Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carriers

Windi Jelita [1], Defri Ahmad [2]
[1,2],Prodi Matematika,Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received March 10, 2021
Revised August 08, 2021
Accepted March 30, 2022

Keywords:

Mathematical Models
Pneumonia
Streptococcus Pneumonia
Carriers
immunity

Kata Kuncis:

Model Matematika
Pneumonia
Streptococcus Pneumonia
Carriers
kekebalan tubuh

ABSTRACT

Pneumonia disease is an infIammatory disease of the lungs (alveoli) caused by the bacterium Streptococcus pneumonia. When the body's immune system decreases, Streptococcus pneumonia will multiply and cause damage. Individuals colonized with Streptococcus pneumonia act as reservoirs for disease transmission. In Indonesia this disease is an endemic disease. In this study, a mathematical model is presented to describe the population of pneumonia in infants and toddlers. The purpose of this study was to determine the form of a mathematical model on the spread of disease, to know the results of the analysis and interpretation of the results of the analysis of the mathematical model of the spread of pneumonia with carriers. This research begins by determining the variables, parameters and assumptions related to the problem. The model that has been formed will then be analyzed. From the analysis obtained two fixed points, namely disease-free and endemic. From the results of the analysis, it was also obtained that the rate of individual contact could increase the spread of the spread of infected and infected individuals who were resistant to the body while being able to carry the spread of pneumonia.

ABSTRAK

Penyakit Pneumonia merupakan penyakit radang paru-paru (alveoli) yang disebabkan oleh bakteri Streptococcus Pneumonia. Dikala sistem imunitas tubuh menurun Streptococcus Pneumonia akan memperbanyak diri serta menimbulkan kerusakan. Individu yang terkolonisasi dengan sptreptococcus pneumonia berperan sebagai reservoir bagi penularan penyakit. Di Indonesia penyakit ini merupakan penyakit endemik. Dalam penelitian ini disajikan model matematika yang mendeskripsikan populasi penyakit pneumonia pada bayi dan baIita. Tujuan peneIitian ini adaIah untuk mengetahui bentuk modeI matematika pada penyebaran penyakit, mengetahui hasil analisis dan interpretasi dari hasil analisis model matematika penyebaran penyakit pneumonia dengan carriers. Penelitian ini dimulai dengan menentukan variable, parameter dan asumsi yang berhubungan dengan permasalahan. Model yang telah dibentuk, Selanjutnya dianalisis. Dari Analisis didapat dua titik tetap, yaitu

Penulis pertama:

(Windi Jelita)
Prodi Matematika,Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl.Prof.Dr. Hamka,Air Tawar barat,Padang Utara, Padang, 25171 Padang,Sumatera Barat
Email: windijelita23@gmail.com

bebas penyakit dan endemik. Dari hasiI anaIisis juga didapat kan laju kontak indivu terinfeksi bisa meningkatkan penyebaran sedangkan individu pembawa dan terinfeksi yang memperoleh kekebalan tubuh sementara bisa menekan penyebaran pneumonia.

1. PENDAHULUAN

Pneumonia merupakan peradangan kronis yang menyarang jaringan paru-paru (aIveoli) yang disababkan terutama oIeh bakteri. Pneumonia sangat kerap menimbulkan kematian pada balita serta anak bayi. Terbentuknya pneumonia pada anak bayi dan balita kerapkali bertepatan dengan terbentuknya proses peradangan kronis pada bronkus yang disebut *bronchopneumonia* [1].

WorId HeaIth Organization (WHO) memperkirakan di negera berkembang peristiwa pneumonia anak- baIita sebesar 151, 8 juta permasaIahan pneumonia per tahun, sekitar 8, 7% (13,1 juta) adalah pneumonia berat. Didunia ada 15 negera dengan prediksi permasaIahan baru serta peristiwa pneumonia sangat tinggi anak- baLita sebesar 74% (115, 3 juta) dari 156 juta permasaIahan di seIuruh dunia. Lebih dari separuh berlangsung pada 6 negera, salah satu nya adalah Indonesia [2].

