

Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Ingrit Ridha Rahayu¹, Muhammad Subhan²

^{1,2}Prodi Matematika, Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan dan Alam Universitas Negeri Padang (UNP)

Article Info

Article history:

Received February 18, 2021

Revised May 06, 2021

Accepted March 30, 2022

Keywords:

Leptospirosis

Treatment

Host

Vector Transmission

Kata Kunci:

Leptospirosis

Treatment

Penularan Host

Vektor

ABSTRACT

Leptospirosis is a disease passive from bacteria and affect humans and animals. Leptospirosis is transmitted from human to human, from animal to animal, from animal to human. In this study, we will look for a mathematical model of the spread of Leptospirosis with the effect of treatment. The purpose of this modelling is to determine the spread of Leptospirosis with the effect of treatment, to determine the analysis of the mathematical model of the spread of Leptospirosis with the effect of treatment, and to determine the interpretation of mathematical model of the spread of Leptospirosis with the effect of treatment. This research past by determining the variables, parameters, and assumptions which linked to the problem, so that the mathematical model spread of Leptospirosis disease with the effect of treatment. After that mathematical model of the spread of Leptospirosis disease with the effect of treatment will be analyzed and interpreted. Based on analysis result point out that at a fixedpoint free disease, where the fixedpoint free disease is stable.

ABSTRAK

Leptospirosis adalah sebuah penyakit infeksi yang mana penyebabnya adalah bakteri dan dapat menyerang manusia dan hewan. Penyakit Leptospirosis mudah menular antar manusia, antar hewan, dari hewan ke manusia serta sebaliknya. Kemudian akan ditentukan bentuk model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Tujuan pemodelan ini adalah untuk mengetahui penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*, untuk mengetahui analisis model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*, dan untuk mengetahui interpretasi dari hasil model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Penelitian dimulai dengan mencari variabel, parameter, serta asumsi yang berhubungan dengan masalah nyata, kemudian akan dibentuk model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Setelah itu model akan dianalisis dan diinterpretasikan. Pada hasil analisis ditunjukkan bahwa model ini stabil pada titik bebas penyakit.

This is an open access article under the [CC BY-SA](#) license.



Ingrit Ridha Rahayu/sesuai

(Ingrit Ridha Rahayu)

Prodi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Padang, Jl. Prof. Dr. Hamka, Air Tawar barat, Padang Utara, Padang, 25171

Padang, Sumatera Barat

Email: inggritridharahayu@gmail.com



1. PENDAHULUAN

Leptospirosis adalah penyakit infeksi yang menyerang manusia ataupun hewan [1]. Penyebab Leptospirosis adalah bakteri *Leptospira interrogans*. Bakteri ini memiliki bentuk seperti batang dan berlekuk. Tempat hidup bakteri ini adalah air kemih hewan. Antar manusia dapat tertular melalui kontak secara langsung dengan kemih hewan yang mengandung bakteri *Leptospira*. Penularan antar hewan juga dapat terjadi melalui mulut dengan memakan makanan ataupun minuman yang sudah tercemar oleh urin hewan yang mengandung bakteri *Leptospira*. Penularan antar ternak berbeda dapat pula terjadi melalui perantara tikus [2]. Antar manusia dapat tertular secara langsung maupun secara tidak langsung. Antar manusia dapat tertular secara langsung melalui luka terbuka pada kulit, hubungan seksual, dan melalui air ASI untuk kasus ibu kepada anaknya. Antar manusia dapat tertular secara tidak langsung melalui kontak dengan barang yang sudah tercemar oleh urin yang mengandung bakteri *Leptospira*, misalnya pada alas kandang hewan, makanan, tanah, dan rumput. [1].

Awal kemunculan Leptospirosis adalah pada tahun 1886 yang dilaporkan oleh Adolf Weil. Lalu di tahun 1915, Inada berhasil mengetahui penyebab Leptospirosis. Kasus Leptospirosis pertama di Indonesia dilaporkan pada tahun 1892 oleh Van der Scheer [3]. Menurut *International Leptospirosis Society (ILS)*, Indonesia terletak pada peringkat ketiga kasus Leptospirosis dibawah negara China dan India. Kejadian Luar Biasa (KLB) dari penyakit Leptospirosis di Indonesia mencapai 100 per 100.000 penduduk per tahun [4].

