $\frac{d^2T}{dt_2^2} > 0$

$$\frac{d^2T}{dt_2^2} = CD^2e^{Dt_2} - \lambda^2 Be^{\lambda t_2} + \frac{\delta}{(1-\delta t_2)^2} > 0 \qquad (10)$$

Apabila kedua syarat untuk mencari nilai minimum telah dipenuhi, maka nilai t_2 yang didapatkan adalah titik minimum, selanjutnya substitusikan titik t_2 yang diperoleh ke persamaan (7) untuk menentukan berapa total biaya persediaan minimum, dan selanjutnya substitusikan juga ke persamaan (6) untuk menentukan pemesanan jumlah barang yang optimal.

D. *Interpretasi Model*

Berdasarkan pembahasan di atas, maka bisa dibuat interpretasi modelnya yaitu agar jumlah pemesanan menjadi optimal maka tingkat permintaan barang harus diperbesar, sedangkan waktu barang habis diperkecil, sedangkan tingkat kerusakan barang harus diperkecil agar keuntungan yang diperoleh perusahaan maksimal dan total biaya persediaan minimum (optimum).

E. *Simulasi Model*

Simulasi dari dengan nilai parameter yang berbeda dimana diketahui yaitu: A_c= Rp 15.000.000, C_h= 1.000.000/unit, C_p= Rp 7.000.000/unit, C_d= Rp 800.000/unit, C_s= Rp 1.400.000/unit, C_u= Rp 1.100.000, α= 200 unit/tahun, θ=0,5, $\delta = 0,6$, T =1 tahun t_1=0,5 tahun, tentukan berapa pemesanan barang yang optimum dengan biaya total yang minimum?

$$\lambda \quad \delta t_2 e^{\lambda t_2} - C \quad t_2 e^{Dt_2} + C \quad G \quad ^{Dt_2} - \lambda \quad e^{\lambda t_2} + F \quad t_2 + F - F \quad = 0$$

Dengan menggunakan softwaremaple, diperoleh titik $t_2 = 0,64$, substitusikan titik t_2 yang diperoleh:

$$T \quad (t_2) = \frac{1}{T}[A_c + H_c + P \quad + D_c + S_c + O_c]$$

$$= 816.575.138 \text{ Rupiah}$$

Dengan banyaknya pemesanan barang $= 99$ unit

Kesimpulannya diperoleh waktu minimum (optimal) titik t_2= 0,64 tahun dengan pemesanan 99 unit dan biaya minimum (optimal) pada titik t_2 adalah 816.575.138 Rupiah.

SIMPULAN

a. Model persediaan barang yang diperoleh adalah persamaan (6).
b. Faktor yang mempengaruhi jumlah pemesanan optimum adalah tingkat permintaan barang dan tingkat kerusakan barang, tingkat backlogging. jadi tingkat permintaan ditingkatkan dan tingkat kerusakan dikurangi serta dengan waktu barang habis dipercepat.

REFERENSI

[1] Al Haryono, Yusuf.2011.*Dasar-dasar Akutansi*. Yogyakarta: Penerbit Sekolah Tinggi Ekonomi Yayasan Keluarga Pahlawan Negara.

[2] Assauri, Sofjan. 2004. *Manajemen Produksi dan Operasi* , Edisi Revisi Lembaga. Jakarta : Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia

[3] Iswarnedi.2016. *Model Matematika Persediaan Barang Karena Adanya Kerusakan Dengan TingkatPermintaan Eksponensial DanPartialBacklogging.*Universitas Negeri Padang.

[4] Nasution, Arman Hakim.2006. *Manajemen Indusri*. Yogyakarta:Andi.

[5] Raj, Ritu&NareshKumarKaliraman. 2015. Inventory Model For DeterioratingItemwithExponensialDemandRateandPartialBacklogging. *International journal of Mathematics Trends and Technologi* (Volume 22 Number 1)