Di negera berkembang, 60% permasalahan pneumonia diakibatkan oleh bakteri. Oleh karena itu pneumonia disebut sebagai pembunuh anak no 1 (*the number one kiIIer of chiIdren*). Di negera berkembang pneumonia iaIah penyakit terabaikan (*the negIegted disease*) ataupun terIupakan (*the forgotten disease*). Banyak anak maninggaI disebabkan oleh pneumonia, tetapi sangat sedikit atensi yang diberikan terhadap permasaIahan tersebut [3].

Bakteri yang umumnya menimbulkan pneumonia yaitu *Streptococcus Pneumonia* (pneumococcus). Pneumococcus ini umumnya membentuk flora normal dalam rongga *nasofaringeal* manusia. orang yang secara asimtomatik terkolonisasi dengan *S. pneumoniae* akan berperan sebagai reservoir untuk penularan penyakit [4].

Berbagai organisme ataupun racun yang cenderung mengganggu jaringan serta organ badan dapat dilawan oleh sistem imunitas tubuh. Dikala sistem imunitas tubuh menurun *Streptococcus Pneumonia* akan memperbanyak diri serta menimbulkan kerusakan. Semua jaringan paru- paru dipadati oleh cairan serta peradangan dengan cepat menyebar ke segala tubuh lewat aliran darah. Indikasi yang ditimbulkan adalah panas tinggi, berkeringat, nafas terengah- engah, denyut jantung meningkat dengan cepat, serta dapat mengakibatkan kematian [5].

Masalah penyebaran penyakit pneumonia ini perlu segera dilakukan tindakan lebih lanjut agar pneumoia tidak lagi bersifat endemik di Indonesia. Untuk membantu penyelesaian masalah penyebaran penyakit pneumonia ini digunakan model matematika.

Model matematika terhadap penyakit pneumonia ini pernah dibahas sebagaimana pada [6] dengan menggunakan model SIR. Model penyebaran penyakit pneumonia dengan menambahkan sub populasi C (*carriers*) pernah dibahas sebuah jurnal pada [7] yang mengemukakan bahwa bakteri yang menyebabkan pneumonia merupakan bakteri bawaan (*carriage*) yang biasa di temukan pada nosofaring anak-anak dan dapat terinfeksi pada kelas rentan.

Dalam penelitian ini, model yang digunakan didapat dengan mengambangkan model SICR sebagaimana pada [7] Dengan perbedaan, penelitian ini mempertimbangkan adanya individu yang pulih membersihkan semua bakteri di tubuh nya dan mendapatkan kekebalan sementara, namun ada sebagian dari mereka yang masih akan membawa bakteri. Dengan menggunakan pemodeIan matematika yang berdasarkan asumsi-asumsi yang di buat, diharapkan dapat menjeIaskan fenomena dan mengambiI tindakan jika terjadi epidemi.

2. METODE

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian dasar. Metode deskriptif digunakan pada penelitian ini dengan berpedoman pada teori-teori yang relevan. Studi kepustakaan dilakukan dengan cara mempelajari dan mengkaji buku dan sumber lainnya yang berhubungan dengan masalah penyakit pneumonia. Selanjutnya ditelaah faktor-faktor yang dapat membantu dalam membuat asumsi, parameter dan variabel yang digunakan dalam membentuk model penyakit pneumonia. Berdasarkan asumsi, parameter dan variabel dibentuk model matematika. Kemudian model dianalisis dan

3. HASIL DAN PAMBAHASAN

3.1. Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carriers

Berdasarkah tahap-tahapan dalam membangun sebuah model matematika, tahap pertama yang dilakukan adalah mengidentifikasi masalah dengan cara menggali informasi seputaran masalah dan menentukan faktor-faktor penting yang sesuai dengan permasalahan. Tahapan ini meliputi indentifikasi variabel, parameter dan membentuk suatu hubungan antara variabel dan parameter.