Beberapa upaya pencegahan penyakit Leptospirosis adalah dengan memberikan penyuluhan mengenai penyakit Leptospirosis, memberikan perlindungan bagi para pekerja peternakan, memisahkan letak hewan yang terinfeksi guna mencegah adanya kontaminasi di lingkungan manusia, dan lain-lain [1]. Para penderita Leptospirosis akan diberikan *treatment* atau pengobatan berupa pemberian obat-obatan dan beberapa penanganan tambahan jika penyakit bertambah parah. Obat-obatan yang diberikan berupa antibiotik, seperti Penisilin dan Doxycycline. Pasien dengan gejala ringan akan diberikan antibiotik dalam bentuk tablet yang harus dikonsumsi selama satu minggu hingga obat habis. Sedangkan untuk pasien dengan gejala yang lebih berat, antibiotik diberikan melalui pembuluh darah [5]. Jika bakteri *Leptospira* sudah menyerang organ bagian dalam, maka akan diperlukan beberapa penanganan tambahan, seperti pemberian infus cairan jika penderita mengalami dehidrasi, pengecekan terhadap kerja jantung, memakaikan alat bantu pernapasan apabila pasien mengalami masalah pernapasan, dan cuci darah guna membantu fungsi ginjal [6].

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan, matematika mempunyai peranan penting dalam upaya pencegahan perluasan penyebaran suatu penyakit. Hal ini berupa sebuah model matematika. Model matematika digunakan secara kualitatif dan kuantitatif. Dalam memperoleh, membuat, mengembangkan dan menurunkan model, membuat asumsi, pendekatan yang berdasarkan eksperimen dan observasi pada fenomena nyatanya. [7].

Pemodelan matematika terhadap penyakit Leptospirosis ini sudah dilakukan oleh beberapa peneliti. Beberapa diantaranya yaitu penelitian yang dilakukan oleh F. Lestari dan Sugiyanto (2015) yang mendapatkan model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis antara vector penyebar dan populasi manusia, dan pada penelitian V. Noviantri dan K. Stewart (2020) dengan analisa penyebaran penyakit Leptospirosis berdasarkan model SIR-SI. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkaji model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*.

2. METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar. Metode yang digunakan ialah metode deskriptif. Peneliti mengidentifikasi masalah pada penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Peneliti mencari penyebab, gejala-gejala, dan *treatment* pada penyakit Leptospirosis. Lalu peneliti mencari teori-teori yang sesuai dengan permasalahan penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Setelah peneliti sudah mengidentifikasi masalah dan mencari teori-teori, maka selanjutnya adalah memilih metode yang sesuai dengan permasalahan penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* yaitu pemodelan matematika yang dapat menjelaskan pengaruh perilaku individu yang melakukan *treatment* terhadap penyebaran penyakit Leptospirosis.

Langkah selanjutnya membuat ini adalah menentukan asumsi, variabel, dan parameter pemodelan matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* tersebut.

1. Membentuk model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*.
2. Menganalisis titik ekuilibrium penyebaran penyakit Leptospirosis.
3. Menganalisis kestabilan lokal disekitar titik ekuilibrium penyebaran penyakit Leptospirosis.
4. Menginterpretasi hasil analisis model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*.
5. Membuat kesimpulan.

3. HASIL DAN PAMBAHASAN (11 PT)

3.1 Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Berdasarkan tahapan dalam membangun sebuah model matematika, yang pertama akan dilakukan ialah mengidentifikasi masalah yang diperoleh dari berbagai pertanyaan yang berhubungan dengan masalah tersebut. Tahapan ini dilakukan dengan menentukan factor-faktor yang dianggap penting atau sesuai dengan permasalahan yang meliputi identifikasi variabel, parameter, dan membentuk hubungan antara variabel dan parameter tersebut.

Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah sebagai berikut:

1. Populasi konstan, total populasi manusia dan populasi vektor tetap konstan.
2. Populasi tertutup, artinya tidak ada individu yang melakukan imigrasi dan emigrasi.
3. Populasi manusia yang telah sembuh tidak kebal terhadap penyakit, hal ini berarti populasi manusia dapat kembali ke kelompok rentan.
4. Tidak adanya fase penyembuhan pada populasi vektor dikarenakan *treatment* yang digunakan pada penelitian ini hanya untuk manusia.
5. Semua individu yang lahir diasumsikan rentan terhadap penyakit.
6. Manusia dapat tertular dari vektor yang terinfeksi tetapi tidak dapat tertular dari manusia yang terinfeksi.
7. Vektor dapat tertular dari vektor yang terinfeksi tetapi tidak dapat tertular dari manusia yang terinfeksi.
8. Manusia yang terinfeksi Leptospirosis tidak dapat menularkan kepada vektor yang rentan.
9. Tidak adanya masa inkubasi/laten.
10. *Treatment* Leptospirosis dilakukan dengan pasien yang positif Leptospirosis.

Variabel yang digunakan dalam membentuk model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* adalah:

1. Kelompok manusia yang rentan terhadap penyakit Leptospirosis (*susceptible*) yang dilambangkan dengan S_h .
2. Kelompok manusia yang telah terinfeksi penyakit Leptospirosis (*infected*) yang dilambangkan dengan I_h .
3. Kelompok manusia yang menerima *treatment* yang dilambangkan dengan T_h .
4. Kelompok manusia yang telah sembuh dari penyakit Leptospirosis (*recovered*) yang dilambangkan dengan R_h .
5. Kelompok vektor yang rentan terhadap penyakit Leptospirosis (*susceptible*) yang dilambangkan dengan S_v .
6. Kelompok vektor yang telah terinfeksi penyakit Leptospirosis (*infected*) yang dilambangkan dengan I_v .

