UNPjoMath Vol. 3 No 3 September 2020
ISSN: 977 235516589 Page 112-115

Quadrupel Bilangan Bulat (a, b, c, d) yang Memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

Qodriyah Qoyyim[#1], Media Rosha[*2]

[#]Student of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia
[#]Lecturer of Mathematics Departement Universitas Negeri Padang, Indonesia

[1]qodriyahqoyyim27@gmail.com
[2]mediarosha_mat@fmipa.unp.ac.id

Abstract — An integer if it satisfies the Pythagorean theorem is called a "Triple Pythagoras" where there is already a building formula from Euclides to determine integers a, b and c that $a^2 + b^2 = c^2$. The next problem is how to construct the formula to determine the integers of quadruple a, b, c and d that satisfy $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. This research is a theoretical research based on literature study. The purpose of this research is to determine the formula of integer's quadruple a, b, c and d that satisfy $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ and to determine the form that has been obtained. The formula by the first way is obtained $a = m - 1$, $b = \sqrt{2mn - 1}$, $c = n - 1$, $d = (m + n) - 1$, with terms b is an odd integer, $\frac{b^2+1}{2}$ not a prime number, m and n are factor from $\frac{b^2+1}{2}$ which is $m, n > 1$. The formula by the second way is $c = \frac{n^2-m^2}{2}$, $d = \frac{m^2+n^2}{2}$ with terms $n > m$, $\sqrt{a^2 + b^2} = mn$ and $\sqrt{a^2 + b^2}$ are member of sets $\{5, 13, 17, 25, 29, \ldots\}$ also applies to it multiplies. Thus formula by the first way obtained (4,7,4,9), (4,13,16,21), etc. And formula by the second way obtained (3,4,12,13), (9,12,8,17), etc.

***Keywords* —** Integer, Pythagorean Triple, Euclides' Formulas, Integer's Quadruple.

Abstrak — Bilangan bulat jika memenuhi teorema pythagoras disebut dengan "Tripel Pythagoras" dimana sudah terdapat rumus pembangun dari Euclides untuk menentukan bilangan bulat a, b dan c yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$. Permasalahannya adalah apa rumus pembangun untuk menentukan quadrupel bilangan bulat a, b, c dan d yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Penelitian ini merupakan penelitian teoritis berdasarkan studi kepustakaan. Tujuan dari penelitian untuk menentukan formula dari quadrupel bilangan bulat a, b, c dan d yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ dan menentukan bentuk dari quadrupel bilangan bulat berdasarkan formula yang telah didapatkan. Hasil formula dengan cara pertama yaitu $a = m - 1, b = \left(\sqrt{2mn - 1}\right), c = n - 1, d = (m + n) - 1$, dengan syarat b adalah bilangan bulat ganjil, $\frac{b^2+1}{2}$ bukan bilangan prima, m dan n adalah faktor dari hasil $\frac{b^2+1}{2}$ dimana $m, n > 1$. Hasil formula cara kedua yaitu $c = \frac{n^2-m^2}{2}, d = \frac{m^2+n^2}{2}$ dengan syarat dimana $n > m, \sqrt{a^2 + b^2} = mn$ dan $\sqrt{a^2 + b^2}$ merupakan anggota himpunan $\{5,13,17,25,29, \cdots\}$ berlaku juga untuk kelipatannya. Sehingga dengan menggunakan formula pertama didapatkan (4,7,4,9), (4,13,16,21), dan seterusnya. Dari formula kedua juga didapatkan (3,4,12,13), (9,12,8,17), dan seterusnya.

***Kata kunci* —** Bilangan Bulat, Tripel Pythagoras, Rumus Pembangun Euclides, Quadrupel Bilangan Bulat.

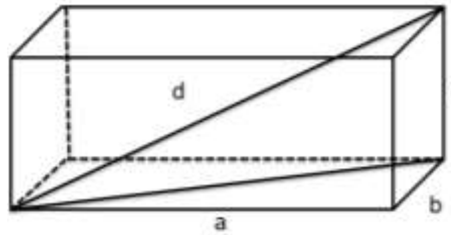
PENDAHULUAN

Bilangan merupakan ide atau abstraksi untuk mewakili kuantitas [1]. Terdapat beberapa jenis bilangan, seperti: bilangan bulat, bilangan prima, bilangan asli, bilangan real dan bilangan imajiner. Bilangan bulat terbagi atas bilangan bulat positif, bilangan bulat nol dan bilangan bulat negatif. Bilangan bulat banyak digunakan dalam kehidupan, khususnya bilangan bulat positif.