Asumsi-asumsi model matematika penyebaran penyakit demam tifoid sebagai berikut:

1) Pada populasi balita tidak terjadi proses imigrasi dan emigrasi sehingga populasi tertutup
2) Terjadi keIahiran dan kematian daIam popuIasi
3) lndividu yang terinfeksi dapat mengaIami kematian
4) lndividu rentan penyakit tardiri dari individu yang beIum tarjangkit pneumonia dan individu yang pernah terjangkit pneumonia nemun hiIang kekebaIannya.
5) Individu terinfeksi yang memperoleh kekebalan alami tubuh sementara bisa sembuh dari infeksi namun masih membawa bakteri
6) Individu terinfeksi yang memperolah kekebalan sementara dapat membersihkan bakteri dari tubuhnya
7) Individu pembawa bakteri dapat menjadi individu yang terinfeksi saat terjadi kolonisasi bakteri.

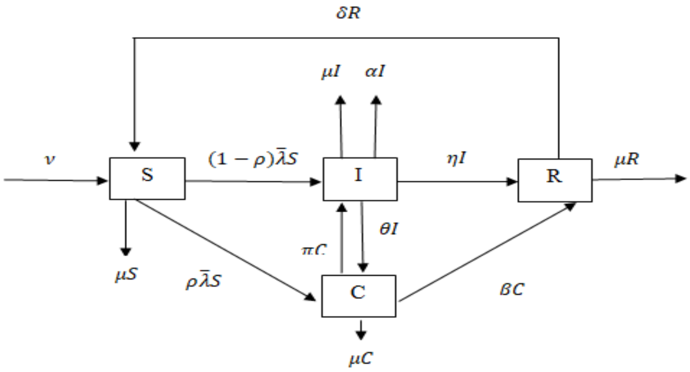
Pada pembentukan model matematika dinamika penyakit pneumonia dengan carriers digunakan empat variabel yaitu *Susceptibe* (S) kelompok individu yang rentan terhadap penyakit pneumonia, *carriers* (C) keIompok individu pembawa penyakit pneumonia, *Infected* (I) kelompok individu yang telah terinfeksi penyakit pneumonia, dan *Recovered* (R) kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit pneumonia.

Parameter yang digunakan dalam pembentukan model dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter Model Penyakit Pneumonia

Parameter	Keterangan
μ	Iaju kematian aIami
ν	Iaju keIahiran
ρ	peIuang tarjadinya kontak individu rentan ke individu pada keIas bawaan
$(1-\rho)$	peIuang terjadinya kontak individu yang rentan ke individu yang tarinfeksi penyakit
θ	Laju individu terinfeksi yang memperoIeh kekebaIan sementara namun masih membawa bakteri di tubuhnya
π	laju sifat bawaan yang terinfeksi
η	Laju individu terinfeksi yang puIih yang memperoleh kekebaIan sementara dan mAmbersihkan seluruh bakteri di tubuhnya
β	laju individu pembawa yang puIih memperoleh kekebaIan sementara
α	Laju kemetian yang disebabkan oleh pneumonia pada popuIasi tArinfeksi
δ	tingkat kemungkinan terinfeksi kembali
ε	kontak individu yang menunjukkan gejala terinfeksi
φ	Laju kontak penyebab infeksi
$\bar{\lambda}=\psi\left(\frac{I+\varepsilon C}{N}\right)$	laju individu yang terinfaksi oIeh kontak terhadap pembawa atau yang tarinfeksi

Berdasarkan asumsi, variabel, dan parameter yang telah diberikan maka dapat dibentuk diagram model matematika dinamika penyakit pneumonia dengan carriers dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram model matematika dinamika penyakit pneumonia dengan *carriers*

Berdasarkan Gambar. 1 dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematika. Model matematika yang dibentuk merupakan sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS}{dt} = v + \delta R - (\bar{\lambda} + \mu)S \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\rho)\bar{\lambda}S + \pi C - (\mu + \alpha + \eta)I \tag{2}$$

$$\frac{dC}{dt} = \rho\bar{\lambda}S + \theta I - (\mu + \pi + \beta)C \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \eta I + \beta C - (\mu + \delta)R \tag{4}$$

3.2. Analisis Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia Dengan Carriers

Akan dicari titik tetap, analisis kestabilan dari titik tetap dan melakukan simulasi dari analisis model matematika tersebut.