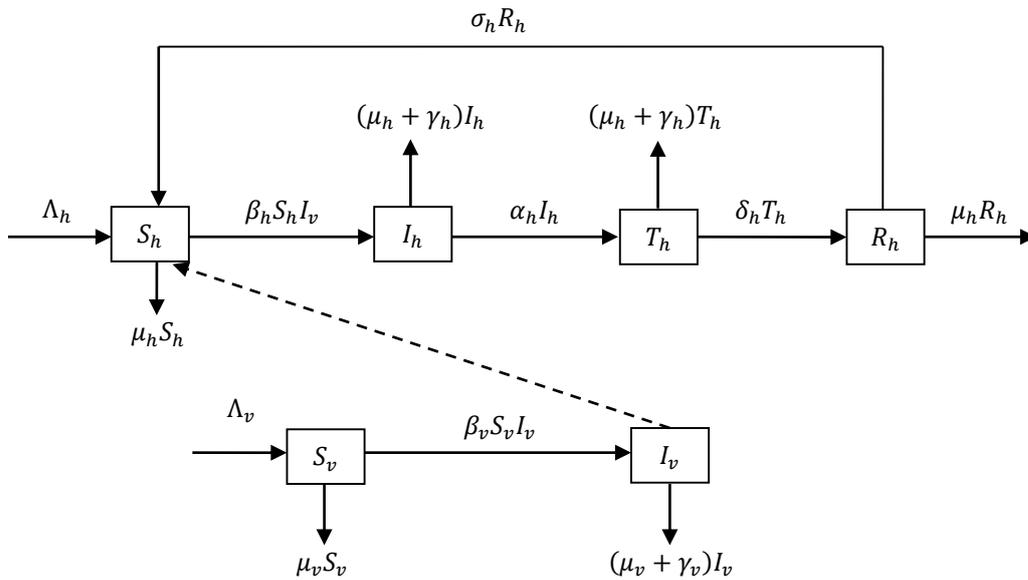
Parameter yang digunakan adalah:

1. Λ_h adalah tingkat kelahiran pada populasi manusia.
2. Λ_v adalah tingkat kelahiran pada populasi vektor.



3. μ_h adalah tingkat kematian alami manusia.
4. μ_v adalah tingkat kematian alami vektor.
5. β_h adalah tingkat penularan manusia yang rentan oleh vektor yang terinfeksi.
6. β_v adalah tingkat penularan vektor yang rentan oleh vektor yang terinfeksi.
7. δ_h adalah tingkat pemulihan manusia yang terinfeksi.
8. α_h adalah tingkat pemberian *treatment*.
9. σ_h adalah tingkat perpindahan manusia yang sembuh ke kelompok rentan.
10. γ_h adalah tingkat kematian manusia akibat Leptospirosis.
11. γ_v adalah tingkat kematian vektor akibat Leptospirosis.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang diberikan, maka dapat disusun diagram model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*, seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Berdasarkan Gambar 1. dapat dibentuk model matematika berupa sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h + \sigma_h R_h - \beta_h S_h I_v - \mu_h S_h \quad (1)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_h S_h I_v - T_3 I_h \quad (2)$$

$$\frac{dT_h}{dt} = \alpha_h I_h - T_4 T_h \quad (3)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \delta_h T_h - T_2 R_h \quad (4)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \Lambda_v - \beta_v S_v I_v - \mu_v S_v \quad (5)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_v S_v I_v - T_1 I_v \quad (6)$$

Dengan

$$T_1 = \mu_v + \gamma_v$$

$$T_2 = \sigma_h + \mu_h$$

$$T_3 = \alpha_h + \mu_h + \gamma_h$$

$$T_4 = \delta_h + \mu_h + \gamma_h$$

Titik ekuilibrium dari (1)-(6) yaitu $(S_h, I_h, T_h, R_h, S_v, I_v)$ diperoleh ketika $\frac{dS_h}{dt} = 0$, $\frac{dI_h}{dt} = 0$, $\frac{dT_h}{dt} = 0$, $\frac{dR_h}{dt} = 0$, $\frac{dS_v}{dt} = 0$, dan $\frac{dI_v}{dt} = 0$ sehingga diperoleh:

$$0 = \Lambda_h + \sigma_h R_h - \beta_h S_h I_v - \mu_h S_h \quad (7)$$

$$0 = \beta_h S_h I_v - T_3 I_h \quad (8)$$

$$0 = \alpha_h I_h - T_4 T_h \quad (9)$$

$$0 = \delta_h T_h - T_2 R_h \quad (10)$$

$$0 = \Lambda_v - \beta_v S_v I_v - \mu_v S_v \quad (11)$$

$$0 = \beta_v S_v I_v - T_1 I_v \quad (12)$$

3.2 Analisa Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Treatment

Didalam menganalisa sebuah model akan ditentukan titik ekuilibrium bebas, titik ekuilibrium endemik, dan bilangan reproduksi dasar. Analisis dari titik ekuilibrium dan endemik, dan simulasi dari analisis model matematika tersebut.