Bilangan bulat yang memenuhi teorema Pythagoras dikenal dengan nama "Tripel Pythagoras", bilangan bulat positif (a, b, c) dikatakan tripel Pythagoras apabila memenuhi $c^2 = a^2 + b^2$. Contoh tripel bilangan bulat yang merupakan tripel pythagoras adalah: (3, 4, 5), (5, 12, 13) dan (7, 24, 25). Bahasan tentang tripel pythagoras merupakan kajian 3 buah bilangan bulat, yang satu sama lain berbentuk kuadrat bilangan dengan operasi jumlah.

Tripel Pythagoras berlaku pada 3 buah bilangan bulat, yang merupakan tripel bilangan bulat. Hal ini menimbulkan keingintahuan untuk mengembangkan pada 4 bilangan bulat. Misalkan kita mempunyai $5^2 = 3^2 + 4^2$ dan $13^2 = 5^2 + 12^2$, maka kita dapat membuat menjadi $13^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$. Sehingga diperoleh suatu Quadrupel bilangan bulat (3, 4, 12, 13) yang memenuhi $13^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$. Kita menduga, dapat ditemukan banyak Quadrupel bilangan bulat dengan bentuk kuadrat bilangan dengan operasi jumlah.

Quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, merupakan ukuran-ukuran (semuanya bilangan bulat) yang ada pada suatu balok yang dapat kita lihat pada Gambar 1dibawah



Gambar .1 Balok Pasangan Quadruple Bilangan Bulat

dimana panjang = a, lebar = b, tinggi = c, dan d merupakan diagonal ruang dari balok tersebut.

Untuk memperoleh quadrupel bilangan bulat diduga tidak mudah. Lain halnya dengan pasangan tripel pythagoras yang dapat dengan mudah dibangun, dengan menggunakan persamaan yang telah diberikan Euclides. Persamaan pembangun dari Euclides yang digunakan pada tripel pythagoras adalah: apabila terdapat suatu persamaan $c^2 = a^2 + b^2$ maka untuk menentukan a, b dan c dapat menggunakan rumus berikut: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ dengan $m > n$ (m dan n adalah bilangan bulat positif) [2]. Hal ini memunculkan keingintahuan tentang rumus yang dapat digunakan dalam membangun quadrupel bilangan bulat.

Penelitian tentang quadrupel bilangan bulat, dilakukan oleh Paul Oliverio tahun 1993 dengan judul " Self-Generating Pythagorean Quadruples and n-Tuples". Dimana pada penelitian tersebut diperlihatkan, untuk quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, cara memperoleh bilangan bulat c dan d ditentukan dengan cara memilih sembarang bilangan a dan b dengan syarat syarat sebagai berikut: Pertama, jika a dan b memiliki paritas yang berlawanan Kedua, jika a dan b keduanya genap [3].

Berdasarkan penjelasan dari hasil diataslah dibentuk formula baru untuk pembentuk quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ dan menentukan bentuk quadrupel bilangan bulat menggunakan formula yang telah didapatkan.

Sebagai pedoman dalam pembentukan formula digunakan teori pendukung, karena menurut [4] peranan ilmu matematika dalam kehidupan sehari-hari diperlukan khususnya dalam memecahkan permasalahan yang tidak dapat diselesaikan secara langsung. Pedoman yang digunakan pada penelitian ini seperti teori bilangan mengenai bilangan bulat, bilangan prima, bilangan ganjil, bilangan genap dan juga mengenai keterbagian. Pedoman selanjutnya aljabar mengenai konsep penyederhanaan serta pemecahan masalah seperti suku dua (binomial), suku banyak, jumlah kuadrat bilangan bulat.

Dalam suku dua (binomial) terdapat istilah Segitiga Pascal, yang merupakan aturan geometris pada koefisien binomial dalam sebuah segitiga. Segitiga pascal menyatakan eksponen koefisien binomial. Jadi menggunakan pola segitiga Pascal akan mempermudah dalam menghitung permasalahan pada suku dua (binomial) [5].