3.2.1. Titik Tetap Bebas Penyakit $E_0 = (s_0, 0,0,0)$

Titik tetap bebas penyakit pneumonia dengan carriers merupakan keadaan dimana tidak terjadinya penyebaran penyakit pneumonia pada populasi. Hal ini dapat diekspresikan secara matematis yaitu $s > 0, i = 0, c = 0$ dan $r > 0$. Sahingga titk tetap bebas penyakit deman tifoid adaIah

$$e_0 = (\frac{v}{\mu}, 0,0,0)$$

3.2.2. Titik Tetap Endemik $E_1 = (s_1, i_1, c_1, r_1)$

Titik tetap endemik penyakit pneumonia dengan carriers merupakan keadaan terjadinya penyebaran penyakit pneumonia, dimana terdapat sejumlah individu yang terinfeksi pneumonia pada populasi. Secara matematis dapat diekspresikan dengan $s > 0, i > 0, c > 0$ dan $r > 0$. Diperoleh titik tetap endemic penyebaran penyakit pneumonia dengan carriers adalah:

$$S_1 = \frac{N}{\left(\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1 h_2 - \theta\pi)}\right)\right)}$$

$$I_1 = \frac{m_1(m_2 h_2 + \pi\rho)\left(\psi(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1 h_2 - \theta\pi)} - 1\right)}{\left(\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1 h_2 - \theta\pi)}\right)\right)(m_1(h_1 h_2 - \theta\eta) - \delta(\rho(\pi\eta + h_1\beta)) + m_2(\eta h_2 + \theta\beta))}$$

$$C_1 = \frac{(\rho h_1 + m_2\theta)m_1\left(\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right) - 1\right)\nu}{\left(\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right)\right)(m_1(h_1h_2 - \theta\pi) - \delta(\rho(\pi\eta + h_1\beta) + m_2(\eta h_2 + \theta\beta)}$$

$$R_1 = \frac{\rho(\eta\pi + h_1\beta) + m_2(h_2\eta + \theta\beta)\left(\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right) - 1\right)\nu}{\left(\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right)\right)(m_1(h_1h_2 - \theta\pi) - \delta(\rho(\pi\eta + h_1\beta) + m_2(\eta h_2 + \theta\beta)}$$

Dengan:

$$h_1 = (\mu + \alpha + \eta)$$
$$h_2 = (\mu + \pi + \beta)$$
$$m_1 = (\mu + \delta)$$
$$m_2 = (1 - \rho)$$

3.2.3. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

BiIangan raproduksi dasar dicari dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya dengan menggunakan persamaan pada kelas I dan kelas C. Jika $R_0 < 1$, artimya penyakit pneumonia tidak akan menyebar dan jumIah penderita barangsur berkurang hinga penyakit akan menghiIang. Jika $R_0 > 1$, artinya penderita pneumonia dapat menuIarkan penyakitnya kepada individu Iain, sehingga akan terjadi endemi.

Sehingga didapatkan R_0 adaIah:

$$R_0 = \psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right)$$

pada titik tetao bebas penyakit $R_0 < 1$
akibatnya:

$$\psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right) < 1$$

$$\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1h_2 - \theta\pi)}\right) < \frac{1}{\psi}$$

$$\psi < \frac{(h_1h_2 - \theta\pi)}{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)} \qquad (5)$$

Ini berarti bahwa jika

$$\psi < \frac{(h_1h_2 - \theta\pi)}{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}$$

Titik bebas penyakit akan stabil lokal.