3.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit $e_0 = (S_h, I_h, T_h, R_h, S_v, I_v)$

Titik ekuilibrium bebas dari penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* yaitu kondisi dimana penyebaran penyakit dalam suatu populasi tidak ada. Secara matematis dapat diekspresikan dengan: $S_h > 0, I_h = 0, T_h = 0, R_h > 0, S_v > 0$ dan $I_v = 0$. Maka titik bebas penyebaran penyakit Leptospirosis adalah:

$$e_0 = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, 0 \right)$$

4 Titik Ekuilibrium Endemik Dari Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Treatment $e_1 = (S_h^*, I_h^*, T_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$

3.2.2. Titik ekuilibrium endemik dapat diartikan bahwa

terdapat sejumlah individu yang terpengaruh penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* padapopulasi. Secara matematis dapat diekspresikan dengan: $S_h^* > 0, I_h^* > 0, T_h^* > 0, R_h^* > 0, S_v^* > 0$, dan $I_v^* > 0$. Maka diperoleh titik endemik dari penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* adalah:

$$e_1 = (S_h^*, I_h^*, T_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$$

$$S_h^* = \left(\frac{\Lambda_h T_2 + \sigma_h \delta_h}{T_2} \right) \left(\frac{\beta_v T_1}{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1) + \mu_h \beta_v T_1} \right) \quad (13)$$

$$I_h^* = \left(\frac{\Lambda_h T_2 + \sigma_h \delta_h}{T_2 T_3} \right) \left(\frac{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1) + \mu_h \beta_v T_1} \right) \quad (14)$$

$$T_h^* = \frac{\alpha_h}{T_4} \left(\frac{\Lambda_h T_2 + \sigma_h \delta_h}{T_2 T_3} \right) \left(\frac{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1) + \mu_h \beta_v T_1} \right) \quad (15)$$

$$R_h^* = \frac{\delta_h \alpha_h}{T_2 T_4} \left(\frac{\Lambda_h T_2 + \sigma_h \delta_h}{T_2 T_3} \right) \left(\frac{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1) + \mu_h \beta_v T_1} \right) \quad (16)$$

$$S_v^* = \frac{T_1}{\beta_v} \quad (17)$$

$$I_v^* = \frac{\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1}{\beta_v T_1} \quad (18)$$

Untuk menentukan kapan masing-masing nilai dari titik tetap ada, maka harus ditetapkan kondisi pada parameter untuk memastikan bahwa setiap titik berada pada R_4^+ , sehingga:



Tabel 1. Syarat-syarat Keberadaan Titik Tetap

Kasus	Syarat	P_0	P_1	Parameter
I	$\Lambda_v \leq \frac{\mu_v(\mu_v + \gamma_v)}{\beta_v}$	Ada	Tidak ada	$\Lambda_v = 2$ $\mu_v = 0,1$ $\gamma_v = 0,001$ $\beta_v = 0,0078$
II	$\Lambda_v \geq \frac{\mu_v(\mu_v + \gamma_v)}{\beta_v}$	Ada	Ada	$\Lambda_v = 4$ $\mu_v = 0,1$ $\gamma_v = 0,001$ $\beta_v = 0,0078$

3.2.3. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) digunakan untuk mencari penyebaran penyakit di dalam sebuah populasi yang melakukan *treatment*. Faktor yang menyebabkan infeksi pada kelompok individu yang rentan terhadap penyakit Leptospirosis adalah tingkat penularan penyakit Leptospirosis melalui hubungan kontak langsung dengan vektor yang terinfeksi dan tingkat kelahiran pada populasi vektor. Sehingga didapatkan (R_0) adalah:

$$R_0 = \frac{\Lambda_v \beta_v}{(\mu_v + \gamma_v) \mu_v}$$

3.2.4. Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Analisis pada kestabilan titik tetap dapat dicaridengan cara memakai nilai eigen pada matriks *Jacobian* sistem (1)-(6) yang diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_h I_v - \mu_h & 0 & 0 & \sigma_h & 0 & -\beta_h S_h \\ \beta_h I_v & -T_3 & 0 & 0 & 0 & \beta_h S_h \\ 0 & \alpha_h & -T_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_h & -T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_v I_v - \mu_v & -\beta_v S_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_v I_v & \beta_v S_v - T_1 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat dua jenis titik ekuilibrium, maka analisis kestabilan titik ekuilibrium juga dilakukan pada kedua titik ekuilibrium.

1. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit dari Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment* $e_0 = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, 0 \right)$

Kestabilan titik ekuilibrium bebas pada penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* dibutuhkan nilai eigen. Titik ekuilibrium dikatakan stabil jika semua nilai eigennya bernilai negatif. Matriks *Jacobian* pada bebas penyakit ini adalah:

$$J(e_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & \sigma_h & 0 & \frac{-\beta_h \Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & -T_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_h \Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & \alpha_h & -T_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_h & -T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v & \frac{-\beta_v \Lambda_v}{\mu_v} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_v \Lambda_v}{\mu_v} - T_1 \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan yang terbentuk karakteristik dari matriks $J(e_0)$ adalah:

$$(\lambda + \mu_h)(\lambda + T_3)(\lambda + T_4)(\lambda + T_2)(\lambda + \mu_v) \left(\lambda + \frac{\beta_v \Lambda_v}{\mu_v} - T_1 \right) = 0$$

Maka nilai eigen yang didapat dari matriks Jacobian tersebut adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -\mu_h \text{ maka } \lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 = -(\alpha_h + \mu_h + \gamma_h) \text{ maka } \lambda_2 < 0$$

$$\lambda_3 = -(\delta_h + \mu_h + \gamma_h) \text{ maka } \lambda_3 < 0$$

$$\lambda_4 = -(\sigma_h + \mu_h) \text{ maka } \lambda_4 < 0$$

$$\lambda_5 = -\mu_v \text{ maka } \lambda_5 < 0$$

$$\lambda_6 = -\frac{\beta_v \Lambda_v}{\mu_v} + (\mu_v + \gamma_v) \text{ maka } \lambda_6 < 0$$

Karena nilai eigennya bernilai negatif, maka titik tetap bebas penyakit Leptospirosis bersifat stabil asimtotik.

2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik pada Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Treatment

Titik ekuilibrium akan stabil apabila semua nilai eigen dari matriks Jacobian bernilai negatif. Matriks Jacobian dari titik ekuilibrium endemik tersebut $e_1 = (S^*_h, I^*_h, T^*_h, R^*_h, S^*_v, I^*_v)$ adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-\beta_h A}{\beta_v} - \mu_h & 0 & 0 & \sigma_h & 0 & -B \\ \frac{\beta_h A}{\beta_v} & -T_3 & 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & \alpha_h & -T_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_h & -T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A - \mu_v & T_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & \frac{\beta_v T_1}{\beta_v} - T_1 \end{bmatrix}$$

Dengan

$$A = \frac{(\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{T_1}$$

$$B = \beta_h \left(\frac{\Lambda_h T_2 + \sigma_h \delta_h}{T_2} \right) \left(\frac{\beta_v T_1}{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1) + \mu_h \beta_v T_1} \right)$$

Maka didapat persamaan karakteristik yaitu:

$$\left(\lambda + \frac{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{\beta_v T_1} + \mu_h \right) (\lambda + T_3)(\lambda + T_4)(\lambda + T_2) \left(\lambda + \frac{(\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{T_1} + \mu_v \right) \left(\lambda - \frac{\beta_v T_1}{\beta_v} + T_1 \right) = 0$$

Maka nilai eigen yang didapat tersebut adalah sebagai berikut:

$$\lambda_1 = - \left(\frac{\beta_h (\Lambda_v \beta_v - \mu_v T_1)}{\beta_v T_1} + \mu_h \right), \text{ maka } \lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 = -(\alpha_h + \mu_h + \gamma_h), \text{ maka } \lambda_2 < 0$$

$$\lambda_3 = -(\delta_h + \mu_h + \gamma_h), \text{ maka } \lambda_3 < 0$$

$$\lambda_4 = -(\sigma_h + \mu_h), \text{ maka } \lambda_4 < 0$$

$$\lambda_5 = - \left(\frac{(\Lambda_v \beta_v - \mu_v (\mu_v + \gamma_v))}{(\mu_v + \gamma_v)} + \mu_v \right), \text{ maka } \lambda_5 < 0$$

$$\lambda_6 = \frac{\beta_v T_1}{\beta_v} - T_1 = 0, \text{ maka } \lambda_6 = 0$$



Sehingga, titik tetap P_1 tidak stabil.

3.2.5. Simulasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* menggunakan software Maple 16 memberikan nilai untuk masing-masing parameter.

1. Simulasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Akan simulasikan dengan keadaan tidak adanya individu yang terinfeksi penyakit Leptospirosis sehingga parameter yang digunakan88; dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai Parameter untuk Titik Tetap Bebas dari Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Parameter	Nilai
Λ_h	0,005
Λ_v	0,7
β_h	0,004
β_v	0,0078
μ_h	0,00009
μ_v	0,01
γ_h	0,0008
γ_v	0,01
α_h	0,001
δ_h	0,0021

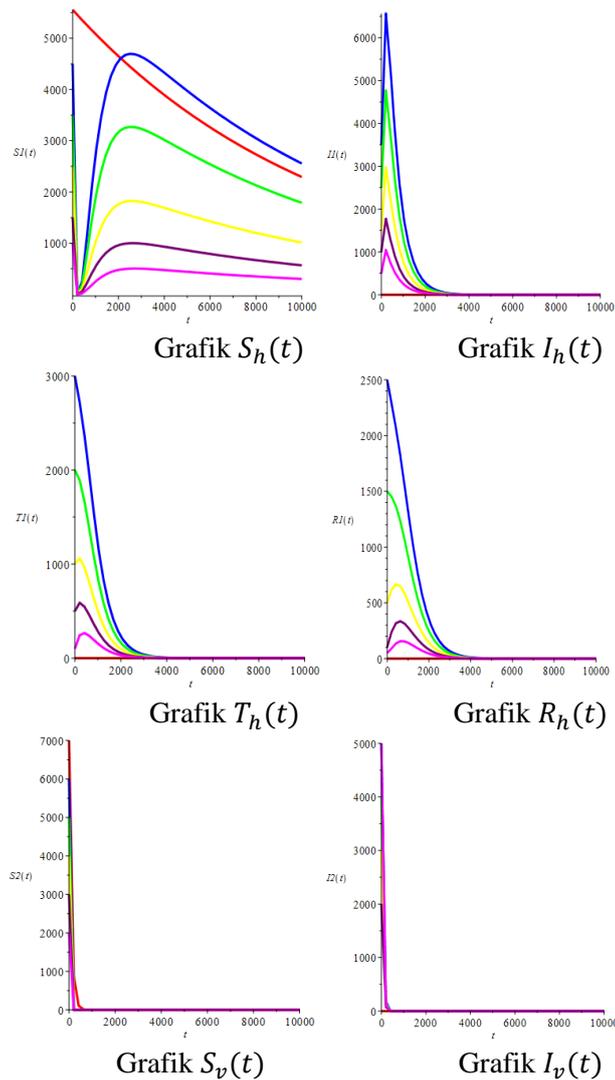
Dari nilai parameter di atas terlebih dahulu dihitung nilai R_0 yang diperoleh:

$$R_0 = 0,2730000000$$

Diperoleh $R_0 < 1$. Kemudian dihitung nilai titik tetap bebas dari penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* yaitu $e_0 = (S_h, I_h, T_h, R_h, S_v, I_v) = (5556; 0; 0; 0; 7000; 0)$. Dalam simulasi titik tetap bebas dari penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* digunakan enam nilai awal adalah:

- i. $S_h(0) = 5556, I_h(0) = 0, T_h(0) = 0, R_h(0) = 0, S_v(0) = 7000, I_v(0) = 0$
- ii. $S_h(0) = 4500, I_h(0) = 3500, T_h(0) = 3000, R_h(0) = 2500, S_v(0) = 6000, I_v(0) = 5000$
- iii. $S_h(0) = 3500, I_h(0) = 2500, T_h(0) = 2000, R_h(0) = 1500, S_v(0) = 5000, I_v(0) = 4000$
- iv. $S_h(0) = 2500, I_h(0) = 1500, T_h(0) = 1000, R_h(0) = 500, S_v(0) = 4000, I_v(0) = 3000$
- v. $S_h(0) = 1500, I_h(0) = 1000, T_h(0) = 500, R_h(0) = 100, S_v(0) = 3000, I_v(0) = 2000$
- vi. $S_h(0) = 1000, I_h(0) = 500, T_h(0) = 100, R_h(0) = 50, S_v(0) = 2000, I_v(0) = 1000$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t adalah:



Gambar 2. Trayektori di Sekitar Titik tetap Bebas Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Berdasarkan Gambar 2 di atas, bisa dilihat bahwa kurva merah adalah titik tetap bebas dari penyakit. Sedangkan kurva biru, hijau, kuning, orange, dan magenta yang nanti akan menentukan stabil atau tidaknya pada titik tetap bebas dari penyakit Leptospirosis pada masing-masing grafik tersebut. Kemudian dapat dilihat bahwa titik tetap $P_0 = \left(\frac{\Lambda_h}{\mu_h}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, 0 \right)$ adalah titik tetap yang stabil asimtotik karena trayektori (kurva biru, hijau, kuning, orange, dan magenta) dari masing-masing grafik bergerak mendekati titik tetap bebas dari penyakit Leptospirosis yang diperlihatkan oleh kurva merah. Titik tetap bebas yang stabil asimtotik ini dapat memiliki arti yaitu bahwa dalam waktu tertentu penyebaran penyakit Leptospirosis ini akan menghilang.