METODE

Pada penelitian ini akan membentuk formula dengan mempelajari studi literatur yang mengkaji tentang quadrupel bilangan bulat. Dengan langkah kerja sebagai berikut:

1. Membentuk formula dari quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.
2. Menetukan syarat-syarat dari formula yang telah didapatkan agar formula dapat digunakan.
3. Menentukan bentuk quadrupel bilangan bulat tersebut menggunakan formula yang telah didapatkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini terdapat dua cara formula dari quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

A. *Cara 1 Formula Quadrupel Bilangan Bulat*

Pembentukan formula quadrupel bilangan bulat a, b, c dan d yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ didapatkan dari dua bilangan bulat m dan n dengan $m, n > 1$ menggunakan proses aljabar sebagai berikut:
Pandang ekspresi $[(m + n) - 1]^2$.
Berdasarkan ekspresi diatas diuraikan menjadi:

$$[(m + n) - 1]^2 = (m - 1)^2 + (2mn - 1) + (n - 1)^2 \quad (1)$$

dari persamaan (1) misalkan

$$a^2 = (m - 1)^2 \quad (2)$$
$$b^2 = (2mn - 1) \quad (3)$$
$$c^2 = (n - 1)^2 \quad (4)$$
$$d^2 = [(m + n) - 1]^2 \quad (5)$$

maka didapatkan

$$a = m - 1$$
$$b = \sqrt{2mn - 1}$$
$$c = n - 1$$
$$d = (m + n) - 1$$

Untuk menentukan nilai m dan n didapatkan dari nilai b yang merupakan bilangan bulat ganjl, dengan proses sebagai berikut:
dari persamaan (3)

$$b^2 = (2mn - 1)$$
$$\frac{b^2+1}{2} = mn \quad (6)$$

sehingga m dan n merupakan faktor dari hasil persamaan (6).
Karena $b^2 = 2mn - 1$, maka b bilangan ganjil.
Karena $\frac{b^2+1}{2} = mn$, maka $\frac{b^2+1}{2}$ bukan bilangan prima.

Jadi formula quadrupel bilangan bulat dari cara 1 adalah:

$$a = m - 1$$
$$b = \sqrt{2mn - 1}$$
$$c = n - 1$$
$$d = (m + n) - 1$$

Dengan syarat:

1. b adalah bilangan bulat ganjil
2. $\frac{b^2+1}{2}$ bukan bilangan prima
3. m dan n adalah faktor dari hasil $\frac{b^2+1}{2}$ dan $m, n > 1$.

Setelah pembentukan formula diatas maka dapat ditentukan bentuk quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ dengan menggunakan formula dan syarat-syarat yang telah ditentukan.

Beberapa contoh bentuk quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ menggunakan cara 1:

TABEL1
Bentuk Quadrupel Bilangan Bulat (cara 1)

(4,7,4,9)	(12,31,36,49)	(4,47,220,225)	(4,77,592,597)
(4,13,16,21)	(4,33,108,113)	(4,53,280,285)	(4,83,688,693)
(4,17,28,33)	(4,37,136,141)	(12,57,124,137)	(4,87,756,761)
(12,21,16,29)	(28,41,28,57)	(4,57,324,329)	(4,93,864,869)
(4,23,52,57)	(4,43,184,189)	(4,67,448,453)	(24,93,172,197)
(4,27,72,77)	(24,43,36,61)	(4,73,532,537)	…

B. Cara 2 Formula Quadrupel Bilangan Bulat

Pembentukan formula quadrupel a, b, c dan d yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, mengikuti proses berikut ini:
Pandang persamaan

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \tag{7}$$

Dari persamaan (7) dapat diuraikan menjadi:

$$d^2 - c^2 = a^2 + b^2$$
$$\frac{d^2 - c^2}{a^2 + b^2} = 1$$
$$\frac{d-c}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{d+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \tag{8}$$