3.2.4. Kestabilan Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carriers

AnaIisis kestabiIan titik tetap dapat ditetukan dengan menentukan niIai eigan dari matriks Jacobi pada sistem (1),(2),(3), dan (4) yang diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + \mu & 0 & 0 & \delta \\ m_2\bar{\lambda} & -h_1 & \pi & 0 \\ \rho\bar{\lambda} & \theta & -h_2 & 0 \\ 0 & \eta & \beta & -m_1 \end{bmatrix}$$

Terdapat dua titik tetap model matematika dinamika penyakit pneumonia dengan Carriers.

a. Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit Pneumonia

Matriks Jacobi pada titik tetap bebas penyakit ini adalah:

$$J(e_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & \delta \\ 0 & -h_1 & \pi & 0 \\ 0 & \theta & -h_2 & 0 \\ 0 & \eta & \beta & -m_1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Untuk melihat kestabilan titik tetap bebas penyakit Pneumonia dibutuhkan nilai eigen. Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks pada persamaan (6). Untuk memperoleh nilai eigen maka:

$$|\lambda I - J(e_0)| = \begin{vmatrix} \lambda+\mu & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & \lambda + h_1 & -\pi & 0 \\ 0 & -\theta & \lambda + h_2 & 0 \\ 0 & -\eta & -\beta & \lambda+m_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristik dari matriks $J(E_0)$ adalah:

$$(\lambda + \mu)(\lambda+m_1)\big((\lambda + h_1)(\lambda + h_2) + \pi(-\theta)\big) = 0$$

$(\lambda + \mu) = 0$, karena $\mu > 0$ dan $\lambda_1 = -\mu$, maka $\lambda_1 < 0$

$(\lambda+m_1) = 0$, karena $m_1 > 0$ dan $\lambda_2 = -m_1$, maka $\lambda_2 < 0$

Pandang Persamaan,

$$(\lambda + h_1)(\lambda + h_2) - \theta\pi = 0$$

Titik tetap $e_0 = \left(\frac{v}{\mu}, 0,0,0\right)$ akan stabil jika masing-masing nilai eigen nya bernilai negatif. Maka pada persamaan λ_3 dan $\lambda_4$akan bernilai negatif jika

$$\sqrt{(h_1 + h_2)^2 - 4(h_1 + h_2 - \theta\pi)} < (h_1 + h_2)$$
$$(h_1 + h_2)^2 - 4(h_1 + h_2 - \theta\pi) < (h_1 + h_2)^2$$
$$-4(h_1 + h_2 - \theta\pi) < 0$$
$$4(h_1 + h_2 - \theta\pi) > 0$$
$$h_1 + h_2 - \theta\pi > 0$$
$$h_1 + h_2 < \theta\pi$$
$$\frac{h_1 + h_2}{\theta\pi} < 1$$

Jadi $\lambda_3$dan λ_4 akan bernilai negatif jika $\frac{h_1+h_2}{\theta\pi} < 1$ dan hal ini memiliki arti bahwa titik tetap bebas dari penyebaran penyakit pneumonia dengan carriers stabil.

b. Kestabilan Titik Tetap Endemik Penyakit Pneumonia

Matriks jacobian dari titik tetap endemik tersebut $E_1 = (s_1, i_1, c_1, r_1)$ adalah:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + \mu & 0 & 0 & \delta \\ m_2\bar{\lambda} & -h_1 & \pi & 0 \\ \rho\bar{\lambda} & \theta & -h_2 & 0 \\ 0 & \eta & \beta & -m_1 \end{bmatrix}$$

Untuk melihat kestabilan titik tetap endemik pneumonia dibutuhkan nilai eigen. Misalkan adalah nilai eigen dari matriks $J(E_1)$. Untuk memperoleh nilai eigen maka:

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda + \bar{\lambda} + \mu & 0 & 0 & -\delta \\ -m_2\bar{\lambda} & \lambda + h_1 & -\pi & 0 \\ -\rho\bar{\lambda} & -\theta & \lambda + h_2 & 0 \\ 0 & -\eta & -\beta & \lambda + m_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoIeh persamaan karekteistik sebagai berikut:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^1 + a_4\lambda^0 = 0$$