2. Simulasi Model Matematika Titik Tetap Endemik Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Dalam hal ini untuk keadaan ada individu yang terinfeksi pada penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* akan disimulasikan dengan parameter yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 3.



Tabel 3. Parameter untuk Titik Tetap Eendemik dari Penyebaran Penyakit *Leptospirosis* dengan Pengaruh *Treatment*

Parameter	Nilai
Λ_h	0,005
Λ_v	0,9
β_h	0,004
β_v	0,0078
μ_h	0,00009
μ_v	0,017
γ_h	0,0008
γ_v	0,0094
α_h	0,002
δ_h	0,0021

Dari nilai parameter di atas terlebih dahulu dihitung nilai R_0 yang diperoleh:

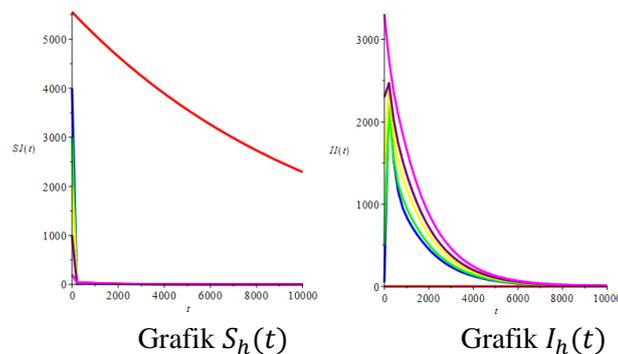
$$R_0 = 15,64171123$$

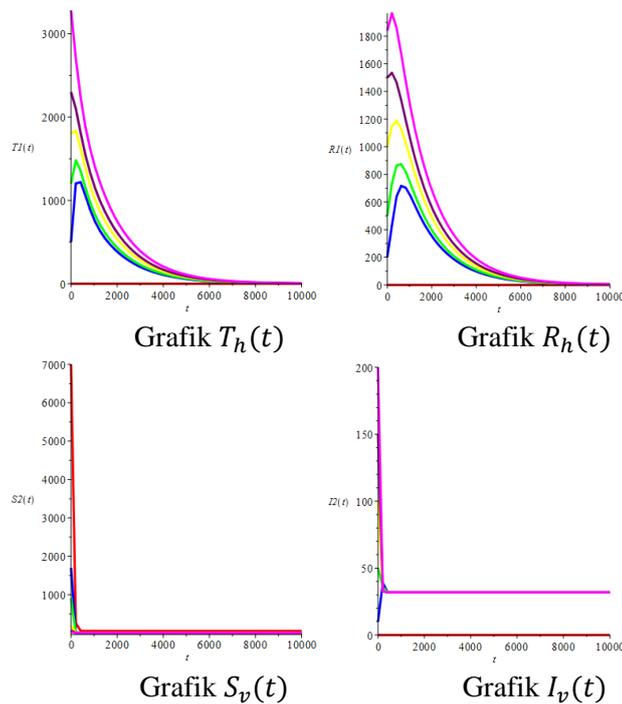
Diperoleh $R_0 > 1$. Kemudian dihitung nilai titik tetap endemik model matematika penyebaran penyakit *Leptospirosis* dengan pengaruh *treatment* yaitu $P_0 = (S_h, I_h, T_h, R_h, S_v, I_v) = (5556; 0; 0; 0; 7000; 0)$ dan $P_1 = (S_h^*, I_h^*, T_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) = (124; 3310; 3283;$

$1838; 23; 201)$. Dalam simulasi titik tetap endemik dari penyebaran penyakit *Leptospirosis* digunakan enam nilai awal adalah:

- i. $S_h(0) = 5556, I_h(0) = 0, T_h(0) = 0, R_h(0) = 0, S_v(0) = 7000, I_v(0) = 0$
- ii. $S_h(0) = 4000, I_h(0) = 800, T_h(0) = 500, R_h(0) = 200, S_v(0) = 1700, I_v(0) = 10$
- iii. $S_h(0) = 3000, I_h(0) = 1500, T_h(0) = 1200, R_h(0) = 500, S_v(0) = 900, I_v(0) = 50$
- iv. $S_h(0) = 2000, I_h(0) = 2000, T_h(0) = 1700, R_h(0) = 1000, S_v(0) = 200, I_v(0) = 100$
- v. $S_h(0) = 1000, I_h(0) = 2600, T_h(0) = 2300, R_h(0) = 1500, S_v(0) = 70, I_v(0) = 150$
- vi. $S_h(0) = 200, I_h(0) = 3310, T_h(0) = 3280, R_h(0) = 1840, S_v(0) = 30, I_v(0) = 200$

Berdasarkan nilai parameter dan nilai awal di atas diperoleh grafik dari masing-masing kelompok terhadap waktu t adalah:





Gambar 3. Trayektori di Sekitar Titik Tetap Endemik Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Berdasarkan Gambar 3 diatas, bisa dilihat bahwa kurva merah mewakili titik tetap P_0 dan kurva magenta mewakili titik tetap P_1 . Sedangkan kurva biru, hijau, kuning, orange, dan magenta yang nanti akan menentukan stabil atau tidaknya pada titik tetap kasus 2 dari penyebaran penyakit Leptospirosis pada masing-masing grafik tersebut. Kemudian dapat dilihat bahwa titik tetap $P_1 = (S_h^*, I_h^*, T_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$ adalah titik tetap yang tidak stabil karena dilihat dari trayektori (kurva biru, hijau, kuning, orange, dan magenta) dari masing-masing grafik yang bergerak menjauhi titik tetap P_0 yang diperlihatkan oleh kurva merah dan mendekati titik tetap P_1 yang diperlihatkan oleh kurva magenta. Titik tetap yang tidak stabil ini memiliki arti bahwa dalam waktu tertentu penyebaran penyakit Leptospirosis ini akan mewabah.

3.3 Interpretasi Model Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh *Treatment*

Berdasarkan hasil analisis titik tetap dan titik endemik yang sudah dilakukan terlihat beberapa faktor yang dapat mempengaruhi terjadinya epidemic pada masalah penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Pengaruh faktor ini dapat dilihat dari nilai R_0 dan bagaimana perubahannya dimana,

$$R_0 = \frac{\Lambda_v \beta_v}{(\mu_v + \gamma_v) \mu_v}$$

Hal ini menunjukkan bahwa tingkat penularan penyakit Leptospirosis melalui hubungan kontak langsung dengan vektor yang terinfeksi dan tingkat kelahiran pada populasi vektor akan berbanding lurus dengan R_0 . Semakin tinggi tingkat penularan dan tingkat kelahiran pada populasi vektor, maka penyebaran penyakit Leptospirosis akan mewabah. Sedangkan tingkat kematian vektor akibat penyakit Leptospirosis dan tingkat kematian alami vektor akan berbanding terbalik dengan R_0 . Sehingga, jika tingkat kematian vektor akibat penyakit Leptospirosis dan tingkat kematian alami vektor semakin tinggi, maka penyebaran penyakit Leptospirosis akan semakin berkurang.

4. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan diperoleh model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis dengan pengaruh *treatment* yang berbentuk persamaan diferensial. Model ini memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Berdasarkan hasil simulasi dapat dilihat bahwa tingkat penularan dapat mempengaruhi terjadinya epidemik. Semakin tinggi tingkat penularan dari vektor terinfeksi dan tingkat kelahiran pada populasi vektor maka penyakit Leptospirosis akan mewabah. Semakin bertambahnya tingkat kematian alami vektor dan tingkat kematian vektor akibat penyakit Leptospirosis maka penyebaran penyakit Leptospirosis akan semakin berkurang. Oleh karena itu, setiap individu harus menjaga kebersihan diri dan lingkungan karena kebersihan sangat mempengaruhi tingkat penularan penyakit Leptospirosis. Individu yang rentan terhadap penyakit dan tinggal di tempat yang kurang bersih akan sangat mudah tertular penyakit dan juga bisa menularkan penyakit kepada individu yang lain. Individu yang bekerja dibidang yang berhubungan langsung dengan vektor disarankan menggunakan alat perlindungan diri, seperti sarung tangan dan sepatu boot saat melakukan kontak langsung dengan vektor agar mengurangi penularan penyakit Leptospirosis dari vektor yang terinfeksi.

REFERENSI

- [1] Masriadi. *EPIDEMIOLOGI PENYAKIT MENULAR*. Depok: PT RAJAGRAFINDO PERSADA. 2014.
- [2] Atmawinata, Edi. *Mengenal Beberapa Penyakit Menular dari Hewan kepada Manusia*. Bandung: PENERBIT YRAMA WIDYA. 2006.
- [3] Widoyono. *PENYAKIT TROPIS: Epidemiologi, Penularan, Pencegahan, & Pemberantasannya*. Penerbit Erlangga. 2008.
- [4] Terpstra WJ, Adler B, Ananyina B, Andre-Fontaine G, Ansdell V, Ashford DA, et al. "Human Leptospirosis: guidance for diagnosis, surveillance and control". Geneva; World Health Organization/International Leptospirosis Society, 2003, p. 1-9; 21-3.
- [5] Yatim, Faisal. *Macam-macam Penyakit Menular dan Cara Pencegahannya Jilid 2*. Jakarta: Pustaka Obor Populer. 2007.
- [6] Alodokter. (2020). Leptospirosis. [Online]. Available: <https://www.alodokter.com/leptospirosis>.
- [7] Cahyono, E. *Pemodelan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu. 2013