Dari persamaan (8) dapat dimisalkan menjadi:

$$\frac{d-c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{m}{n} \tag{9}$$

dimana $m, n \in Z^+$
maka

$$\frac{d+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{n}{m} \tag{10}$$

Dari persamaan (9) dan (10) diperoleh:

$$\frac{2d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{m^2 + n^2}{mn}$$
$$\frac{-2c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{m^2 - n^2}{mn}$$

Ambil $2d = m^2 + n^2$
$2c = n^2 - m^2$
Maka $\sqrt{a^2 + b^2} = mn$

Jadi formula quadrupel bilangan bulat dari cara 2 adalah:

$$c = \frac{n^2-m^2}{2}, d = \frac{m^2+n^2}{2}$$

dimana a dan b didapatkan dari tripel pythagos $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Dengan syarat,

1. $n > m$
2. $\sqrt{a^2 + b^2} = mn$
3. $\sqrt{a^2 + b^2}$ merupakan anggota himpunan $\{5, 13, 17, 25, 29, \cdots\}$ berlaku juga untuk kelipatannya.
4. m dan n sama-sama genap atau sama-sama ganjil.

Dengan menggunakan formula pada cara 2 didapatkan beberapa contoh quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ sebagai berikut:

TABEL2
Bentuk Quadrupel Bilangan Bulat (cara 2)

(3,4,12,13)	(15,36,80,89)	(39,52,72,97)	(63,84,208,233)
(9,12,8,17)	(8,15,144,145)	(15,20,312,313)	(63,84,88,137)
(21,28,12,37)	(24,45,140,149)	(33,44,48,73)	(63,84,608,617)
(24,32,42,58)	(7,24,312,313)	(36,48,448,452)	(72,96,182,218)
(27,36,28,53)	(21,72,308,317)	(20,48,336,340)	(72,96,442,458)
(5,12,84,85)	(21,72,100,125)	(24,32,198,202)	…

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, maka kesimpulan pada penelitian ini adalah: didapatkan dua formula untuk membentuk quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Dimana setiap formula memiliki masing-masing ketentuan yang menjadi syarat agar formula tersebut dapat digunakan.

Pada cara 1 formula didapatkan dari bilangan bulat m dan n dengan $m, n > 1$ yang menggunakan proses aljabar. Setelah formula didapatkan kita dapat membentuk quadrupel bilangan bulat (a, b, c, d) yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

Penggunaan formula cara 1 untuk membentuk quadrupel bilangan bulat diawali dengan memilih b bilangan bulat ganjil. Selanjutnya, tentukan m dan n yang merupakan faktor dari hasil $\frac{b^2+1}{2}$, dengan memastikan $\frac{b^2+1}{2} = mn$ bukan bilangan prima sehingga $m, n > 1$.

Pada cara 2 formula didapatkan dari penjabaran persamaan $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. Didapatkan formula untuk c dan d dengan a dan b berasal dari tripel Pythagoras.

Penggunaan formula cara 2 untuk membentuk quadrupel bilangan bulat diawali dengan memilih tripel Pythagoras untuk menentukan a, b dan untuk menentukan m, n karena m dan n merupakan faktor dari hasil $\sqrt{a^2 + b^2}$, dengan syarat $n > m$, m dan n harus sama-sama genap atau sama-sama ganjil.

REFERENSI

[1] Purnomo, Yoppy Wahyu. 2014. *Serial Matematika untuk PGSD: Bilangan Cacah dan Bilangan Bulat.* ALFABETA, Bandung.

[2] Maor, Eli. 2019. *The Pythagorean Theorem*. Princeton Science Library.

[3] Oliverio, Paul. 1993. *Self Generating Pythagorean Quadruples and N-Tuples*. Jefferson High School, Los Angeles CA 90011.

[4] Permata, Rindu Aulia dan Arnellis. 2018. *Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Crout.* UNP Journal of Mathematics Vol.1 ISSN: 977 235516589.

[5] Media, Rosha dan Arnellis. 2019. *Modified For The Pascal Triangle Multinomial.* Mathematics Departement-Universitas Negeri Padang. Vol. 1387. No. 1: 1-9.

[6] Qoyyim, Qodriyah dan Media Rosha. 2020. "Quadrupel Bilangan Bulat (a, b, c, d) yang Memenuh $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ ", Skripsi,. Universitas Negeri Padang, Padang, Indonesia.