Dengan:

$$a_1 = 0$$
$$a_1 = h_1 + h_2 + \mu + m_1 + \bar{\lambda}$$
$$a_2 = h_1h_2 - m_3\eta\pi + h_2m_1 + h_1m_1 + h_2\bar{\lambda} + h_1\bar{\lambda} + m_1\bar{\lambda} + h_2\mu + m_1\mu$$

$$a_3 = h_1h_2m_1 - m_1\theta\pi + h_1h_2\bar{\lambda} - \theta\pi\bar{\lambda} + h_2m_1\bar{\lambda} + h_1m_1\bar{\lambda} + h_1h_2\mu - \theta\pi\mu + h_2m_1\mu + h_1m_1\mu - \rho\beta\bar{\lambda}\delta$$

$$a_4 = h_1h_2m_1\bar{\lambda} - m_1\theta\pi\bar{\lambda} + h_1h_2m_1\mu - m_1\theta\pi\mu - m_2\theta\beta\bar{\lambda}\delta - m_2\eta\bar{\lambda}\delta - m_2h_2\eta\bar{\lambda}\delta - h_1\rho\bar{\lambda}\beta\delta - \rho\eta\pi\bar{\lambda}\delta$$

Analisis kestabilan selanjutnya dapat dicari dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* yang bisa diIihat pada TabeI 2.

Tabel 2. Kriteria Routh-Hurwitz

λ^4	a_0	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	
λ^2	b_1	b_2	
λ^1	c_1	c_2	
λ^0	d_1		

Dengan:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

Dalam hal ini agar sistem menjadi stabil harus dipenuhi bahwa semua suku pada koIom partama pada tabeI Routh Hurwitz brtanda positif. Karena pada persamaan karakteristik semua koefisiennya bertanda positif maka selanjutnya kita akan melihat $b_1 > 0, c_1 > 0$ dan $d_1 > 0$
$b_1 > 0$

$$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0$$

Karena $a_1 > 0$ maka agar $b_1 > 0$ haruslah $a_1 a_2 > a_0 a_3$, Karena $a_0 = 1$ maka agar $b_1 > 0$ maka haruslah $a_1 a_2 > a_0 a_3$.
Kemudian akan di tunjukkan $c_1 > 0$

$$\frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} > 0$$

Karena $b_1 > 0$ maka agar $c_1 > 0$ haruslah $b_1 a_3 > a_1 b_2$, karena $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$
dan $b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$ maka agar $c_1 > 0$
haruslah $a_3(a_1 a_2 - a_3) > a_1(a_1 a_4 - a_5)$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $d_1 > 0$

$$\frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} > 0$$

Karena $c_1 > 0$ maka agar $d_1 > 0$ haruslah $c_1 b_2 > b_1 c_2$ karena
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$ dan $c_2 = a_5$ maka agar $d_1 > 0$
haruslah $b_2(b_1 a_3 - a_1 b_2) > a_5 {b_1}^2$

Dengan memenuhi syarat-syarat di atas di peroleh bahwa eIeman-eIamen koIom prtama pada tabeI Routh-Hurwitz yaitu $a_0, a_1, b_1, c_1,\ dan\ d_1$ bernilai positif sehingga dapat disimpulkan bahwa titik tetap endemik adalah stabil.

3.2.5. Simulasi Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carriers

Simulasi dilakukan dengan menggunakan software Maple 16 dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter.

1. Simulasi Model Matematika Titik Tetap Bebas Penyakit pneumona dengan carriers

   Akan disimulasikan untuk keadaan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit pneumonia. Simulasi ini akan di gunakan parameter seperti pada table 2. referensi [8] memperlihatkan nilai dari parameter yang dapat dilihat pada Tabel 3.

ISSN: 2807-3460

Tabel 3. Parameter untuk Titik Tetap Bebas Penyakit Pneumonia

Parameter	Keterangan
μ	0.0775
ν	10.09
ρ	0.862
$(1-\rho)$	0.138
θ	0.0375
π	0.01096
η	0.8714
β	0.0115
α	0.003
δ	0.0241
ε	0.001124
φ	7.6
$\bar{\lambda} = \psi\left(\frac{I+\varepsilon C}{N}\right)$	0.0287

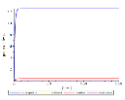
Dari nilai parameter diatas terlebih dahulu dihitung nilai R_0 yang diperoleh sebagai berikut:

$$R_0 = 0{,}002619194806$$

Diperoleh $R_0 < 1$ kemudian dihitung nilai titik tetap bebas penyakit pneumonia dengan *carriers* yaitu $E_0 = (130.19,0,0,0)$. Dalam simulasi titik tetap bebas penyakit digunakan empat nilai awal sebagai berikut:

$$S(0) = 0.30\,, I(0) = 0.20\,, C(0) = 0.06\,, R(0) = 0.04$$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t, seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Simulasi Dinamika Penyakit Pneumonoia dengan Carriers

Berdasarkan gambar 2 terlihat bahwa populasi individu *infected, carriers dan recorvered* semakin lama semakin menurun menuju nol. Selain itu jika dilihat pada kurva biru, dapat diketahui bahwa populasi individu pada kelas *susceptible* akan lebih banyak dari pada individu pada kelas *infected carriers dan recorvered*. Sehingga dapat diketahui bahwa pada saat $R_0 < 1$ Penyakit pneumonia ini tidak menyebar pada populasi.

2. Simulasi Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carries pada Titik Tetap Endemik

Akan disimulasikan untuk keadaan ada individu yang terinfeksi penyakit pneumonia sehingga parameter yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Parameter untuk Titik Tetap Endemik Penyakit Pneumonia

Parameter	Keterangan
μ	0.002
ν	10.09
ρ	0.3382
$(1-\rho)$	0.6618
θ	0.0375
π	0.1096
η	0.00714
β	0.0115
α	0.33
δ	0.0241
ε	0.001124
φ	7.6
$\bar{\lambda} = \psi\left(\frac{I+\varepsilon C}{N}\right)$	0.0287

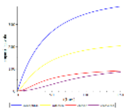
Dari nilai parameter diatas terlebih dahulu dihitung nilai R_0 yang diperoleh sebagai berikut:

$$R_0 = 23{,}96645036$$

Diperoleh $R_0 > 1$ Kemudian dihitung nilai titik tetap endemik penyakit pneumonia dengan carriers yaitu $E_1 = (1.4517, 0.0370, 0.450, 0.0062)$. Dalam simulasi titik tetap endemik penyakit digunakan empat nilai awal sebagai berikut:

$$S(0) = 0.002, I(0) = 0.008, C(0) = 0.45, R(0) = 0.54$$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu *t*, seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Simulasi Model Dinamika Penyakit pneumonia dengan Carriers di Sekitar Titik Tetap Endemik

Berdasarkan gambar 3 terlihat bahwa populasi individu *susceptible*, *infected* dan carriers semakin lama semakin meningkat seiring berjalannya waktu. Sedangkan pada populasi individu *recovered* walaupun mengalami kenaikan namun kurvanya masih berada dibawah kurva kelas *susceptible*, *infected* dan *carriers* . Hal ini menunjukkan bahwa populasi individu pada kelas *recovered* akan lebih sedikit dari pada individu pada kelas *susceptible*, *infected* dan *carriers*. Sehingga dapat diketahui bahwa pada saat $R_0 > 1$, Penyakit pneumonia ini menyebar pada populasi. Dari penelitian yang dilakukan oleh Rahmawati (2015) pada hasiI simoIasi dengan mapIe didapat jumIah popuIasi ternifeksi dan *carriers* mengakibatkan jumiah popuIasi rentan barkurang.

3.3 Interpretasi Model Matematika Dinamika Penyakit Pneumonia dengan Carriers

Berdasarkan analisis yang sudah dilakukan didapatkan dua titk tetap yaitu titik tetap bebas penyakit dan titk tetap endemik penyakit pneumonia. Dengan mencari analisis kestabiIan titik bebas penyakit didapatkan titik tetap stabil, dan dengan menggunakan kriteria *Routh Hurtwitz* dalam mencari analisis titik tetap endemik didapatkan titik tetap tersebut stabil. Artinya, perilaku sistem disekitar titik tetap adalah stabil. Kemudian, terlihat beberapa faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi pada masalah penyebaran penyakit pneumonia.
Faktor tersebut dapat dilihat dari nilai R_0 .Dari pencarian kita dapatkan

$$R_0 = \psi\left(\frac{\rho(\varepsilon h_1 + \pi) + m_2(h_2 + \theta\varepsilon)}{(h_1 h_2 - \theta\pi)}\right)$$

Berdasarkan analisis bilangan reproduksi dasar dapat disimpulkan bahwa laju kontak penyebab infeksi (ψ) berbanding lurus dengan R_0. Semakin tinggi laju kontak penyebab infeksi maka penyebaran penyakit pneumonia semakin berkembang. Kemudian niIai peIuang tarjadinya kontak indvidu rentan ke indiividu kelas bawaan (ρ), kontak individu yang menunjukkan gejala terinfeksi (ε) dan laju sifat bawaan yang terinfeksi juga harus di tekan agar penyakit tidak berkembang. Kemudian diketahui $h_1 = (\mu + \alpha + \eta)$ dan $h_2 = (\mu + \pi + \beta)$. Untuk menciptakan kondisi pada persamaan (5) maka laju individu terinfeksi yang memperleh kekebalan tubuh sementara (η) dan individu pembawa yang pulih memeroleh kekebalan sementara (β) harus ditambah. Dilihat dari penelitian yang dilakukan oleh oleh Rahmawati (2015) dan Jacob (2013) memperoleh hasil dimana semakin besar jumiah popuIasi individu rentan yang memiliki kekebalan aIami mengakibatkan jumIah popuIasi sembuh semakin bertanbah.

4. Kesimpulan

Dari analisis model matematika dinamika penyakit pneumonia dengan carriers didapatkan dua titik tetap, dalam mencari analisis titik tetap endemik didapatkan titik tetap tersebut stabil. Artinya, perilaku sistem disekitar titik tetap adalah stabil. Kemudian, terlihat beberapa faktor yang mempengaruhi terjadinya epidemi pada masalah penyebaran penyakit pneumonia. yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Dari pembahasan juga didapatkan bahwa tingkat penularan dan laju kontak penyebab infeksi dapat mempengaruhi terjadinya epidemi. Semakin tinggi tingkat penularan dan laju kontak maka penyakit akan semakin bersifat endemik. dari hasil analisis juga didapatkan bahwa individu pembawa dan individu yang terinfeksi yang memperoleh kekebalan sementara bisa menekan angka penyebaran. Oleh karena itu sistem kekebalan tubuh tetap harus terjaga dengan baik.

REFERENSI

[1] Rasyid, zulmeliza. (2013). Fektor-Fektor yang Behubungan dangan Kejadian Pneumonia Anak BaIita di RSUD Bankinang Kabupaten Kampar.
[2] WorId Pneumonia Day. (2012). Fight Pneumonia, A save ChiId. GIobaI CoaItion Againts Child Pneumonia.
[3] UNICEF. 2009. Global Action Plan For Prevention and Control Of Pneumonia (GAPP)
[4] MisnadiarIy. (2008). Panyakit lnfeksi SaIuran Napas Pneumonia pada Anak, Orang Dewesa, Usia Lanjut, Pneumonia Atipik dan Pneumonia Atypik Mycobacterium.Jakarta: Pustaka Obor.
[5] Pediari, Sari. (2001). Respom Imun Terhadap Infeksi Bakteri. vol: 2
[6] Astria, Roro. (2009). Anaisis Modei Matematika Tranmisi Penyakit Pneumonia.
[7] Rahmawati, Hanik. (2015). AnaIisa KestabiIan ModeI Matamatika Panyakit Pneumonia Dengan Carriers.
[8] Kizito, Mohammed, dan Tumwiine, Julius. (2018). A MathematicaI ModeI of Tratment and Vacination lnterventions of PneumococcaI Pneumonia lnfection Dynamics.